Türkiye Matematik Yarışması

11. SINIF

TMY - 230411

AD SOYAD : ....

OKUL ADI : ....

SINIF : ....

www.turkiyematematikyarismasi.com

TMY 2023 1.ASAMA YANIT ANAHTARI

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
3.SINIF	B	C	C	C	D	D	E	E	B	B	B	D	A	D	D	E	C	C	B	D								
4.SINIF	C	E	B	D	D	C	B	D	B	D	D	İpt.	C	E	D	C	C	A	C	C								
5.SINIF	A	C	E	A	C	E	C	C	C	B	E	E	A	E	C	C	D	D	İpt.	A	B	B	D	C				
6.SINIF	D	A	D	C	B	C	B	E	D	C	D	B	E	C	A	B	E	A	D	C	A	D	D	C				
7.SINIF	C	B	D	A	E	A	E	B	B	E	E	D	A	C	D	A	D	E	D	A	D	D	D	E				
8.SINIF	D	B	D	D	B	C	D	D	A	B	D	C	C	E	C	B	D	D	E	B	D	D	D	E				
9.SINIF	E	A	A	E	B	C	A	B	C	C	A	B	B	A	B	C	C	D	E	C	C	D	B	C	D	D	A	B
10.SINIF	E	B	B	C	B	A	B	D	E	B	A	D	A	C	E	D	D	D	B	D	E	E	C	D	D	D	B	D
11.SINIF	D	A	B	E	A	C	C	B	A	D	A	D	C	E	B	C	D	A	B	D	D	A	C	B	D	D	B	B

enap

TMY 2023 - 11. Sınıf

Çözümler

Nisan 2023

1. $A = \{1, 4, 7, 10, \ldots, 94, 97, 100\}$ kümesi veriliyor. $a, b \in A$ ve $a < b$ olmak üzere $\dfrac{a+b}{2} \in A$ gerçekleyen kaç tane (a, b) ikilisi vardır?

A) 3240 B) 252 C) 266 D) 272 E) 284

Çözüm: Cevap 272.
A kümesinin elemanları verilen sırayla bir aritmetik dizi oluşturur. Bir terim kendisine eşit uzaklıktaki iki terimin toplamının yarısına eşittir. a terimine uzaklıkları eşit olan çiftlerin sayısı $f(a)$ olsun. $f(4) = f(97) = 1$, $f(49) = f(52) = 16$ ve $1 \leq f(a) \leq 16$ dır. O zaman istenen cevap $2(1 + 2 + \cdots + 16) = 272$ olur.

2. $$P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$
polinomunun iki kökünün toplamı sıfır ise, aşağıdakilerden hangisi her zaman sağlanır?

A) $c = ab$ B) $a + b = c$ C) $b^2 = ac$ D) $ab = 0$ E) $a + b + c = 0$

Çözüm: Cevap $c = ab$.
$P(x)$ polinomunun kökleri x_1, x_2, x_3 ve toplamları sıfır olan kökler x_1, x_2 olsun.
$x_1 + x_2 + x_3 = -a$ olduğundan $x_3 = -a$ ve $P(-a) = 0$ olur. O zaman,

$$\begin{aligned} P(-a) &= (-a)^3 + a(-a)^2 + b(-a) + c \\ 0 &= -ab + c \\ c &= ab \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir.

3. 100 den küçük kaç tane pozitif a sayısı için,

$$\begin{cases} x^2 = y + a \\ y^2 = x + a \end{cases}$$

denklem sisteminin pozitif tam sayılarda çözümü vardır?

A) 7 B) 9 C) 11 D) 12 E) 15

Çözüm: Cevap 9.
Denklemleri taraf tarafa çıkaralım.

$$x^2 - y^2 = y - x \Rightarrow (x - y)(x + y + 1) = 0$$

olduğundan $x = y$ veya $x + y + 1 = 0$ olur. x, y pozitif tam sayılar olduğundan $x + y + 1 = 0$ olamaz. O halde $x = y$ dir. İkinci denklemden,

$$x^2 = x + a \Rightarrow x(x-1) = a < 100$$

olduğundan $0 < x(x-1) < 100$ şartını sağlayan pozitif x lerin sayısı istenen cevaptır. $x = 2, 3, \ldots 10$ olmak üzere 9 tane pozitif tam sayı olduğundan (x, y) ikililerinin sayısı 9 dur.

4. Bir ABC dik üçgeninde,

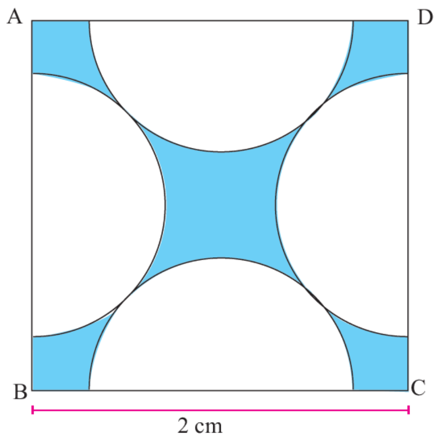
$$n = \cos^2 A - \sin^2 A + \cos^2 B - \sin^2 B + \cos^2 C - \sin^2 C$$

değeri için aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

A) $n = 0$ B) $n = 1$ C) $0 < n < 1$ D) $n = -1$ E) $-1 < n < 0$

Çözüm: Cevap $n = -1$.
İfade A, B, C ye göre simetrik olduğundan $C = 90^\circ$ alabiliriz. $\sin C = 1$, $\cos C = 0$. Öte yandan $A+B = 90^\circ$ olduğundan $\sin A = \cos B$ ve $\cos A = \sin B$ dir. Bulunanlar verilen ifadede yerine yazılırsa $n = -1$ elde edilir.

5. Aşağıda verilen, bir kenarı $2cm$ uzunluğundaki karenin içine birbirine eş ve şekildeki gibi teğet olan dört yarım çember çiziliyor.



Buna göre taralı bölgenin alanı kaç santimetrekaredir?

A) $4 - \pi$ B) $3 - \frac{\pi}{2}$ C) $4 - \frac{\pi}{4}$ D) $4 - \frac{\pi}{3}$ E) $4 - \frac{2\pi}{3}$

Çözüm: Cevap $4 - \pi$.

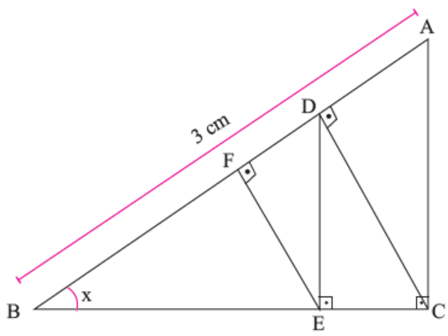
Çapı AB, BC kenarları üzerinde olan yarım çemberlerin merkezleri sırasıyla X, Y olsun. Simetriden, bu noktalar bulundukları kenarların orta noktası olur. Yarım çemberler teğet olduğundan, merkezlerini birleştiren XY doğru parçası değme noktasından geçer ve çemberlerin yarı çap uzunluğu XY nin yarısının uzunluğuna eşittir.

$XY^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2 = 2 \Rightarrow XY = \sqrt{2}$ olduğundan yarım çemberlerin yarı çap uzunuluğu $\frac{\sqrt{2}}{2}$ dir. O zaman, taralı alana T dersek,

$$T = 2 \cdot 2 - 4 \cdot \frac{1}{2}\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4 - \pi$$

olur.

6.



Yukarıda verilenlere göre, $|EF|$ uzunluğunun x açısına bağlı ifadesi hangisidir?

A) $3\sin x \cdot \cos x$ B) $3\sin^3 x \cdot \cos x$ C) $3\sin x \cdot \cos^3 x$ D) $3\sin^2 x \cdot cos^2 x$ E) $3\sin^3 x \cdot cos^2 x$

Çözüm: Cevap $3\sin x \cdot \cos^3 x$.
$BC = AB \cdot cosx$, $BD = BC \cdot cosx$, $BE = BD \cdot cosx$ ve $EF = BE \cdot sinx$ eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$BC \cdot BD \cdot BE \cdot EF = AB \cdot cosx \cdot BC \cdot cosx \cdot BD \cdot cosx \cdot BE \cdot \sin x$$

$$\Rightarrow EF = 3sinx \cdot \cos^3 x$$

bulunur.

7. $$(xy - 71 - 2x - 3y)(x^2 + 3x + 3) = 0$$
denkleminin pozitif tam sayılarda kaç tane (x, y) çözüm ikilisi vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 8

Çözüm: Cevap 4.
Soldaki iki çarpandan en az birinin sıfırdır. $x \geq 1$ den dolayı $x^2 + 3x + 3 \geq 7$ olduğundan $xy - 71 - 2x - 3y = 0$ dır. Buradan,

$$xy - 2x - 3y + 6 = 77 \Rightarrow (x - 3)(y - 2) = 77$$

bulunur. O halde, $(x-3, y-2) = (7, 11), (11, 7), (1, 77), (77, 1)$ durumlarından gelen $(x, y) = (10, 13), (14, 9), (4, 79), (80, 3)$ olmak üzere 4 çözüm vardır. $(x-3, y-2)$ nin bileşenlerinin negatif olduğu durumlardan çözüm gelmeyeceği kolayca görülür.

8. $9x^2 - 56$ ifadesi x in kaç farklı tam sayı değeri için bir tam sayının karesi olur?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

Çözüm: Cevap 4.
$9x^2 - 56 = y^2$ olacak şekilde kaç tane (x, y) ikilisi olduğunu arıyoruz. Denklemi düzenlersek $(3x - y)(3x + y) = 56$ olur.

$3x - y$ ve $3x + y$ sayılarının toplamı çift olduğundan, bu sayıların ya ikisi de tek ya ikisi de çifttir. Çarpımları çift olduğundan ikisi de çift olmalı. O zaman sekiz durum vardır.

$$(3x - y, 3x + y) = (\mp 2, \mp 28), (\mp 28, \mp 2), (\mp 4, \mp 14), (\mp 14, \mp 4)$$

$3x - y + 3x + y = 6x$, yani 6 nın katı olduğundan $(4, 14), (14, 4), (-4, -14), (-14, -4)$ ikililerinden tam sayı ikilisi çözümü gelmez.

$3x - y = \mp 2, 3x + y = \mp 28$ için $6x = \mp 30, x = \mp 5$ olur. Buradan $y = \mp 13$ bulunur.
$3x - y = \mp 28, 3x + y = \mp 2$ için $6x = \mp 30, x = \mp 5$ olur. Buradan $y = \pm 13$ bulunur.
Yani çözümler $(x, y) = (-5, -13), (5, 13), (-5, 13), (5, -13)$ olmak üzere 4 tanedir.

9. $x^2 - 3x - 7 = 0$ denkleminin kökleri a ve b dir. Buna göre,

$$3a^2 + a(b - a)(b + a)$$

işleminin sonucu kaç olur?

A) -21 B) -14 C) 7 D) 14 E) 21

Çözüm: Cevap -21.
$a + b = 3$ ve $ab = -7$ dir. O zaman,

$$3a^2 + a(b - a)(b + a) = 3a^2 + 3a(b - a) = 3a^2 - 3a^2 + 3ab = 3(-7) = -21.$$

10. $$x^2 - 3xy + 4y^2 = 4 \text{ ve } 2x^2 - 5xy + 3y^2 = 6$$
olduğuna göre, $x + y$ toplamı en çok kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm: Cevap 4.
Birinci denklemi -3 ikinci denklemi 2 ile genişletip taraf tarafa toplarsak

$$x^2 - xy - 6y^2 \Rightarrow (x - 3y)(x + 2y) \Rightarrow x = 3y \text{ veya } x = -2y$$

elde ederiz. $x = 3y$ ilk denklemlerden birinde yazılırsa $y = \pm 1 \Rightarrow x + y = \pm 4$ bulunur. $x = -2y$ yerine yazılırsa $y = \pm \frac{1}{4} \Rightarrow x \mp \frac{1}{4}$ bulunur. Dolayısıyla $x + y$ en çok 4 olur.

11. Bir kişi bulunduğu noktadan eşit olasılıkla her saniye kuzeye, güneye, doğuya veya batıya bir adım atmaktadır. 4 saniye sonra başladığı noktada olma olasılığı $\frac{m}{n}$ dir. m ile n aralarında asal olduğuna göre, $m + n$ toplamı kaçtır?

A) 73 B) 107 C) 41 D) 143 E) 35

Çözüm: Cevap 73.
İlk adımda doğuya gitsin. O zaman izleyeceği güzergâhlar; ikinci adımda yine doğuya gidiyorsa $DDBB$, ikinci adımda batıya gidiyorsa $DBDB, DBBD, DBGK, DBKG$, ikinci adımda güneye gidiyorsa $DGBK, DGKB$, ikinci adımda kuzeye gidiyorsa $DKBG, DKGB$ olur, yani 9 durum vardır. Bir güzergâh için her saniye attığı adımı $1/4$ olasılıkla atacağından her bir güzergâhı izleme olasılığı $(1/4)^4$ ve doğuyla başlama olasılığı $6 \cdot (1/4)^4$ olur. Her bir yön için olasılıklar hesaplanırsa toplam olasılık,

$$\frac{m}{n} = 4 \cdot 9 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{36}{4^4} = \frac{9}{64}$$

olur ve sonuç olarak $m + n = 9 + 64 = 73$ tir.

12. $$|x^2 - 2x - 2|^{x^2-1} = 1$$
denklemini sağlayan kaç tane x değeri vardır?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) Hiçbiri

Çözüm: Cevap 5.
$(i.)$ $|x^2 - 2x - 2| = 1$ veya $(ii.)$ $x^2 - 1 = 0 \wedge |x^2 - 2x - 2| \neq 0$ olmalıdır.

$(i.)$ $x^2 - 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = -1.$
$x^2 - 2x - 2 = -1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 2 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}.$
Bu durumda $x = 3, -1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ olmak üzere 4 çözüm vardır.

(ii). $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$ için yukarıda bulunmayan $x = 1$ gelir ve $x = 1$ için $|x^2 - 2x - 2| \neq 0$ şartı sağlanır. O zaman $x = 1$ çözümdür.

Sonuç olarak soruda verilen şartı sağlayan 5 tane x değeri vardır.

13. Kenar uzunlukları tam sayılar olan dikdörtgen şeklindeki bir oyun parkını genişletmek için bir kenarı 1 m olan kare şeklindeki levlalarla oyun alanının etrafı çevreleniyor.

Elde edilen yeni oyun parkının alanı eski oyun parkının alanının iki katı kadar olduğuna göre eski oyun parkının çevresinin alabileceği en büyük değer kaçtır?

A) 18 B) 24 C) 26 D) 32 E) 48

Çözüm: Cevap 26.
Eski oyun parkının kenar uzunlukları a ve b olsun. Genişletmeden sonra her bir kenar 2 m uzayacağından yeni oyun parkının kenar uzunlukları $a + 2$ ve $b + 2$ olur.

$$2ab = (a+2)(b+2) = ab + 2a + 2b + 4 \Rightarrow ab - 2a - 2b + 4 = 8 \Rightarrow (a-2)(b-2) = 8$$

olacağından $\{a-2, b-2\} = \{2, 4\}$ veya $\{a-2, b-2\} = \{1, 8\}$ olur. İlk durumda $\{a, b\} = \{4, 6\}$ ve buradan çevre uzunluğu $2(a+b) = 20$ elde edilir. İkinci durumda ise $\{a, b\} = \{3, 10\}$ ve çevre uzunluğu $2(a+b) = 26$ bulunur. O zaman istenen cevap 26. dır.

14. $ABCDEF$ düzgün altıgeninde DC nin orta noktası N, AN nin orta noktası K, EK nin orta noktası L, DL nin orta noktası M olmak üzere $KLMN$ dörtgeninin alanının düzgün altıgenin alanına oranı kaçtır?

A) $\dfrac{5}{24}$ B) $\dfrac{7}{24}$ C) $\dfrac{7}{30}$ D) $\dfrac{5}{36}$ E) $\dfrac{7}{48}$

Çözüm: Cevap $\dfrac{7}{48}$.
$A_1A_2...A_n$ dışbükey çokgeninin alanı $[A_1A_2...A_n]$ ile gösterilsin. $AF \cap DE = \{P\}$ olsun.
$[KLMN] = [KLN] + [NLM]$ dir. $DN \parallel AP$ olduğundan $APDN$ yamuk ve orta tabanı KE olur. Yani $DN \parallel KE$ dir.

$$[NLM] = \frac{1}{2}[NLD] = \frac{1}{2}[NED] = \frac{1}{2}\frac{[CED]}{2} = \frac{1}{4}\frac{[ABCDEF]}{6}$$

$$\Rightarrow [NLM] = \frac{1}{24}[ABCDEF].$$

Şimdi de KLN üçgenin alanını, NLM üçgeninin alanı cinsinden bulalım.

$$\frac{[KLN]}{[NLD]} = \frac{KL}{ND} \Rightarrow \frac{[KLN]}{2[NLM]} = \frac{KL}{ND} \Rightarrow \frac{[KLN]}{[NLM]} = \frac{2KL}{ND} = \frac{KE}{ND}.$$

$APDN$ yamuğundan,

$$1 = \frac{AK}{KN} = \frac{AP - KE}{KE - ND} = \frac{4ND - KE}{KE - ND} \Rightarrow KE - ND = 4ND - KE$$

$$\Rightarrow 2KE = 5ND \Rightarrow \frac{[KLN]}{[NLM]} = \frac{5}{2}$$

bulunur. O zaman,

$$[KLN] = \frac{5}{2}[NLM] = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{24}[ABCDEF] = \frac{5}{48}[ABCDEF].$$

Sonuç olarak

$$[KLMN] = [KLN] + [NLM] = \left(\frac{5}{48} + \frac{1}{24}\right)[ABCDEF] = \frac{7}{48}[ABCDEF]$$

olduğundan istenen cevap $\dfrac{7}{48}$ olur.

15. $y = f(x)$ parabolü $A(-1, 7)$ ve $B(5, 7)$ noktalarından geçmektedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} &I.\ f(-2023) = f(2019) \\ &II.\ \ f(2023) = f(-2019) \\ &III.\ f(-1711) = f(1715) \\ &IV.\ f(-1071) = f(1067) \end{aligned}$$

ifadeleirinden hangileri doğrudur?

A) I ve II B) II ve III C) III ve IV D) I ve IV E) II ve IV

Çözüm: Cevap II ve III.
A, B noktalarının ordinatları eşit olduğundan AB doğrusunun parabolü kestiği noktalar simetriktir. Simetri ekseni $x = \dfrac{-1+5}{2} = 2$ doğrusu olur. O halde $f(a) = f(b)$ olması için $\dfrac{a+b}{2} = 2$ olmalıdır. Bu koşulu sağlayan II. ve III. seçeneklerdir.

16. Dik koordinat düzleminde $ABCD$ karesinin $A(1,3)$, $B(3,-1)$ ve $C(7,1)$ köşe noktaları veriliyor.

$$I.\ 3x - y - 10 = 0$$
$$II.\ x + 3y - 10 = 0$$
$$III.\ \ 2x - y - 6 = 0$$

ifadelerinden hangileri $ABCD$ karesinin simetri eksenidir?

A) Yalnız I B) Yalnız III C) I ve II D) II ve III E) I, II ve III

Çözüm: Cevap I ve II.
Karenin simetri eksenleri köşegenler ve karşılıklı kenarları ortalayan doğrular olmak üzere 4 tanedir. Ayrıca karenin merkezi $M(m_x, m_y) = M\left(\dfrac{1+7}{2}, \dfrac{3+1}{2}\right) = M(4,2)$ dir.
I doğrusu B ve M noktalarından geçtiği için simetri eksenidir (köşegen).
II doğrusu A ve C noktalarından geçtiği için simetri eksenidir (köşegen).
III doğrusu köşegen olmadığı gibi ne AB kenarının orta noktasından ($(2,1)$) ne BC kenarının orta noktasından ($(5,0)$) geçer. Yani simetri ekseni değildir.

17. x bir reel sayı olmak üzere;

$$x + 5 \leq |2x - 1| \leq 3x + 11$$

eşitsizliğini sağlayan en küçük tam sayının toplamı kaçtır?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm: Cevap 11.
$x \geq \dfrac{1}{2}$ ise $x+5 \leq 2x-1 \leq 3x+11$ dir. Soldaki eşitsizlikten $x \geq 6$ sağdaki eşitsizlikten $x \geq -12$ bulunur. O zaman bu durumda $x \geq 6$ dır.
$x < \dfrac{1}{2}$ ise $x + 5 \leq 1 - 2x \leq 3x + 11$ dir. Soldaki eşitsizlikten $x \leq -\dfrac{4}{3}$ sağdaki eşitsizlikten $x \geq -2$ bulunur. Bu durumda $x = -2$ yegane tam sayı çözümdür.
Sonuç olarak en küçük üç x değerinin toplamı $-2 + 6 + 7 = 11$ olur.

18. $f(x) = x^2 - 4x + n$ parabolünün iç bölgesindeki bir nokta $A(2,1)$ ve dış bölgesindeki bir nokta $B(5,-1)$ dir. Buna göre n hangi aralıkta yer alır?

A) $(-6,5)$ B) $(-2,4)$ C) $(-5,2)$ D) $(-2,5)$ E) $(2,4)$

Çözüm: Cevap $(-6, 5)$.
$A(2,1)$ noktası parabolün iç bölgesinde olduğundan $1 > f(2) = n - 4 \Rightarrow n < 5$ tir. $B(5,-1)$ noktası parabolün dış bölgesinde olduğundan $-1 < f(5) = n + 5 \Rightarrow n > 6$ olur. Sonuç olara $-6 < n < 5$ elde edilir.

19. Kenan girdiği ilk sınavda, matematikten sınıf ortalamasının 8 puan üstünde, fizikten sınıf ortalamasının 4 puan altında almıştır. Kenan'ın puanı ortalamaya katılmaz ise sınıfın matematik ortalaması 1 puan düşmektedir.

Buna göre, sınıfa sonradan katılan bir öğrencinin fizik ortalamasını 2 puan artırması için alması gereken puan, Kenan'ın fizik puanından kaç puan fazladır?

A) 21 B) 24 C) 27 D) 29 E) 30

Çözüm: Cevap 24.
M ile sınıfın matematik ortalamasını, F ile fizik ortalamasını ve n ile sınıf mevcudunu gösterelim. Toplam puandan Kenan'ın puanı olan $M + 8$ çıkarırsak $n - 1$ kişinin ortalaması $M - 1$ oluyor. O zaman

$$nM - (M + 8) = n(M - 1) \Rightarrow nM - M - 8 = nM - n - M - 1 \Rightarrow n = 9$$

olur. Sınıfa sonradan katılan öğrensinin fizik puanı f olsun. O zaman

$$(F + 2)(n + 1) = f + nF \Rightarrow 10(F + 2) = f + 9F \Rightarrow f = F + 20$$

bulunur. Kenan'ın fizik puanı $F - 4$ olduğundan istenen cevap

$$f - (F - 4) = F + 20 - F + 4 = 24$$

olarak bulunur.

20. Fuat evini boyamak için 5 kg mavi boya ile 3 kg sarı boyayı karıştırıp istediği tondaki yeşil boyayı elde ediyor. Fuat yanlışlıkla 3 kg mavi boya ile 5 kg sarı boyayı karıştırıp yeşilin başka bir tonunu elde ediyor. Fuat istediği yeşil tondan tam olarak 8 kg boya elde etmek istemektedir.

Buna göre, yanlışlıkla elde ettiği yeşil boyadan kaç kg çıkarıp, yerine aynı miktada sadece mavi boya eklemelidir?

A) $2,4$ B) $2,8$ C) 3 D) $3,2$ E) $3,6$

Çözüm: Cevap $3,2$.
Karışımdan x kg boya çıkarılırsa, çıkarılan boyanın $\frac{3}{8}$ i mavi olduğundan $\frac{3x}{8}$ kg mavi boya çıkarılmış olur. Daha sonra x kg mavi boya eklenerek 5 kg mavi boyaya ulaşılır ve toplam ağırlık 8 kg kalır. O zaman

$$3 - \frac{3x}{8} + x = 5 \Rightarrow x = \frac{16}{5} = 3,2$$

istenen cevaptır.

21. Aşağıda bir bölümü verilmiş 23×23'lük birim karelerden oluşmuş şekle, T, M ve Y harfleri yine şekilde verilen örüntüye uygun şekilde yerleştirilecektir.

T	M	Y	T	M	Y	...
M	Y	T	M	Y	T	...
Y	T	M	Y	T	M	...
T	M	Y	T	M	Y	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Tüm şekildeki kullnılan T, M ve Y harflerinin sayıları aşağıdakilerden hangisidi?

A) $T177, M176, Y176$
B) $T177, M175, Y177$
C) $T176, M176, Y177$
D) $T176, M177, Y176$
E) $T176, M178, Y175$

Çözüm: Cevap $T176, M177, Y176$.
İlk 21 satırda birbirini tekrar eden 7 tane 3×23'lük şekil var. Böylece ilk 21 satırda her bir harften eşit sayıda ve $\dfrac{21}{3} \cdot 23 = 161$ tane bulunur.

$23 \equiv 2 \pmod 3$ olduğundan son iki satır ilk iki satır ile aynıdır ve ayrıca her satırda son iki harf ile ilk iki harf aynıdır. O zaman ilk iki satıra ve bu satırların ilk iki harflerine bakmak yeterli. Kalan kısımlar simetrik olur.

Eşitliği bozan kısımda 2 tane M ve birer tane T, Y olduğundan tüm tabloda T ve Y harfleri eşit sayıda, M sayısı ise bunların herhangi birinden 1 fazladır.

Sonuç olarak M'lerin sayısı $161 + 2 \cdot 7 + 2 = 177$ diğerler harflerin her birinin sayısı 176 dır.

22. $f(n)$ işlemi, n sayısını oluşturan rakamların toplamı rakam bulunana kadar ardışık işlemler olarak tanımlanıyor.
Örneğin, $f(978) = \{9 + 7 + 8 = 24,\ 2 + 4 = 6\} = 6$. Buna göre,

$$f(0!) + f(1!) + f(2!) + \cdots + f(2023!)$$

toplamının sonucu kaçtır?

A) 18181 B) 18251 C) 18442 D) 18641 E) 19000

Çözüm: Cevap 18181.
$f(0!) = f(1!) = 1$, $f(2!) = 2$, $f(3!) = f(6) = 6$, $f(4!) = f(24) = 2 + 4 = 5$, $f(5!) = f(120) = 1 + 2 + 0 = 3$.

Öte yandan $n \geq 6$ doğal sayıları için $9 \mid n!$ olduğundan $f(n!) = 9$ olur. O zaman istenen cevap

$$1 + 1 + 2 + 6 + 6 + 3 + (2023 - 6 + 1) \cdot 9 = 19 + 2018 \cdot 9 = 18181$$

olarak bulunur.

23. ABC üçgeninde AC kenarı üzerinde bir D noktası alınarak ügen BD çizgisi boyunca katlanıyor. Katlama işleminde A noktası BC kenarı üzerindeki bir A' noktasına geliyor.

$|AD| = 3\ cm$ ve $|AB| = 7\ cm$ ise $A'DC$ üçgeninin çevresinin en büyük tam sayı değeri kaçtır?

A) 16 B) 18 C) 20 D) 21 E) 23

Çözüm: Cevap 20.
$\triangle ABD \cong \triangle A'BD$ olduğundan $A'B = 7$, $A'D = 7$ ve $\angle ABD = \angle A'BD$ olur. BD, ABC üçgeninde açıortay olduğundan $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{CB}{CD} = \dfrac{7}{3}$ tür. O zaman $A'DC$ üçgeninin kenar uzunlukları $A'D = 3$, $DC = 3k$, $CA' = 7 - 7k$ dır. Üçgen eşitsizliğinden $(7k - 7) - 3 < 3k \Rightarrow k < \dfrac{5}{2}$ dir. $A'DC$ üçgeninin çevre uzunluğu $(7k - 7) + 3k + 3 = 10k - 4$ dir ve böylece bu uzunluğun en büyük tam sayı değeri $10k - 4 < 10 \cdot \dfrac{5}{2} - 4 = 21$ den 20 olarak bulunur.

24. O merkezli bir çemberin iç bölgesinde $|AO| = 6\ cm$ olacak şekilde bir A noktası alınıyor. A noktasından geçen en uzun kiriş ile en kısa kirişin uzunlukları toplamı 18 cm ise O merkezli çemberin yarıçapı kaç cm dir?

A) $\dfrac{19}{3}$ B) $\dfrac{13}{2}$ C) 7 D) $\dfrac{36}{5}$ E) $\dfrac{18}{2}$

Çözüm: Cevap $\dfrac{13}{2}$.
Çember içindeki bir noktadan geçen en uzun kiriş çaptır. AO doğrusuna O noktasında dik olan çapı çizelim. A noktasından geçen en kısa kiriş, çizilen bu çapa paralel olan kiriştir. Bu en kısa kirişin çemberi kestiği bir nokta B olsun. OAB dik üçgendir ve hipotenüsü OB yarıçapıdır. $AB = 9 - |OB|$ olup pisagor bağıntısından

$$|OB|^2 = 6^2 + (9 - |OB|)^2 \Rightarrow |OB|^2 - (9 - |OB|)^2 = 36$$
$$\Rightarrow (2|OB| - 9) \cdot 9 = 36 \Rightarrow |OB| = \frac{13}{2}$$

elde edilir.

25. $|AB| = |AC|$ olan ABC ikizkenar üçgeninde BC üzerinde bir D noktası alınıyor (B noktası D ile C arasında). D noktasından AC kenarına çizilen dikmenin AC kenarını kestiği nokta H dir. $DH \cap AB = K$ ve $CK \perp AB$ olduğu biliniyor.

$|BK| = 2$ ve $|DK| = 6$ ise $|BD|$ kaçtır?

A) 2 B) $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ C) $\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$ D) $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$ E) $2\sqrt{10}$

Çözüm: Cevap $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$.
$\angle BAC = 2\alpha$ olsun. $\angle ABC = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle KCB = \alpha$ olur. Öte yandan

$$\angle KDB = \angle KBC - \angle BKD = 90^\circ - \alpha \angle AKH = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - 2\alpha) = \alpha$$

olduğundan $KC = KD = 6$ elde edilir.

KBC üçgeninde Pisagor Bağıntısı ile $BC = 2\sqrt{10}$ bulunur.

I. Yol: K noktasından BC ye indirilen dikmenin ayağı M olsun. KBC üçgeninde Öklit Bağıntı'sından $2^2 = BM \cdot 2\sqrt{10} \Rightarrow KM = \dfrac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow MC = 9 \cdot KM$ olur. $BM = MC$ olduğundan $BD + BM = 9 \cdot BM \Rightarrow BD = 8 \cdot BM = \dfrac{8\sqrt{10}}{5}$ bulunur. bulunur.

II. Yol: KDC üçgeninde Stewart Bağıntısı ile,

$$KB^2 = 6^2 - 2\sqrt{10} \cdot BD \Rightarrow 4 = 36 - 2\sqrt{10} \cdot BD \Rightarrow BD = \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

bulunur.

III. Yol: K noktasından BC ye paralel çizilen doğru AC kenarını L noktasında kessin. $\angle HKL = \angle HDC = \alpha$ ve $\angle LKC = \angle KCD = \alpha$ olduğundan KL, HKC üçgeninde açıortay olur. Buradan,

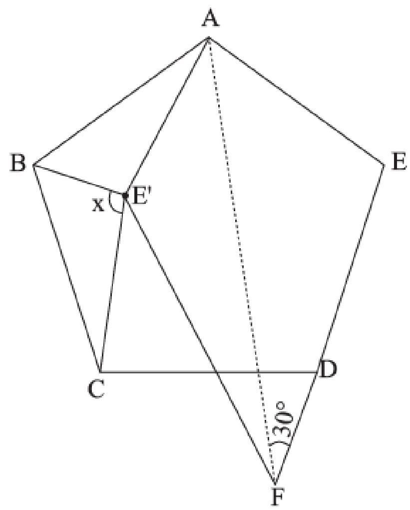
$$\frac{HK}{HL} = \frac{CK}{CL} = \frac{6}{2} = 3$$

bulunur. $HL = x$, $HK = 3x$ diyelim. KHL dik üçgeninde Pisagor Bağıntısı ile $KL = x\sqrt{10}$ ve daha sonra aynı üçgende açıortay uzunluğundan

$$(x\sqrt{10})^2 = 6 \cdot 3x - 2 \cdot x \Rightarrow 10x^2 = 16x \Rightarrow x = \frac{8}{5} \Rightarrow x\sqrt{10} = \frac{8\sqrt{10}}{5} = KL$$

elde edilir. $KLBD$ paralelkenarından $KL = BD = \dfrac{8\sqrt{10}}{5}$ olur.

26. $ABCDE$ düzgün beşgeninde DE üzerinde bir F noktası alınarak şekil AF boyunca katlanıyor. Katlama sonucu E noktasının geldiği noktaya E' diyelim. $\angle AFE = 30°$ ise $\angle BE'C = x$ kaç derecedir?
A) 108
B) 118
C) 122
D) 132
E) 144



Çözüm: Cevap 132.
Düzgün beşgenin bir açısı $108°$ olduğundan $\angle EAF = \angle FAE' = 42°$ ve böylece $\angle E'AB = 24°$ olur. $AB = AE'$ den $\angle ABE' = 78°$ ve buradan $\angle E'BC = 30°$

bulunur. AC yi çizelim ve $\angle ACE' = t$ diyelim. $\angle CAE' = 36° - 24° = 12°$ ve $\angle BCE' = 36° - t$ dir.

Şimdi de ABC üçgeninde E' noktasıyla Trigonometrik Ceva bağıntısını yazalım.

$$\sin 24° \cdot \sin 30° \cdot \sin t = \sin 12° \cdot \sin 78° \cdot \sin(36° - t).$$

$\sin 78° = \cos 12°$ olduğundan $2 \cdot \sin 12° \cdot \sin 78° = 2 \cdot \sin 12° \cdot \cos 12° = \sin 24$ olur. Bu sonucu Trigonometrik Ceva bağıntısına yazarsak $\sin t = \sin(36° - t)$ elde ederiz. O zaman $t = 18°$ dir. Bu açıyı $BE'C$ üçgeninde yazarsak $\angle BE'C = 132°$ olur. Yani $x = 132$ dir.

27. TMY ülkesinde satılan her ürünün fiyatı bir tam sayıdır. Bu ülkede para birimi T dir ve geçerli olan sadece iki tür para vardır. Bu paraların değerleri $5T$ ve $7T$ dir. Bu yüzden ödemeler sadece $5T$ ve $7T$ ile yapılıp, para üstü olarak sadece $5T$ ve $7T$ alınabilir.

Örneğin değeri $16T$ olan bir ürünü almak isteyen bir kişi 3 tane $7T$ ile ödeme yapıp para üstü olarak $5T$ alabilir.

Bu ülkede para üstü alınmadan satılamayacak en pahalı ürünün fiyatı nT ise n nin rakamları toplamı kaçtır?

A) 4 B) 5 C) 8 D) 9 E) 13

Çözüm: Cevap 5.
Alışverişte kullanılan $5T$ lerin sayısı x ve $7T$ lerin sayısı y olsun. $5x + 7y = n$ dir. Para üstü alınmadığına göre x ve y negatif olmayan tam sayılardır.

I1. Yol: a ve b aralarında asal tam sayılar olsun. Bir n tam sayısı için x, y tam sayıları $ax+by = n$ denkleminin bir çözümü ise her $k \in \mathbb{Z}$ için $x+7k$ ve $y-5k$ tam sayıları da bir çözümdür. En az bir çözümün olduğu $ax' + by' = 1$ denkleminin çözümü olduğu için bu denklem n ile çarpılarak kolayca görülür. Başka türlü bir çözüm olmadığını bulmak için (x_1, y_1), (x_2, y_2) gibi iki çözüm alıp bakalım. $5(x_1 - x_2) = 7(y_1 - y_2)$ ve $(5, 7) = 1$ olduğundan $x_1 \equiv x_2 \pmod 7$ ve $y_1 \equiv y_2 \pmod 5$ tir. $x_2 = x_1 + k_1 b$ ve $y_2 = y_1 - k_2 a$ olduğundan $k_1 = k_2$ bulunur.

Verilen bir n için $x + 7k, y - 5k$ çözümlerinden tam olarak bir tane $0 \le y - 5k \le 4$ şartını sağlayan çözüm vardır. Bu çözüm ikililerini $x(n), y(n)$ ile gösterelim.

Bir n sayısının soruda istenen şekilde yazılabilmesi için gerek ve yeter şart $x(n) \ge 0$ olmasıdır. $x(n) \ge 0$ ise zaten her n için $(x(n), y(n))$ bir çözüm olduğunu söyledik. Eğer $x(n) < 0$ ise $x(n)+7k < 0$ dır. $k \le 0$ ise $y(n)-5k < 0$. $k > 0$ ise $x(n)+7k$ ve ve $y(n) - 5k$ dan en az biri her negatiftir. Bu durumda n istenen şartlarda yazılamaz.

Sonuç olarak yazılamayan n sayılarının kümesi $\{5x+7y \mid x < 0,\ 0 \le y \le 4\}$ olur. Bu kümenin en büyük elemanı için $x = -1$, $y = 4$ almamız yeterlidir. O halde istenen cevap $5(-1) + 7(4) = 23$ ten $2 + 3 = 5$ olur.

II. Yol: (Genel Hal). a ve b aralarında asal tam sayılar olsun. x ve y negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $ax + by$ şeklinde yazılamayan en büyük tam sayı $ab - a - b$ dir. O zaman istenen cevap $5 \cdot 7 - 5 - 7 = 23$ ten $2 + 3 = 5$ olur.

III. Yol: $n = 24, 25, 26, 27, 28$ için x, y değerleri kolayca bulunur. x yerine $x+1$ alındığında n yerine $n+5$ çözümü geleceğinden $n \geq 24$ için daima çözüm var. $n = 23$ için çözüm olmadığın göstermek için denkleme 5 ve 7 modüllerinde ayrı ayrı bakılır.

28. Beş seçenekli bir test sınavında cevap anahtarı, art arda gelen üç sorunun cevabı birbirinden farklı olacak şekilde oluşturulmuştur.

Bu test sınavının cevap anahtarına bakıldığında;

$$\ldots, 11)\, C \quad 12)\, A \quad 13 \quad 14) \quad 15)\, E \quad 16)\, B, \ldots$$

görülür. 13. ve 14. sorunun cevapları silik çıktığından okunamamaktadır.

Buna göre, 13. sorunun cevabının B ve 14. sorunun cevabının C olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm: Cevap $\frac{1}{3}$.
13. sorunun cevabı C, A, E olamaz ve 14. sorunun cevabı A, E, B olamaz. Yani 13. sorunun cevabı ya B ya D; 14. sorunun cevabı ya C ya D dir. Her ikis aynı anda D olamayacağından üç durum var. O zaman istenen cevap $\frac{1}{3}$ tür.