

Prof.Dr. Mustafa Özdemir

GELECEĞİN DAHİLERİNE

DAHİMATİK

6. Sınıf

Aıştırma ve Problemlerin Çözümleri

American Mathematics Competitions (AMC 8)

UİMO - PISA - TIMSS KANGURU

TÜBİTAK Olimpiyat Sınavları

Matematik Yarışmaları

LGS Sınavına Ön hazırlık

425 Çözümlü Örnek

486 Aıştırma

323 Problem

Toplam 1234 Soru

6. sınıf seviyesine

uygun olarak,

MATEMATİĞE MERAKLI

öğrenciler için hazırlanmıştır.



ALTIN NOKTA

Dijital Kitap

Akıllı Tahta

altinkarne.com



Önsöz

Merhaba küçük dahi! Bu kitabı elinde tutuyorsan matematiği seviyorsun ve kendine güveniyorsun demektir. Matematiğin eğlenceli dünyasına hoşgeldin. Bu kitapta, çözerken biraz daha düşünmeni gerektirecek sorularla karşılaşacaksın. En baştan belirteyim, bu kitapta sana okulda henüz gösterilmemiş ve öğretmenlerinin sana anlatmadığı bazı küçük yeni konular olabilir. Bunları görünce, "**ama bu konuyu biz görmedik!**" şeklinde bir itiraz istemiyorum. Çünkü, bu kitapta sadece gördüğün konuları değil, ileriki zamanlarda öğrenmen gereken konuları da birazcık öğreneceksin. Yani, bazı konuları öğrenme işine biraz erken başlıyoruz o kadar. Matematiği seven bir küçük dahi olarak, yeni sorular ve problemlerle bazen eğlenecek, bazen zorlanacaksın. Çok zorlanıyorsan önce **Dahimatik 5**'i bitirebilirsin. Zorlanmıyorsan **Dahimatik 7**'ye geçiş yapabilirsin. Bu kitap, beyninde yeni ve hızlı düşünce sistemleri oluşturacak, yavaş yavaş beynini geliştirecek ve bu kitap sayesinde zamanla çok daha hızlı anlayacak ve problem çözebileceksin. Ama bilimin en önemli noktalarından biri sabırdır. Zorlandığında pes etmemen gerektiğini en baştan bilmen gerek.

Unutma!

Tıpkı yabancı dil öğreniminde olduğu gibi, yaş ilerledikçe beyin matematiksel kavrama ve öğrenme kabiliyetini yavaş yavaş kaybetmeye başlar ve yeni kavramları öğrenmek güçleşir. Küçük yaşta zor problemlerle meşgul olan ve yeni bilgiler öğrenen bir çocuk, matematik problemlerini kavramaya daha yatkın hale gelir. Matematiğe yatkınlığı zayıf olan, imkan ve koşulları ortalama bir öğrenciye göre düşük olan öğrenciler için müfredat zor olabilirken, matematiksel düşünme becerisi daha iyi olan veya daha elverişli koşullara sahip öğrenciler için müfredat konuları oldukça kolay olabilmektedir. Peki kolay olması sorun olmadığı anlamına mı geliyor? Elbetteki hayır. Çünkü, **kabiliyetli bir öğrenci basit sorularla matematiksel kavrama ve öğrenme yeteneğini geliştiremeyecektir**. İşte bu yüzden Dahimatik serisini hazırladım. Faydasını ileriki yaşlarda çok daha iyi anlayacaksın! Hadi bakalım başlayalım.

Kitaba Nasıl Çalışmalısın?

- ★ Önce konu başındaki tanımları ve açıklamaları iyi okumalısın. Önemli gördüğün yerlerin altını renkli kalemle çiz.
- ★ Sonra örnekleri incele. Önce örneği kendin çözmeye çalışabilirsin. Çözemediysen çözümü iyice incele ve püf noktaları not al.
- ★ Alıştırmaları mutlaka çöz. Çözemediysen önceki örnekleri tekrar incele.
- ★ Daha sonra konu sonundaki problemlerle konuyu pekiştirmeyi unutma.

Bu kitabı bitirdiysen, ya da bu kitap seni hiç ama hiç zorlamadıysa, **Dahimatik 6** yerine hemen **Dahimatik 7** ve **8** kitaplarına başlamalısın. Bu kitaplara başlamak için bir üst sınıfa geçmene gerek yok.

Prof.Dr. Mustafa Özdemir - Antalya 2023

Kısaltmalar :

UKMT : United Kingdom Mathematics Tournament

ÖSS-YGS : Türkiye Üniversite Giriş Sınavı Soruları

AMC 8 / AJHSME : Amerika Birleşik Devletleri Ortaokul Matematik Olimpiyat Sınavları

UAMO : Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı

UMO - UİMO : TÜBİTAK Ulusal Matematik Olimpiyatları

FMO : Flanders Mathematics Olimpiad

Teşekkür

Kitabın düzeltme ve kontrol aşamasında çok önemli görüş, öneri ve düzeltmeleriyle kitaba katkı sağlayan çok değerli öğretmenler **Engin KARAMAN, Yunus AL, Özcan ASLAN ve Murat Şahin ve Ali Can GÜLLÜ**'ye çok teşekkür ediyorum.

Ekim 2023 - Antalya

Hayatta En Hakiki Mürşid İlimdir, Fendir.
Mustafa Kemal Atatürk

İçindekiler

1 Üslü Sayılar	7
1.1 Üslü Eşitlikler	11
1.2 Üslü Sayılarda Basamak Sayısı ve Son Rakam	11
1.3 Problemler (Üslü Sayılar)	12
2 Doğal Sayılarda İşlemler ve İşlem Önceliği	15
2.1 Doğal Sayılarda En Az - En Fazla Problemleri	16
2.2 Garantileme ve Güvercin Yuvası İlkesi Soruları	18
2.3 Büyük Sayıları 10'un Kuvveti Cinsinden Yazma	20
2.4 Problemler (Doğal Sayılarda İşlemler)	24
3 Bölme ve Bölünebilme	29
3.1 Çarpanlar ve Katlar	30
3.2 Bölünebilme Kuralları	32
3.3 Problemler (Bölünebilme)	40
4 Asal Sayılar	43
4.1 Bir Sayının Asal Çarpanları	45
4.2 Pozitif Bölen (Çarpan) Sayısını Hesaplama	46
4.3 Problemler (Asal Sayı)	49
5 Ortak Bölen ve Ortak Kat	51
5.1 En Büyük Ortak Bölen	51
5.2 En Küçük Ortak Kat	52
5.3 Asal Çarpanlarla EBOB ve EKOK	54
5.4 Problemler (EBOB - EKOK)	57
6 Ardışık Sayıların Toplamı	59
6.1 Ardışık Sayıların Toplamı	61
6.2 Ardışık Sayıların Toplam Formülü	61
6.3 Artış Miktarı Katlanarak Artan Ardışık Sayıların Toplamı	63
6.4 Kareler Toplamı İçin Kısa Yöntem	63
6.5 Kuvvetler Toplamını Hesaplama	64
6.6 Problemler (Ardışık Sayıların Toplamı)	65
7 Kümeler	68
7.1 Kümelerin Kesişimi, Birleşimi, Farkı	70
7.2 İDİ - İçerme-Dışarma İlkesi	73
7.3 Bir Kümenin Alt Kümesi Nedir?	76
7.4 Problemler (Kümeler)	78
8 Tam sayılar	83
8.1 Mutlak Değer	87
8.2 Problemler (Tam sayılar)	88
9 Rasyonel Sayılar	91

9.1	Ondalık Gösterim	97
9.2	Yüzdelere	99
9.3	Oran Kavramı	99
9.4	Problemler (Rasyonel Sayılar)	101
10	Cebirsel İfadeler	108
10.1	Cebirsel Kesirleri Parçalama	109
10.2	İki Tam karenin Farkı	111
10.3	Paydasında Harf Bulunan Cebirsel İfadeler	112
10.4	Problemler (Cebirsel İfadeler)	113
11	Denklem ve Denklem Çözümü	115
11.1	Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü	115
11.2	Mutlak Değerli Denklemler	119
11.3	Üslü Denklemler	119
11.4	Yüksek Dereceden Denklemler	119
11.5	Çok Bilinmeyenli Denklem Çözümü	119
11.6	Denklem Sistemlerinin Çözümü	123
11.7	Harfli Eşitsizlikler	124
11.8	Çözümleme Denklemleri	125
11.9	Aritmetik Ortalama	126
11.10	Problemler (Denklemler)	127
12	Geometri : Açılar	136
12.1	Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar	137
12.2	Üçgende Açılar	139
12.3	Üçgende Açık Kenar Bağlantıları	142
12.4	Dörtgenler	143
12.5	Çokgenler	144
12.6	Problemler (Açılar)	146
13	Geometri (Çevre ve Alan Hesaplamaları)	152
13.1	Çemberin Çevresi	152
13.2	Alan Hesaplamaları	153
13.3	Pisagor Teoremi	156
13.4	Dairenin Alanı	157
13.5	Problemler (Çevre ve Alan)	159
14	Sayma	165
14.1	Saymada Toplam Kuralı	166
14.2	Saymada Çarpım Kuralı	166
14.3	Sıralama	168
14.4	Tekrarlı Sıralamalar	171
14.5	Seçme	173
14.6	Olasılık	175
14.7	Problemler (Sayma-Sıralama-Seçme)	178
15	Yanıtlar	182

Üslü Sayılar

Alıştırma 1.1.

a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ sayısını üslü olarak yazınız.

Çözüm : 8 tane 3 çarpıldığından 3^8 olur.

b) $2^4 = a^2$ ise a doğal sayısı kaçtır?

Çözüm :

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4^2 = a^2 \text{ ise } a = 4$$

olur.

c) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = a^4$ ise a doğal sayısı kaçtır?

Çözüm :

$$(3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 9^4 \text{ ise } a = 9$$

olur.

Alıştırma 1.2.

$a = 2^6$, $b = 3^6$, $c = 4^3$, $d = 3^4$, $e = 8^2$ sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm : $4^3 = 2^6 = 8^2$ ve $4^3 = 64 < 3^4 = 81 < 3^6$ olduğundan,

$$2^6 = 4^3 = 8^2 < 3^4 < 3^6$$

olur. $a = c = e < d < b$

Alıştırma 1.3.

a) $2^6 + 3^4 + 4^0 - 2^1 = a^2$ ise a doğal sayısı kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 2^6 + 3^4 + 4^0 - 2^1 &= 64 + 81 + 1 - 2 \\ &= 144 = 12^2 \end{aligned}$$

olur.

b) a ve k doğal sayılar olmak üzere

$$2^6 + 3^4 + 4^0 - 2^1 = k \cdot a^2$$

ise $a + k$ en az kaçtır?

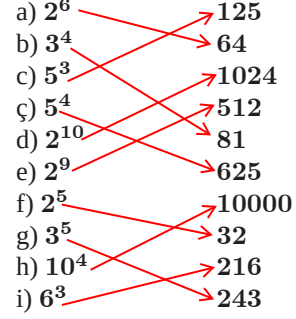
Çözüm :

$$\begin{aligned} 2^6 + 3^4 + 4^0 - 2^1 &= 144 \\ &= 1 \cdot 12^2 = 4 \cdot 6^2 = 36 \cdot 4^2 \end{aligned}$$

olduğundan en az 10 olur.

Alıştırma 1.4.

Aşağıdakileri eşleştiriniz.



Alıştırma 1.5.

$a \div b$ ifadesi $\frac{a}{b}$ şeklinde kesir olarak yazılabilir.

$$(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 1) \div (3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3)$$

ifadesi $\frac{4}{k}$ kesrine eşitse k doğal sayısı kaçtır?

Çözüm :

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 1 = 32, \quad 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 = 40$$

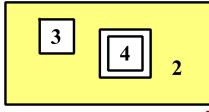
olduğundan,

$$32 \div 40 = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

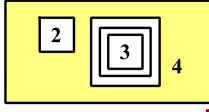
ve $k = 5$ olur.

Alıştırma 1.6.

Aşağıda şekillerle sayılar arasındaki bir ilişki vardır.

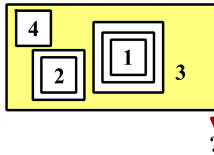


$$(2 \times 1) + (3 \times 5^1) + (4 \times 5^2) = 117$$



$$(4 \times 1) + (2 \times 5^1) + (3 \times 5^3) = 389$$

Buna göre, aşağıdaki şekile karşılık gelen sayı kaçtır?



Çözüm : Sayının dışındaki kare sayısı o sayının 5-in kaçınıcı kuvvetiyle çarpılacağını gösteriyor. O halde,

$$3 \cdot 1 + 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 = 198$$

olur.

Alıştırma 1.7.

Bir doğal sayının karesinin birler basamağı hangi rakamlar olamaz?

Çözüm : Sadece tek basamaklı sayıları kontrol etmek yeterli.

$$0^2 = 0, 1^2 = 1, 2^2 = 4, 3^2 = 9,$$

$$4^2 = 16, 5^2 = 25, 6^2 = 36,$$

$$7^2 = 49, 8^2 = 64, 9^2 = 81$$

olduğundan, 2, 3, 7, 8 olamaz.

Alıştırma 1.8.

Tüm pozitif tam sayı kuvvetlerinin birler basamağı aynı olan iki basamaklı kaç sayı vardır?

Çözüm : Sadece tek basamaklı sayıları kontrol etmek yeterli.

0'ın tüm kuvvetlerinin birler basamağı 0'dır. O halde 10, 20, ..., 90 sayılarının tüm kuvvetlerinin birler basamağı 0 olur.

1'in tüm kuvvetlerinin birler basamağı 1'dir. O halde 11, 21, ..., 91 sayılarının tüm kuvvetlerinin birler basamağı 1 olur.

5'in tüm kuvvetlerinin birler basamağı 5'tir. O halde 15, 25, ..., 95 sayılarının tüm kuvvetlerinin birler basamağı 5 olur.

6'nın tüm kuvvetlerinin birler basamağı 6'dır. O halde 16, 26, ..., 96 sayılarının tüm kuvvetlerinin birler basamağı 6 olur.

Her birinden 9'ar tane olduğuna göre, tüm kuvvetlerinin birler basamağı aynı olan 36 iki basamaklı sayı vardır.

Alıştırma 1.9.

12 tane 2 sayısının çarpımını üslü olarak kaç farklı biçimde yazabilirsiniz. Örneğin, 2^{12} veya 4^6 biçimlerinde yazabiliriz.

$$\text{Çözüm : } 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$2^{12} = 4^6 = 8^4 = 16^3 = 64^2 = 4096^1$$

biçiminde 6 şekilde yazılabilir.

Alıştırma 1.10.

$5^1 \cdot 5^{11} \cdot 5^{21}$ ifadesini 5^k şeklinde yazarsak k kaç olur?

Çözüm : Taban aynı sayı ise çarpımda üsleri toplarız.

$$5^1 \cdot 5^{11} \cdot 5^{21} = 5^{1+11+21} = 5^{33}$$

olduğundan $k = 33$ olur.

Alıştırma 1.11.

$n \in \mathbb{N}$ için $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ olarak bilinen Gauss toplam formülünü kullanarak

$$3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^{11}$$

ifadesini üslü olarak yazınız.

Çözüm : Taban aynı sayı ise çarpımda üsleri toplarız.

$$3^1 \times 3^2 \times 3^3 \times \dots \times 3^{11} = 3^{1+2+3+\dots+11}$$

olur.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$

olduğundan, yanıt 3^{66} bulunur.

Alıştırma 1.12.

Aşağıdaki ifadeleri üslü olarak daha kısa yazınız.

a) $5^2 \times 5^4 = \text{Çözüm : } 5^{2+4} = 5^6$

b) $7^4 \div 7^2 = \text{Çözüm : } 7^{4-2} = 7^2$

c) $(6 \cdot 10^2) \cdot (2 \cdot 10^2) = \text{Çözüm : } 12 \cdot 10^4$

d) $(6 \cdot 10^2) \div (2 \cdot 10^2) = \text{Çözüm : } 3$

e) $2 \cdot 10^5 \cdot 2^4 \cdot 10^6 = \text{Çözüm : } 2^5 \cdot 10^{11}$

Alıştırma 1.13.

Keloğlan $4 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^5$ çarpımını üslü olarak farklı biçimlerde yazıyor. Bunlardan hangisi hatalıdır? Nedenini bulunuz.

A) $2^2 \cdot 5^2 \cdot 10^8$ B) $100 \cdot 10^8$

C) 10^{10} D) $29 \cdot 10^8$

Çözüm :

$$\begin{aligned} 4 \cdot 10^3 \cdot 25 \cdot 10^5 &= 2^2 \cdot 10^3 \cdot 5^2 \cdot 10^5 \\ &= 2^2 \cdot 5^2 \cdot 10^8 \\ &= 10^2 \cdot 10^8 \\ &= 10^{10} \end{aligned}$$

olduğundan sadece D) hatalıdır.

Alıştırma 1.14.

Yukarıdaki örnekte verilen yöntemle siz de aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $(5^2)^4 = 5^m$ ise m kaçtır?

Çözüm : $5^{2 \cdot 4} = 5^8 = 5^m$ ise $m = 8$ olur.

b) $7^4 \cdot (7^2)^3 = 7^n$ ise n kaçtır?

Çözüm : $7^4 \cdot 7^{2 \cdot 3} = 7^{4+6} = 7^{10}$ ise $n = 10$ olur.

Alıştırma 1.15.

Aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $2^{2^3} - (2^2)^3 = ?$

Çözüm : $2^8 - 2^{2 \cdot 3} = 256 - 64 = 192.$

b) $(2^3)^{3^2} = 2^n$ ise n kaçtır?

Çözüm : $(2^3)^{3^2} = (2^3)^9 = 2^{3 \cdot 9} = 2^{27} = 2^n$ ise $n = 27.$

Alıştırma 1.16.

Aşağıdaki sayıların tamamı tam küptür. Her birinin hangi sayının küpü olduklarını bulunuz.

a) $(5^2)^3$ sayısı sayısının küpüdür.

Çözüm :

$$(5^2)^3 = 25^3$$

olduğundan 25 sayısının küpüdür.

b) $(2^3)^2$ sayısı sayısının küpüdür.

Çözüm :

$$(2^3)^2 = 2^6 = 2^2 2^2 2^2 = (2^2)^3 = 4^3$$

olduğundan 4 sayısının küpüdür.

c) $100 \cdot 2^4 \cdot 5$ sayısı sayısının küpüdür.

Çözüm : $100 = 2^2 \cdot 5^2$ yazalım.

$$100 \cdot 2^4 \cdot 5 = 2^2 5^2 \cdot 2^4 \cdot 5 = 2^6 5^3 = (2^2 5)^3 = 20^3$$

olduğundan 20 sayısının küpüdür.

d) $6 \cdot (3)^5 (4^4)$ sayısı sayısının küpüdür.

Çözüm : $4^4 = 2^{2 \cdot 4} = 2^8$ yazılırsa

$$\begin{aligned} 6 \cdot (3)^5 (4^4) &= 2 \cdot 3 \cdot 3^5 \cdot 2^8 = 2^9 \cdot 3^6 \\ &= (2^3 3^2)^3 = 72^3 \end{aligned}$$

olduğundan 72 sayısının küpüdür.

e) 5^{102} sayısı üslü sayısının küpüdür.

Çözüm : $102 = 3 \cdot 34$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$5^{102} = (5^{34})^3$$

olduğundan 5^{34} üslü sayısının küpüdür.

Alıştırma 1.17.

$n!$ sayısı n ve n 'den küçük tüm pozitif doğal sayıların çarpımını gösterir. Örneğin,

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

olur. Buna göre, $7!$ sayısının sıfırdan farklı bir tam kare olması için en küçük hangi doğal sayıyla çarpılması gerekir?

Çözüm : $6 = 2 \cdot 3$, $4 = 2 \cdot 2$ yazabiliriz.

$$\begin{aligned} 7! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 7^1 2^4 3^2 5^1 \end{aligned}$$

olduğundan tam kare olabilmesi için tüm kuvvetlerin çift sayı olması gerekir. O halde, en küçük $7^1 2^5 3^2 5^1 = 35$ sayısıyla çarpmalıyız. Bu durumda,

$$35 \cdot 7! = 7^2 2^4 3^2 5^2 = (7^1 2^2 3^1 5^1)^2 = 420^2$$

olduğundan 420'nin karesi olur.

Alıştırma 1.18.

a) İki doğal sayının karelerinin arasındaki fark 5 olabilir mi? 6 olabilir mi?

Çözüm : İki sayının kareleri arasındaki fark sayılar büyüdükçe büyür.

$$\begin{aligned} 4^2 - 3^2 &= 7, \\ 3^2 - 2^2 &= 5 \end{aligned}$$

olduğundan, iki doğal sayının karelerinin arasındaki fark 5 olabilir. 6 olamaz.

b) İki doğal sayının karelerinin arasındaki fark 2 olabilir mi? Nedenini açıklamaya çalışınız.

Çözüm : İki doğal sayının kareleri arasındaki farkın küçük olması için sayılar ardışık seçilmelidir. Ardışık olarak seçilen iki sayının kareleri farkı en küçük 1, daha sonra da 3 olabilir. 2 olması mümkün değildir. Bu fark sayılar büyüdükçe büyür.

$$1^2 - 0^2 = 1, 2^2 - 1^2 = 3,$$

Alıştırma 1.19.

a) $2^5 \cdot 5^5$ sayısını sadece bir doğal sayının üssü olarak yazınız.

Çözüm : Yukarıdaki özellik kullanılırsa

$$2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5$$

şeklinde yazılır.

b) $2^9 \cdot 5^3 \cdot 5^3$ sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm : 10 'un kuvveti şeklinde yazalım.

$$2^9 \cdot 5^6 = 2^3 \cdot (2^6 5^6) = 8 \cdot (2 \cdot 5)^6 = 8 \cdot 10^6$$

olduğundan 7 basamaklıdır.

Üslü Eşitlikler

Alıştırma 1.20.

a) $5^{11} = 5^k$ ise k kaçtır?

Çözüm : $k = 11$ olduğu açıktır.

b) $25^{11} = 5^m$ ise m kaçtır?

Çözüm : $25 = 5^2$ yazılırsa,

$$25^{11} = 5^m \Rightarrow (5^2)^{11} = 5^m \Rightarrow 5^{22} = 5^m$$

olduğundan $m = 22$ olur.

c) $25^{12} = 125^n$ ise n kaçtır?

Çözüm : $25 = 5^2$ ve $125 = 5^3$ yazılırsa,

$$25^{12} = 125^n \Rightarrow (5^2)^{12} = (5^3)^n \Rightarrow 5^{24} = 5^{3n}$$

olduğundan $3n = 24$ ve $n = 8$ olur.

Örnek 1.22. AMC8-2011

a , b , c ve d doğal sayılar olmak üzere,

$$2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d = 588$$

eşitliği sağlanıyorsa $2a + 3b + 5c + 7d$ değeri kaçtır?

Çözüm

$588 = 2 \cdot 294 = 2 \cdot 2 \cdot 147 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 49 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$ olduğundan,

$$588 = 2^2 3^1 5^0 7^2$$

yazılabilir. O halde, $a = 2$, $b = 1$, $c = 0$ ve $d = 2$ olduğundan,

$$2a + 3b + 5c + 7d = 4 + 3 + 14 = 21$$

elde edilir.

Alıştırma 1.21.

$a = 5^{12}$, $b = 3^{18}$, $c = 2^{24}$ sayılarını büyüktten küçüğe doğru sıralayınız.

Çözüm : Üsler 12, 18 ve 24. Üç üssü de tam bölen sayı 6 olduğundan üsleri 6 olacak şekilde tekrar yazalım.

$$a = 5^{12} = (5^2)^6 = 25^6,$$

$$b = 3^{18} = (3^3)^6 = 27^6,$$

$$c = 2^{24} = (2^4)^6 = 16^6$$

olduğundan $b > a > c$ olur.

Üslü Sayılarda Basamak Sayısı ve Son Rakam

Alıştırma 1.22. AMC8-2009

$4^5 \cdot 5^{10}$ çarpımı kaç basamaklı bir sayıdır?

Çözüm : Sayıyı 10'un kuvveti olarak yazmaya çalışalım.

$$\begin{aligned} 4^5 \cdot 5^{10} &= (2^2)^5 \cdot 5^{10} \\ &= 2^{10} 5^{10} \\ &= (2 \cdot 5)^{10} \\ &= 10^{10} = 10000000000 \end{aligned}$$

olduğundan 11 basamaklı olur.

Alıştırma 1.23.

a) $16 \cdot 10^7 \cdot 25 \cdot 10^4$ sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm : Sayıyı 10'un kuvveti olarak yazmaya çalışalım. $16 = 2^4$ ve $25 = 5^2$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 16 \cdot 10^7 \cdot 25 \cdot 10^4 &= 2^4 \cdot 5^2 \cdot 10^{7+4} \\ &= 2^2 \cdot (2^2 5^2) \cdot 10^{11} \\ &= 4 \cdot 10^2 10^{11} \\ &= 4 \cdot 10^{13} \end{aligned}$$

olduğundan 14 basamaklı olur.

b) $25 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^7 + 10^4$ sayısının rakamları toplamı kaçtır?

Çözüm : Sayıyı açalım.

$$\begin{aligned} &40000000 + 25000 + 10000 \\ &= 40000000 + 35000 \\ &= 40035000 \end{aligned}$$

olduğundan rakamları toplamı 12 olur.

c) $5000^5 + 10^9$ sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm :

$$5000^5 = (5 \cdot 10^3)^5 = 5^5 \cdot 10^{15} = 3125 \cdot 10^{15}$$

olduğundan ilk toplanan 19 basamaklıdır. İkinci toplanan zaten 10 basamaklı olduğu için toplama işlemi sonunda ilk toplananın basamak sayısını etkilemez.

Alıştırma 1.24.

$(200000)^5 \cdot (5000)^4$ sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm : Sayıyı 10'un kuvvetleri olarak yazalım.

$$(200000)^5 = (2 \cdot 10^5)^5 = 2^5 10^{25}$$

$$(5000)^4 = (5 \cdot 10^3)^4 = 5^4 10^{12}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (200000)^5 \cdot (5000)^4 &= 2^5 5^4 10^{25} 10^{12} \\ &= 2 \cdot (2^4 5^4) \cdot 10^{37} \\ &= 2 \cdot 10^4 \cdot 10^{37} \\ &= 2 \cdot 10^{41} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, 42 basamaklıdır.

Alıştırma 1.25. AMC8-2000

$19^{19} + 99^{99}$ sayısının birler basamağı kaçtır?

Çözüm : $19^{19} + 99^{99}$ sayısının birler basamağı ile $9^{19} + 9^{99}$ sayısının birler basamağı aynıdır. 9'un kuvvetinde birler basamağını bulmak için sadece birler basamağındaki sayıların çarpımına bakmak yeterlidir.

$$9^2 = 9 \cdot 9 = 81 \xrightarrow{\text{Birler basamağı}} 1$$

$$9^3 = 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 9 \xrightarrow{\text{Birler basamağı}} 9$$

$$9^4 = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 81 \cdot 81 \xrightarrow{\text{Birler basamağı}} 1$$

Yani, 9 sayısının kuvveti çift sayı olursa birler basamağı 1, kuvveti tek sayıysa birler basamağı 9 olacaktır. Buna göre,

$$19^{19} \xrightarrow{\text{Birler basamağı}} 9, \quad 99^{99} \xrightarrow{\text{Birler basamağı}} 9$$

olduğundan, $19^{19} + 99^{99}$ sayısının birler basamağı $9 + 9 = 18$ den 8 olarak bulunur.

Alıştırma 1.26. AMC8-2012

13^{2012} sayısının birler basamağı kaçtır?

Çözüm : Üssü yavaş yavaş artırıyoruz. " $\rightarrow$ " ile sayının birler basamağı gösterilmiştir."

$$13^1 \rightarrow 3,$$

$$13^2 \rightarrow 9,$$

$$13^3 = 13^2 13^1 \rightarrow 9 \cdot 3 \rightarrow 7$$

$$13^4 = 13^2 13^2 = 9 \cdot 9 \rightarrow 1$$

olduğundan her 13^4 sayısının birler basamağı 1 olacaktır. $2012 = 4 \cdot 503$ olduğundan, 13^{2012} sayısının birler basamağı

$$13^{2012} = \overbrace{13^4 13^4 \dots 13^4}^{503 \text{ tane } 13^4} \rightarrow 1$$

elde edilir.

Problemler (Üslü Sayılar)

Prob. 1.1 Bir sayının karesinin sıfır olması için bu sayının sıfır olması gerekir. Buna göre aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $(3 \cdot \star - 15)^2 = 0$ ise $\star$ kaçtır?

b) $(2 \cdot \blacksquare - \blacktriangle)^2 + (12 - 2 \cdot \blacktriangle)^4 = 0$ ise $\blacktriangle$ kaçtır?

Çözüm : a) Sadece 0'ın karesi 0'dır. O halde,

$$3 \cdot \star - 15 = 0 \text{ yani, } \star = 5$$

olmalıdır.

b) Bir sayının çift kuvvetlerinin toplamı sıfır ise bu sayılar ayrı ayrı sıfır olmalıdır. O halde,

$$2 \cdot \blacksquare - \blacktriangle = 0, \quad 12 - 2 \cdot \blacktriangle = 0$$

olması gerekir. Buradan $\blacktriangle = 6$ ve $2 \cdot \blacksquare - 6 = 0$ eşitliğinden $\blacksquare = 3$ olur. $\blacktriangle^6 = 6^3 = 216$ olur.

Prob. 1.2 2^{2^2+2} sayısına en küçük hangi tam kare sayı eklenirse elde edilen toplam farklı bir tam kare olur?

Çözüm :

$$2^{2^2+2} = 2^{4+2} = 2^6 = 64$$

sayısına sırasıyla tam kare ifadeler ekleyelim. 1, 5, 9, 16, 25, 36, ... eklersek, en küçük $64 + 36 = 100 = 10^2$ olması durumunda bir tam kare elde edilir. $64 + 15^2 = 17^2$ olduğundan 225 sayısı eklendiğinde de tam kare olur. Ama biz en küçük olanını arıyoruz.

Prob. 1.3 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ biçiminde tanımlanır. 7! sayısı bir k pozitif doğal sayı ile çarpıldığında tam kare, bir m pozitif doğal sayı ile çarpıldığında da bir tam küp oluyor. Buna göre, m ve k sayılarının en küçük değeri için $\frac{m}{k}$ kaçtır?

Çözüm :

$$7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

olduğundan $k = 7 \cdot 5 = 35$ ile çarpılırsa tam kare, $m = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ ile çarpılırsa tam küp olur. Böylece,

$$\frac{m}{k} = \frac{2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2}{7 \cdot 5} = 420$$

bulunur.

Prob. 1.4 $2^{2^3} \cdot (2^3)^2 \cdot 2^6 = 2^m$ olduğuna göre m doğal sayısı kaçtır?

Çözüm :

$$2^{2^3} \cdot (2^3)^2 \cdot 2^6 = 2^8 \cdot 2^6 \cdot 2^6 = 2^{20} = 2^m$$

eşitliğinden

$$m = 20$$

bulunur.

Prob. 1.5 $125 \cdot 10^3 \cdot 64 \cdot 20$ sayısı kaç basamaklıdır? Bu sayıyı m ve n pozitif doğal sayıları için $m \cdot 10^n$ şeklinde yazarsanız $m + n$ en küçük kaç olur?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 125 \cdot 10^3 \cdot 64 \cdot 20 &= 5^3 \cdot 10^3 \cdot 2^6 \cdot (2^2 \cdot 5) \\ &= (5^4 \cdot 2^4) \cdot 2^4 \cdot 10^3 \\ &= (5 \cdot 2)^4 \cdot 2^4 \cdot 10^3 \\ &= 10^4 \cdot 2^4 \cdot 10^3 \\ &= 16 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

olduğundan 9 basamaklıdır. $m + n$ en küçük $16 + 7 = 23$ olur.

Prob. 1.6 50^{50} sayısı 25^{25} sayısının n katıdır. n sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} n &= \frac{50^{50}}{25^{25}} = \frac{(2 \cdot 5^2)^{50}}{5^{50}} = \frac{2^{50} 5^{100}}{5^{50}} \\ &= \frac{2^{50} 5^{50} 5^{50}}{5^{50}} = 2^{50} 5^{50} \\ &= 10^{50} \end{aligned}$$

olduğundan 51 basamaklıdır.

Prob. 1.7 n bir pozitif tam sayı olmak üzere,

$$2^{2^n} + 1$$

biçiminde yazılan sayılara **Fermat sayıları** denir. En küçük üç Fermat sayısının toplamını bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} n = 1 \text{ ise, } 2^{2^1} + 1 &= 2^2 + 1 = 4 + 1 = 5, \\ n = 2 \text{ ise } 2^{2^2} + 1 &= 2^4 + 1 = 17, \\ n = 3 \text{ ise } 2^{2^3} + 1 &= 2^8 + 1 = 257 \end{aligned}$$

olduğundan en küçük üç Fermat sayısının toplamı

$$5 + 17 + 257 = 279$$

bulunur.

Prob. 1.8

$$(2^3 5^2)^2 \cdot (5^3 2^2)^3$$

sayısı kaç basamaklıdır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} (2^3 5^2)^2 \cdot (5^3 2^2)^3 &= 2^6 5^4 \cdot 5^9 2^6 \\ &= 2^{12} 5^{13} \\ &= 5 \cdot 2^{12} 5^{12} \\ &= 5 \cdot (2 \cdot 5)^{12} \\ &= 5 \cdot 10^{12} \end{aligned}$$

olduğundan 13 basamaklı olduğu bulunur.

Prob. 1.9 1^{2016} , 2^{2017} , 3^{2018} , 4^{2019} , 5^{2020} sayılarının kaçı tam kare değildir?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 1^{2016} &= 1^2 \rightarrow \text{tam kare,} \\ 2^{2017} &\rightarrow \text{tam kare değil,} \\ 3^{2018} &= (3^{1009})^2 \rightarrow \text{tam kare,} \\ 4^{2019} &= 2^{4038} = (2^{2019})^2 \rightarrow \text{tam kare,} \\ 5^{2020} &= (5^{1010})^2 \rightarrow \text{tam kare} \end{aligned}$$

Prob. 1.10 $17^{17} + 19^{19}$ sayısının birler basamağı kaçtır?

Çözüm : Önce 17^{17} nin birler basamağını bulalım.

$$\begin{aligned} 17^1 &\rightarrow 7, 17^2 \rightarrow 9, \\ 17^3 &= 17^1 17^2 \rightarrow 7 \cdot 9 \rightarrow 3 \\ 17^4 &= 17^2 17^2 \rightarrow 9 \cdot 9 \rightarrow 1 \end{aligned}$$

olduğundan, $17^{16} = (17^4)^4$ sayısının birler basamağı 1 ve 17^{17} sayısının birler basamağı 7 olur : $17^{17} \rightarrow 7$.

Şimdi de, 19^{19} un birler basamağını bulalım.

$$19^1 \rightarrow 9, 19^2 \rightarrow 1,$$

olduğundan, $19^{18} = (19^2)^9$ sayısının birler basamağı 1'dir. O halde, 19^{19} un birler basamağı 9 olur : $19^{19} \rightarrow 9$.

Sonuç olarak : $17^{17} + 19^{19}$ sayısının birler basamağı

$$17^{17} + 19^{19} \rightarrow 7 + 9 = 16 \rightarrow 6$$

elde edilir.

Prob. 1.11 34^{2025} sayısının birler basamağı kaçtır?

Çözüm : " $\rightarrow$ " ile sayının son rakamını gösterelim.

$$34^1 \rightarrow 4,$$

$$34^2 \rightarrow 6,$$

$$34^3 = 34^1 34^2 \rightarrow 4 \cdot 6 \rightarrow 4,$$

$$34^6 = 34^2 34^4 \rightarrow 6 \cdot 6 \rightarrow 6$$

olduğundan, 34 'ün bir kuvvetinin birler basamağı 34 'ün çift kuvvetlerinde 6, tek kuvvetlerinde 4 olur. O halde,

$$34^{2025} \rightarrow 4$$

elde edilir.

Prob. 1.12 Kendisinden ve 1'den başka pozitif böleni olmayan 1'den büyük doğal sayılara **asal sayı** denir. m sayısı 2'den büyük bir doğal sayı olmak üzere, $2^m - 1$ sayısı **asal** ise,

$$2^{m-1} (2^m - 1)$$

sayısına **mükemmel sayı** denir. Buna göre, mükemmel sayıların küçükten büyüğe sıralanmasıyla elde edilen sayı örüntüsünün dördüncü terimi kaç olur?

Çözüm :

$$m = 2 \text{ ise } 2^1(2^2 - 1) = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$m = 3 \text{ ise } 2^2(2^3 - 1) = 4 \cdot 7 = 28,$$

$$m = 5 \text{ ise } 2^4(2^5 - 1) = 16 \cdot 31 = 496,$$

$$m = 7 \text{ ise } 2^6(2^7 - 1) = 64 \cdot 127 = 8128.$$

Prob. 1.13 İki pozitif doğal sayının karelerinin toplamı da bir doğal sayının karesi ise, bu üç sayıya **pisagor üçlüsü** denir. Yani, $a^2 + b^2 = c^2$ ise (a, b, c) doğal sayılarına pisagor üçlüsü denir. Örneğin, $3^2 + 4^2 = 5^2$ olduğundan, 3, 4, 5 bir pisagor üçlüsüdür.

Aşağıdakilerden hangileri pisagor üçlüsüdür?

a) (6, 8, 10)

b) (5, 12, 13)

c) (9, 12, 15)

d) k bir pozitif tam sayı olmak üzere $(3k, 4k, 5k)$.

e) (33, 44, 55)

Çözüm :

a) $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$ olduğundan (6, 8, 10) bir pisagor üçlüsüdür.

b) $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$ olduğundan (5, 12, 13) bir pisagor üçlüsüdür.

c) $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$ olduğundan (9, 12, 15) bir pisagor üçlüsüdür.

d) k bir pozitif tam sayı olmak üzere

$$(3k)^2 + (4k)^2 = 9k^2 + 16k^2 = 25k^2 = (5k)^2$$

olduğundan $(3k, 4k, 5k)$ bir pisagor üçlüsüdür.

e) $(33, 44, 55) = (3 \cdot 11, 4 \cdot 11, 5 \cdot 11)$ olduğundan d) seçeneğindeki özellik kullanılırsa $(33, 44, 55)$ üçlüsünün de bir pisagor üçlüsü olduğu görülür.

Prob. 1.14 $(m, 15, 17)$ bir pisagor üçlüsü ise m doğal sayısı kaçtır?

Çözüm :

$$m^2 + 15^2 = 17^2$$

eşitliği sağlanmalıdır.

$$m^2 + 225 = 289 \Rightarrow m^2 = 64$$

olması gerekir. Yani $m = 8$ olursa $(m, 15, 17)$ bir pisagor üçlüsü olur.

Doğal Sayılarda İşlemler ve İşlem Önceliği

Alıştırma 2.1.

$$(4 + 2^3 \cdot 2 + 2^0) \div (2^2 - 1)$$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm : Önce üslü ifadeleri hesaplamalıyız.

$$(4 + 2^3 \cdot 2 + 2^0) \div (2^2 - 1) = (4 + 8 \cdot 2 + 1) \div (4 - 1)$$

Şimdi parantez içindeki çarpmaları yapacağız.

$$= (4 + 16 + 1) \div 3 = 21 \div 3 = 7$$

elde edilir.

Alıştırma 2.2.

$$S = (6 + 2^3 \cdot (2 + 2^0) + 2) \div 2^2 + 3 \cdot 2$$

ise S sayısını hesaplayınız.

Çözüm : Önce üslü ifadeleri hesaplamalıyız.

$$S = (6 + 2^3 \cdot (2 + 2^0) + 2) \div 2^2 + 3 \cdot 2$$

$$= (6 + 8 \cdot (2 + 1) + 2) \div 4 + 3 \cdot 2$$

$$= (6 + 8 \cdot 3 + 2) \div 4 + 6$$

$$= (6 + 24 + 2) \div 4 + 6$$

$$= 32 \div 4 + 6 = 8 + 6$$

eşitliğinden $S = 14$ bulunur.

Alıştırma 2.3.

$$32 + 31 + \dots + 2 + 1 - 1 - 2 - \dots - 28 - 29$$

işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm : Bir sayıdan kendisini çıkarırsak 0 olur.

$$33 + 31 + \dots + 2 + 1 - 1 - 2 - \dots - 28 - 29$$

işlemini

$$(1 - 1) + (2 - 2) + \dots + (29 - 29) + 30 + 31 + 32$$

şeklinde yazarsak, geriye $30 + 31 + 32 = 93$ kalır.

Alıştırma 2.4.

Her biri 37'şer sayının toplamı olan A ve B sayıları

$$A = 21 + 22 + 23 + \dots + 57$$

$$B = 13 + 14 + 15 + \dots + 49$$

olduğuna göre, $A - B$ işleminin sonucu kaçtır?

Çözüm : $A - B$ ifadesini

$$(21 - 13) + (22 - 14) + (23 - 15) + \dots + (57 - 49)$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan, 37 tane 8 toplamı elde edilir.

$$8 + 8 + \dots + 8 + 8 = 37 \cdot 8 = 296$$

bulunur.

Alıştırma 2.5.

$10^{100} - 73$ sayısının rakamları toplamı kaçtır?

Çözüm :

$$100 - 73 = 27,$$

$$1000 - 73 = 927,$$

$$10000 - 73 = 9927$$

olduğundan,

$$10^{100} - 73 = \underbrace{999\dots927}_{98 \text{ tane } 9}$$

elde edilir. Rakamları toplamı da $98 \cdot 9 + 7 + 2 = 891$ bulunur.

Alıştırma 2.6.

$32A000B - 9999$ işleminin sonucundaki sayının rakamlarıyla eksilen sayının rakamları aynı ise, $A + B$ en fazla kaç olabilir?

Çözüm : Madem eksilen sayı ile sonucun rakamları aynı,

$$\begin{array}{r} 32A000B \\ - 9999 \\ \hline 32B000A \end{array}$$

biçiminde olabilir. Burada $A - 1 = B$ ve $10 + B - 9 = A$ olmalıdır. Yani, $A = B + 1$ olmalıdır. Buna göre, $B = 8$ ise $A = 9$ alınabilecek en büyük değerler olur ve $A + B = 17$ bulunur.

Alıştırma 2.7.

$n!$ sayısı $n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ şeklinde tanımlanır. Buna göre, A ve B pozitif doğal sayıları için

$$3A + 7B = 5!$$

olduğuna göre aşağıdaki sayıların hangisi kesinlikle çift sayıdır?

I. $A \cdot B + 2$

II. $A + 2B$

III. $A + B$

IV. $A + 2B + 3$

V. $A \cdot B + 1$

Çözüm : $3A + 7B = 5!$ eşitliğine göre sağ taraf çift sayı olduğundan, A tek sayı olursa B sayısı da tek sayı olmalıdır. A çift sayı olursa B sayısı da çift sayı olmalıdır. Buna göre,

I. $A \cdot B + 2$ değeri A ve B tek ise çift sayı olmayabilir.

II. $A + 2B$ değeri A ve B tek sayı ise çift sayı olmayabilir.

III. $A + B$ değeri **daima çift sayı olur.**

IV. $A + 2B + 3$ değeri A, B tek ise çift sayı, A, B çift ise tek sayı olur.

V. $A \cdot B + 1$ değeri A ve B çift ise tek sayı olur.

Doğal Sayılarda En Az - En Fazla Problemleri

Bu bölümde, "doğal sayılar arasındaki işlemlere göre en az ve en fazla değer hangi durumlarda elde edilebilir?" sorularından örnekler vereceğiz.

Alıştırma 2.8.

6 farklı **doğal sayının** toplamı 60'tır. Bu sayıların en küçüğü en fazla kaç olabilir?

Çözüm : $60 \div 6 = 10$ olduğundan sayıların bir kısmı 10'dan büyük bir kısmı küçük alınmalıdır.

$$8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 63$$

olduğundan, en küçüğü 8 olamaz. 7 olabilir mi?

$$7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 15 = 60$$

alınırsa, en küçüğü 7 olacaktır.

Alıştırma 2.9.

Toplamları 21 olan iki pozitif doğal sayının çarpımı

a) en fazla kaç olabilir?

b) en az kaç olabilir?

Çözüm :

a) Toplamları belirli olan iki sayının çarpımının en büyük olması için sayılar birbirine en yakın seçilmelidir : $10 \cdot 11 = 110$ elde edilecek en büyük çarpımdır.

b) Toplamları belirli olan iki pozitif sayının çarpımının en küçük olması için sayılar birbirine en uzak seçilmelidir : $1 \cdot 20 = 20$ elde edilecek en küçük çarpımdır.

Alıştırma 2.10.

Çarpımları 48 olan iki pozitif doğal sayının toplamı

a) en fazla kaç olabilir? b) en az kaç olabilir?

Çözüm :

a) Çarpımları belirli olan iki pozitif doğal sayının toplamının en büyük olması için sayılar birbirine en uzak seçilmelidir. $48 = 1 \cdot 48$ için $1 + 48 = 49$ elde edilecek en büyük toplamdır.

b) Çarpımları belirli olan iki pozitif doğal sayının toplamının en küçük olması için sayılar birbirine en yakın seçilmelidir. $48 = 6 \cdot 8$ için $6 + 8 = 14$ elde edilecek en küçük toplamdır.

Alıştırma 2.11.

Toplamları 10 olan birbirinden farklı pozitif doğal sayıların çarpımı en fazla kaç olabilir?

Çözüm :

Çarpımın en fazla olması için toplananları 1'den büyük ve mümkün olduğu kadar fazla sayıda almalıyız.

$$10 = 2 + 3 + 5$$

olduğundan çarpımları en fazla $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ olur.

Alıştırma 2.12.

Toplamları 16 olan doğal sayıların çarpımı en fazla kaç olabilir?

Çözüm : Çarpımın en fazla olması için toplananları mümkün olduğu kadar 3 almalıyız. Ama geriye 4 kalırsa $1 \cdot 3$ yerine $2 \cdot 2$ almamız sayının daha büyük olmasını sağlar.

$$16 = 3 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2$$

olduğundan çarpımları en fazla $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 324$ olur.

Alıştırma 2.13.

Bir öğrenci grubunda her bir öğrencinin **şanslı numara** olarak kabul ettiği bir pozitif doğal sayı vardır. Gruptaki tüm öğrencilerin şanslı numaralarının toplamı 30'dur. Birbirinden bağımsız olarak aşağıdakileri yanıtlayınız.

- Şanslı numaraların çarpımı en fazla kaç olabilir? (Üslü sayı olarak yazınız.)
- Bu grupta sadece 5 öğrenci varsa şanslı numaraların çarpımı en fazla kaç olabilir? (Üslü sayı olarak yazınız.)
- Bu grupta sadece 5 öğrenci varsa şanslı numaralarının çarpımı en az kaç olabilir?
- Bu grupta şanslı numaralar farklı ise çarpımları en fazla kaç olabilir?
- Bu grupta şanslı numaralar farklı ise çarpımları en az kaç olabilir?

Çözüm : a) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^{10}$ olabilir.

b) 5 öğrenci varsa, $6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 30$ için çarpım en fazla $6^5 = 7776$ olur.

c) 5 öğrenci varsa, $1 + 1 + 1 + 1 + 26 = 30$ için çarpım en az 26 olur.

d) $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 27$ olduğundan şanslı numara sayısı 6'dan fazla olamaz. Buna göre,

$$2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 30$$

için çarpım en fazla 8064 olur.

e) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 9 = 30$ için çarpım en az $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 = 6480$ olur.

Hatırlatma : Hem düzden, hem de tersten okunuşu aynı olan sayılara **palindrom sayı** denir. Örneğin,

$$575, 1661, 54745$$

sayıları birer palindrom sayıdır.

Alıştırma 2.14.

1919 sayısından büyük olan en küçük palindrom sayı 1991 sayısıdır. 1919 sayısından küçük olan en büyük palindrom sayı kaçtır?



Çözüm : 1919 sayısından bir küçük olan palindrom sayısı : 1881 sayısıdır.

Garantileme ve Güvercin Yuvası İlkesi Soruları

Alıştırma 2.15.

a) İçinde 15 sarı ve 16 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç top çekilmelidir ki içerisinde 1 sarı top garanti bulunsun?

Çözüm :

a) En kötü durum çekilen 16 topun da mavi olması durumudur. O halde, $16 + 1 = 17$ top çekilirse garanti 1 sarı top olacaktır.

b) İçinde 15 sarı ve 16 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç top çekilmelidir ki içerisinde 3 sarı top garanti bulunsun?

Çözüm :

b) En kötü durum 16 mavi ve 2 sarı top çekilme durumudur. O halde, $16 + 2 + 1 = 19$ top çekilirse garanti 3 sarı top olacaktır.

c) İçinde 15 sarı , 5 mavi ve 10 siyah top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç tane top çekilmeli ki içinde 1 mavi top garanti bulunsun?

Çözüm :

c) En kötü durum 15 sarı ve 10 siyah top çekilme durumudur. O halde, $15 + 10 + 1 = 26$ top çekilirse garanti 1 mavi top olacaktır.

d) İçinde 15 sarı, 10 siyah ve 7 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç top çekilmelidir ki içinde 1 mavi veya 1 sarı top garanti bulunsun?

Çözüm :

d) En kötü durum 10 topun siyah olması durumudur. $10 + 1 = 11$ top çekilirse mutlaka 1 tanesi ya mavi ya da sarı olacaktır.

e) İçinde 15 sarı, 10 siyah ve 6 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç top çekilmelidir ki içinde 1 mavi ve 1 sarı top garanti bulunsun?

Çözüm : e) En kötü durum 10 topun siyah ve 15 topun sarı olması durumudur. Yani, hiç mavi top yoktur. $10 + 15 + 1 = 26$ top çekilirse mutlaka 1 tane mavi top olacaktır. Böylece, 1 mavi ve 1 sarı topun olacağı garanti olur.

Alıştırma 2.15.

f) İçinde 15 sarı, 10 siyah ve 6 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç top çekilmelidir ki içinde 3 mavi ve 3 sarı top garanti bulunsun?

Çözüm : f) En kötü durum 10 topun siyah ve 15 topun sarı olması durumudur. Yani, hiç mavi top yoktur. $10 + 15 + 3 = 28$ top çekilirse mutlaka 3 tane mavi top olacaktır. Böylece, 3 mavi ve 3 sarı topun olacağı garanti olur.

g) İçinde 15 sarı, 7 siyah ve 6 mavi top bulunan bir torbadan aynı anda en az kaç top çekilmelidir ki içinde 2 mavi ve 3 siyah top garanti bulunsun?

Çözüm : g) En kötü durum 15 topun sarı ve 7 topun siyah olması durumudur. Yani, hiç mavi top yoktur. $15 + 7 + 2 = 24$ top çekilirse mutlaka 2 tane mavi top olacaktır. Böylece, 2 mavi ve 3 siyah topun olacağı garanti olur.

Alıştırma 2.16.

a) Bir sınıfta en az kaç kişi olmalı ki, aynı burçtan olan iki öğrenci olsun?

Çözüm :

a) 12 tane burç var. Eğer 13 öğrenci olursa aynı burçtan olan iki öğrenci mutlaka bulunacaktır.

b) Bir okulda 8 seçmeli ders vardır. Bir sınıfta en az kaç kişi olmalı ki, aynı seçmeli dersi alan 5 öğrenci kesinlikle bulunsun?

Çözüm :

b) En kötü durum $4 \times 8 = 32$ kişi olması ve her dersi 4 öğrencinin seçmesidir. 33 kişi olursa, bir dersi seçen 5 öğrenci garanti bulunur.

c) Bir sınıftaki öğrencilerin en sevdiği yemekler kebab, balık ve mantıdır. Bu sınıfta az kaç öğrenci olmalıdır ki, aynı yemeği seven 10 öğrenci kesinlikle olsun?

Çözüm : c) En kötü durum $3 \times 9 = 27$ kişi olması ve her 9 kişinin farklı bir yemek sevmesidir. 28 kişi olursa, bir yemeği seven 10 öğrenci garanti bulunur.

Alıştırma 2.17. AJHSME-1994

Bir sakız makinesinde 9 kırmızı, 7 beyaz ve 8 mavi sakız vardır. Bir kişinin aynı renkten dört sakız elde etmek için satın alması gereken sakız sayısı en az kaç olmalıdır?

Çözüm : Bir kişi üç rengin her birinden üç sakız alırsa 9 sakızı olur. 10-uncu sakız üç renkten birini dördüncü aynı renk yapacaktır. Yanıt 10.

Alıştırma 2.19. ♣

a) Bir okulda öğrencilerin okul numaraları 5 rakamlıdır. Bu okulda en az kaç öğrenci olmalıdır ki, numaralarının farkı 1919'un katı olan 2 öğrenci mutlaka bulunsun?

Çözüm : En kötü durum 1919 numaranın tamamının 1919 ile bölündüğünde farklı kalanı vermesidir. 1920 sayı olursa aynı kalanı veren 2 sayı mutlaka olur ve bunların farkı 1919 ile tam bölünür.

b) Bir okulda öğrencilerin okul numaraları 5 rakamlıdır. Bu okulda en az kaç öğrenci olmalıdır ki, herhangi ikisinin numaralarının farkı 19'un katı olan 3 öğrenci mutlaka bulunsun?

Çözüm : En kötü durum 19'a bölündünden aynı kalanı veren en fazla 2 sayı olmasıdır. Yani, $19 \cdot 2 = 38$ sayı var ve her kalanı sadece 2 sayı veriyor. O halde, $38 + 1 = 39$ sayı olursa, 19'a bölündüğünde aynı kalanı veren 3 sayı mutlaka olur ve bunların herhangi ikisinin farkı 19 ile tam bölünür.

Alıştırma 2.18.

a) Bir torbada 5 mavi, 6 yeşil ve 8 kırmızı bilye vardır. Arda en az kaç bilye çekmelidir ki, aynı renkten en az 3 tane bilye kesinlikle olsun?

Çözüm :

a) En kötü durum 2 mavi, 2 yeşil ve 2 kırmızı bilye çekilmesi durumudur. 7 tane olursa aynı renkten en az üç bilye olur.

b) Bir torbada 5 mavi, 6 yeşil ve 8 kırmızı bilye vardır. Arda en az kaç bilye çekmelidir ki, her renkten en az 1 tane bilye kesinlikle olsun?

Çözüm :

b) En kötü durum 6 yeşil ve 8 kırmızı bilye çekilmesi durumudur. $14 + 1 = 15$ tane olursa her bir renkten en az bir bilye olur.

c) Bir torbada 5 mavi, 6 yeşil ve 8 kırmızı bilye vardır. Arda en az kaç bilye çekmelidir ki, 2 kırmızı 3 mavi bilye kesinlikle olsun?

Çözüm : c) En kötü durum 6 yeşil, 8 kırmızı ve 2 mavi bilye çekilmesi durumudur. $6 + 8 + 2 + 1 = 17$ tane olursa 2 kırmızı 3 mavi bilye kesinlikle bulunur.

Büyük Sayıları 10'un Kuvveti Cinsinden Yazma

Alıştırma 2.20.

$$(10^3 + 55) \cdot 10^{10} - 1$$

sayısının rakamları toplamı kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} (10^3 + 55) \cdot 10^{10} - 1 &= 1055 \overbrace{000 \dots 0}^{10 \text{ tane } 0} - 1 \\ &= 1054 \overbrace{999 \dots 9}^{10 \text{ tane } 9} \end{aligned}$$

olduğundan, rakamları toplamı $1 + 5 + 4 + 90 = 100$ olur.

Alıştırma 2.21.

$$(10^5 + 555) \cdot 10^5 - 5$$

sayısının rakamları toplamı kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} (10^5 + 555) \cdot 10^5 - 5 &= 10055500000 - 5 \\ &= 10055499995 \end{aligned}$$

olduğundan, rakamları toplamı

$$1 + 5 + 5 + 5 + 4 + 36 + 5 = 56$$

olur.

Alıştırma 2.22.

$$\overbrace{777 \dots 777}^{10 \text{ tane } 7}$$

ifadesinin 9 katının 10'un kuvveti cinsinden hesaplayınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 777 \dots 777 &= \frac{7}{9} \cdot 999 \dots 999 \\ &= \frac{7}{9} (10^{10} - 1) \end{aligned}$$

olduğundan, bu ifadenin 9 katı

$$7 \cdot (10^{10} - 1)$$

olur.

Alıştırma 2.23.

$P = 2222 \times 4444 \times 8888$ sayısı hangi sayının küpüdür?

Çözüm :

$$\begin{aligned} P &= 2222 \times 4444 \times 8888 \\ &= (2 \cdot 1111) \cdot (4 \cdot 1111) \cdot (8 \cdot 1111) \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 1111^3 \\ &= 4^3 \cdot 1111^3 \\ &= (4444)^3 \end{aligned}$$

olur.

İşlemlerde Harflerle Gösterilen Rakamları Bulma

Alıştırma 2.24.

Bir önceki örnekte O harfi tek sayı olsaydı U harfi kaç olurdu?

Çözüm :

T = 7 ise, O harfi tek ise 5 olabilir. O harfi 5 ise R = 0 olur. Diğer yandan, F = 1 olacaktır. W + W toplamı iki basamaklı olması gerekir ki, T + T + 1 = 15 olsun. Buna göre, O = 5 ve T = 7 olduğu için W = 5 ve 7 olamaz.

W = 6 ise U = 3 olabilir.

W = 8 ise U = 7 olur. U = T olduğundan bu olamaz.

W = 9 ise U = 9 olur. W = U olduğundan olamaz.

O halde, U = 3 olabilir.

Ortak Paranteze Alarak Hesaplama

★ Aşağıdaki sorularda üslü sayıların bazı özelliklerini de kullanacağız. Yani,

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a^1 a^2, \quad a^{n+m} = a^n a^m$$

olduğunu kullanacağız.

Alıştırma 2.25.

Aşağıdaki ifadeleri ortak çarpan parantezine alarak hesaplayınız.

a) $1919 \cdot 76 - 1919 \cdot 13 + 1919 \cdot 37 =$

Çözüm : 1919 ortak parantezine alırsak

$$1919 \cdot (76 - 13 + 37) = 1919 \cdot 100 = 191900$$

bulunur.

b) $111^2 - 111 \cdot 11 =$

Çözüm : 111 ortak parantezine alırsak,

$$111 \cdot (111 - 11) = 111 \cdot 100 = 11100$$

bulunur.

c) $5^2 \cdot 17^2 - 17^2 \cdot 4^2 =$

Çözüm : 17^2 ortak parantezine alırsak,

$$17^2 \cdot (5^2 - 4^2) = 17^2 \cdot 9 = 289 \cdot 9 = 2601$$

bulunur.

d) $19^3 + 19^2 =$

Çözüm : 19^2 ortak parantezine alırsak, $19^3 = 19^2 19$ olduğundan

$$19^2 \cdot (19 + 1) = 19^2 \cdot 20 = 361 \cdot 20 = 7220$$

bulunur.

e) $11^4 + 11^3 + 11^2 =$

Çözüm : 11^2 ortak parantezine alırsak,

$$\begin{aligned} 11^2 \cdot (11^2 + 11^1 + 1) &= 121 \cdot (121 + 11 + 1) \\ &= 121 \cdot 133 = 16093 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 2.26.

$7 \cdot 13^{11} + 5 \cdot 13^{11} + 13^{11} = 13^k$ ise k kaçtır?

Çözüm : Sol tarafta 13^{11} ortak parantezine alırsak, sol taraf

$$7 \cdot 13^{11} + 5 \cdot 13^{11} + 13^{11}$$

$$= 13^{11} \cdot (7 + 5 + 1)$$

$$= 13^{11} \cdot 13 = 13^{12}$$

olur. $13^k = 13^{12}$ eşitliğinden $k = 12$ bulunur.

Alıştırma 2.27.

$\frac{7 \cdot 10^8 - 4 \cdot 10^6}{10^6}$ ifadesini, kesrin payında 10^6 ortak parantezine alıp sonra kesiri sadeleştirerek hesaplayınız.

Çözüm : Kesrin payında 10^6 parantezine alalım. $10^8 = 10^2 10^6$ olduğunu unutmayın.

$$\frac{7 \cdot 10^8 - 4 \cdot 10^6}{10^6} = \frac{10^6 \cdot (7 \cdot 10^2 - 4)}{10^6}$$

eşitliğinde pay ve paydadaki 10^6 çarpan olduğundan sadeleşebilir. Buradan, $7 \cdot 10^2 - 4 = 700 - 4 = 696$ elde edilir.

Alıştırma 2.28.

$b + c + d = 6$ ise $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a$ ifadesi a sayısının kaç katıdır?

Çözüm : $a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a$ ifadesinde a ortak parantezine alırsak

$$a \cdot (b + c + d + 1)$$

olur. $b + c + d = 6$ yazarsak, $a \cdot (6 + 1) = 7a$ elde edilir. $7a$ sayısı a sayısının 7 katıdır.

Alıştırma 2.29.

$A = 10^3$ olmak üzere, $A^3 + A^2 + A^1$ ifadesi A sayısının kaç katıdır?

Çözüm : $A^3 + A^2 + A^1$ ifadesinde A^1 ortak parantezine alırsak $A \cdot (A^2 + A + 1)$ olur. $A = 10^3$ ise,

$$A^2 = (10^3)^2 = 10^6 = 1000000$$

olduğundan,

$$A^2 + A + 1 = 1000000 + 1000 + 1 = 1001001$$

elde edilir. Yani, $A^3 + A^2 + A^1 = 1001001 \cdot A$ olur.

Alıştırma 2.30.

$a^5 + 13 = n^8$ ise $(a^8 + 13a^3) \div n^8 + 11 - a^3$ ifadesini hesaplayınız.

Çözüm : $(a^8 + 13a^3) \div n^8 + 11 - a^3$ ifadesinde önce

$$(a^8 + 13a^3) \div n^8 = \frac{a^8 + 13a^3}{n^8}$$

bölmesi yapılmalıdır. Bu kesrin payında a^3 parantezine alalım ve $a^5 + 13 = n^8$ yazalım.

$$\frac{a^3(a^5 + 13)}{n^8} = \frac{a^3 n^8}{n^8} = a^3$$

olur. Böylece, $(a^8 + 13a^3) \div n^8 = a^3$ yazılırsa

$$a^3 + 11 - a^3 = 11$$

bulunur.

Alıştırma 2.31.

Bir tek sayıyla bir çift sayının toplamının bir tek sayı olduğunu bir önceki örnekteki gibi gösteriniz.

Çözüm : A bir tek sayı ise $A = 2n + 1$ ve B bir çift sayı ise $B = 2m$ biçiminde yazılabilirler. Bunların toplamı ise,

$$\begin{aligned} A + B &= 2n + 1 + 2m \\ &= 2n + 2m + 1 \\ &= 2(n + m) + 1 \end{aligned}$$

olur. Yani, $A + B$ sayısı $(n + m)$ sayısının 2 katının 1 fazlasıdır ve daima bir tek sayıdır.

Alıştırma 2.32.

$x + 2y = 3$ olmak üzere,

$$(a - b) \cdot (x + y) + (a - b) \cdot 5 + (a - b) \cdot y$$

ifadesinin $a - b$ ifadesinin kaç katı olduğunu bulunuz.

Çözüm : $a - b$ parantezine alırsak,

$$(a - b)(x + y + 5 + y) = (a - b)(x + 2y + 5)$$

olur. $x + 2y = 3$ yazarsak,

$$(a - b)(3 + 5) = 8(a - b)$$

bulunur. Yani, $a - b$ 'nin 8 katı olur.

Alıştırma 2.33.

$a \cdot (a + b + c)$ ifadesini dağıttınız. $a \cdot a = a^2$ yazabileceğimizi unutmayınız.

Çözüm : $a \cdot (a + b + c)$ ifadesini dağıtırsak,

$$\begin{aligned} a \cdot (a + b + c) &= a \cdot a + a \cdot b + a \cdot c \\ &= a^2 + a \cdot b + a \cdot c \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 2.34.

$a^2 \cdot (a + a^2 - 1)$ ifadesini dağıttınız.

Çözüm : $a^2 \cdot (a + a^2 - 1)$ ifadesini dağıtırsak,

$$\begin{aligned} a^2 \cdot (a + a^2 - 1) &= a^2 \cdot a + a^2 \cdot a^2 - a^2 \cdot 1 \\ &= a^3 + a^4 - a^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 2.35.

$$\underbrace{777 \dots 777}_{10 \text{ tane } 7} + \frac{7}{9}$$

ifadesinin 9 katını 10'un kuvveti cinsinden hesaplayınız.

Alıştırma 2.36. ♣

$1 + 2 + 3 + \dots + 10 = A$ ve

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = B$ olduğuna göre

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + \dots + 10 \cdot 9$$

toplamının $A - B$ olduğunu gösteriniz.

($10 \cdot 9 = 10 \cdot (10 - 1)$ biçiminde ayırınız.)

Çözüm : $1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + \dots + 10 \cdot 9$ ifadesinin her bir terimindeki küçük olan sayıyı büyüğün 1 eksiği olarak yazabiliriz. Sonra dağıtacağız.

$$1 \cdot 0 = 1 \cdot (1 - 1) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1$$

$$2 \cdot 1 = 2 \cdot (2 - 1) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1$$

$$3 \cdot 2 = 3 \cdot (3 - 1) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1$$

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (4 - 1) = 4 \cdot 4 - 4 \cdot 1$$

⋮

$$10 \cdot 9 = 10 \cdot (10 - 1) = 10 \cdot 10 - 10 \cdot 1$$

Şimdi bunları taraf tarafa toplarsak sağ taraf

$$(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) - (1 + 2 + \dots + 10) = B - A$$

elde edilir.

Alıştırma 2.37.

$(5^5 + 5^8) \cdot (5^4 + 5)$ çarpımından $5^6 (1 + 5^6)$ çıkarıp 2'ye bölersek 5'in kaçınıcı kuvveti elde edilir?

Çözüm :

$$(5^5 + 5^8) \cdot (5^4 + 5) = 5^5 \cdot 5^4 + 5^5 \cdot 5 + 5^8 \cdot 5^4 + 5^8 \cdot 5$$

$$= 5^9 + 5^6 + 5^{12} + 5^9$$

olduğundan, $5^6 (1 + 5^6) = 5^6 + 5^{12}$ çıkarılırsa, geriye

$$5^9 + 5^9 = 2 \cdot 5^9$$

kalır. Yarısı da 5^9 bulunur.

Basit Çözümleme Problemleri**Alıştırma 2.38.**

5..4.....8 sayısı 11 basamaklı bir sayıdır. 4'ün sağında 7 rakam vardır. Buna göre, 5 rakamının basamak değeriyle 4 rakamının basamak değerinin farkı 10^7 sayısının kaç katıdır?

Çözüm : 5...4...8 sayısında 5'in sağında 10 basamak olduğundan, 5'in basamak değeri

$$5 \cdot 10^{10}$$

olur. 4'ün sağında 7 rakam varsa, 4'ün basamak değeri

$$4 \cdot 10^7$$

olur. Bunların farkı

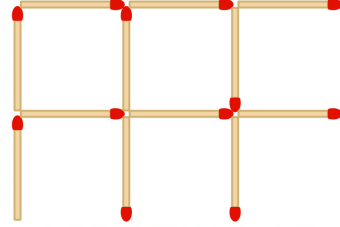
$$5 \cdot 10^{10} - 4 \cdot 10^7 = 10^7 (5 \cdot 10^3 - 4)$$

$$= 4996 \cdot 10^7$$

elde edilir. Yani, bu fark 10^7 sayısının 4996 katıdır.

Problem Çözümü**Alıştırma 2.39.**

35 kibrit çöpü boyunda, 45 kibrit çöpü genişliğinde bir ızgara yapmak isteyen Keloğlan'ın kaç kibrit çöpüne ihtiyacı vardır?



Çözüm : Küçük bir ızgara için hesaplama yaparak ipucu bulmaya çalışalım. 2×3 biçimindeki bir ızgara için, yani, 2 kibrit çöpü yüksekliği ve 3 kibrit çöpü genişliği için $2 + 1 = 3$ yatay satır ve $3 + 1 = 4$ dikey sütun olmalıdır. Dolayısıyla da $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 17$ kibrit çöpü kullanılır. Buna göre, 35 kibrit çöpü yüksekliğinde ve 45 kibrit çöpü genişliğinde bir ızgara için, 36 yatay satır ve 46 dikey sütun olması gerekir. Böylece,

$$35 \cdot 46 + 45 \cdot 36 = 3230$$

kibrit çöpü kullanılır.

Alıştırma 2.40.

Bir adam parasının tamamıyla 5 kalem, 7 silgi veya 3 kalem, 8 silgi alabiliyor. Bu adam parasının tamamıyla kaç kalem alabilir?

Çözüm : Adamın parasını P ile gösterelim.

$$P = 5K + 7S = 3K + 8S$$

olduğundan,

$$5K - 3K = 8S - 7S$$

eşitliğinden, $S = 2K$ elde edilir. Yani, bir silginin fiyatı 2 kalemin fiyatı kadarmış. O halde,

$$P = 5K + 7S = 5K + 7(2K) = 5K + 14K = 19K$$

olur. Yani 19 kalem alabilir.

Aıştırma 2.41.

Bir sınava giren öğrenciler 10, 20, 30, 40 ve 50 puanlarını almışlardır. Sınava 32 öğrenci katılmış ve bu puanların her birini en az 3 kişi almıştır. Aynı puanı alan en fazla kaç kişi olabilir?

Çözüm : 10, 20, 30, 40 ve 50 puanlarının her birini en az üç kişi almışsa $3 \cdot 5 = 15$ kişinin puanları belirlidir. Geriye

$$32 - 15 = 17$$

kişi kalır. 17 kişinin tamamının aynı notu aldığını kabul edersek aynı notu alan en fazla kişi bulunmuş olur. Böylece aynı notu almış en fazla

$$17 + 3 = 20$$

kişi olabilir.

Aıştırma 2.42. ♣

Bir okulda 40 kişilik ve 50 kişilik sınıflar vardır. Bu okulda 820 kişi varsa en az kaç sınıf olabilir?

Çözüm : 40 kişilik a tane sınıf, 50 kişilik b tane sınıf olsun.

$$40 \cdot a + 50 \cdot b = 820$$

olacak şekilde en az $a + b$ toplamını bulmalıyız. En az sınıf için b sayısını yani 50 kişilik sınıf sayısını en fazla almalıyız. $b > 16$ olamaz.

$b = 16$ olursa $40 \cdot a + 50 \cdot 16 = 820$ eşitliğinden

$$40 \cdot a = 20$$

olur ki bu mümkün değildir.

$b = 15$ olursa $40 \cdot a + 50 \cdot 15 = 820$ eşitliğinden,

$$40 \cdot a = 820 - 750 = 70$$

olur. $40 \cdot a = 70$ olamaz.

$b = 14$ olursa $40 \cdot a + 50 \cdot 14 = 820$ eşitliğinden,

$$40 \cdot a = 820 - 700 = 120 \text{ ise } a = 3$$

olabilir. O halde, bu okulda en az $14 + 3 = 17$ sınıf olabilir.

Problemler (Doğal Sayılarda İşlemler)

Prob. 2.1 Rakamları toplamı 15 olan dört basamaklı altıncı büyük sayı kaçtır?

Çözüm :

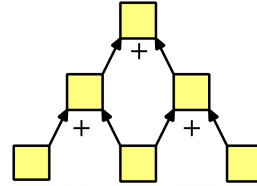
Rakamları toplamı 15 olan dört basamaklı en büyük sayı

$$9600$$

olduğu açıktır. Koşula uygun seçilebilecek ikinci büyük sayı **9510**, üçüncü büyük sayı **9501**, dördüncü büyük sayı **9420**, beşinci büyük sayı **9411** ve altıncı büyük sayı **9402** bulunur.

Prob. 2.2 AMC8-2006

Aşağıdaki şekilde en alttaki karelerin her birine birbirinden farklı bir basamaklı bir pozitif doğal sayı yerleştiriliyor. Sonra okların gösterdiği karelere, altındaki karelerde olan sayılar toplanarak yazılıyor. Bu işleme devam edilerek en üstteki karedeki sayı elde ediliyor. En üstteki karede olabilecek en büyük ve en küçük sayılar arasındaki fark kaçtır?



Çözüm :

Altındaki karelerdeki sayılar sırasıyla A , B ve C olsun. İkinci satırdaki karelerde $A + B$ ve $B + C$ ve en üstteki karede $A + 2B + C$ olur.

En küçük toplamı elde etmek için $B = 1$, $A = 2$ ve $C = 3$ alınır.

En büyük toplamı elde etmek için $B = 9$, $A = 7$ ve $C = 8$ alınır.

Yani en küçük toplam : $A + 2B + C = 2 + 2 + 3 = 7$, en büyük toplam : $7 + 18 + 8 = 33$

olduğundan istenen fark $33 - 7 = 26$ bulunur.

Prob. 2.3 Toplamları 19 olan üç pozitif doğal sayının çarpımı

a) en fazla kaç olabilir? b) En az kaç olabilir?

Çözüm : a) Sadece 3 sayı olduğundan çarpımın en fazla olması için toplananları mümkün olduğu birbirine yakın almalıyız. $19 = 6 + 6 + 7$ alınırsa çarpım en fazla $6 \cdot 6 \cdot 7 = 252$ olur.

b) En az çarpım için toplananların iki tanesini 1 alabiliriz.

$$19 = 17 + 1 + 1$$

olduğundan çarpım en az $17 \cdot 1 \cdot 1 = 17$ olur.

Prob. 2.4 Rakamları birbirinden farklı üç basamaklı 5 farklı **doğal sayının** toplamı 1000'dir. Bu sayılardan en küçüğü en fazla kaç olabilir?

Çözüm :

$1000 \div 5 = 200$ olduğundan, en küçük sayının en fazla değeri için sayıları 200'e yakın seçmemiz gerekir. Nedenini bir kaç denemeden sonra görebilirsiniz. Buna göre, rakamları farklı denildiği için 200'den bir büyük ve bir küçük sayı alarak dengelemeye çalışalım.

Kabul edelim ki, bu sayıların en küçüğü en fazla 197 olsun. Bu durumda,

$$197 + 198 + 201 + 203 = 799$$

olursa son sayı $1000 - 799 = 201$ olur. Fakat 201 zaten var. Yani en küçük sayı 197'den küçük olması gerekir. En küçük sayı olarak 196 alırsak

$$196 + 197 + 198 + 201 + 208 = 1000$$

için koşul sağlanır. Yani, bu sayıların en küçüğü en fazla 196 olabilir.

Prob. 2.5 Rakamları birbirinden farklı üç basamaklı 5 farklı **doğal sayının** toplamı 1000'dir. Bu sayılardan en büyüğü en az kaç olabilir?

Çözüm :

En büyük sayının en az değeri için de sayıları 200'e yakın seçmemiz gerekir. En büyük sayı en az 204 olabilir mi diye bakalım.

$$204 + 203 + 201 + 198 + 194 = 1000$$

için sağlanır. Acaba en büyük sayı daha da küçük olan 203 olabilir mi?

$$203 + 201 + 198 + 197$$

alınırsa beşinci sayı 201 olmak zorundadır ama bunu seçmiştik. Yani 203 olamaz. Yanıt 204'tür.

Prob. 2.6 AJHSME-1991

Birkaç öğrenci arka arkaya üç yarışta yarışıyor. Bir öğrenci bir yarış kazanırsa 5 puan, ikinci bitirirse 3 puan ve üçüncü bitirirse 1 puan alıyor. Yarışmaların tamamı birbirinden bağımsızdır. Bir öğrencinin diğer öğrencilerden daha fazla puan alarak yarış kazanmasını garantilemek için üç yarışta kazanması gereken puan en az kaçtır?

Çözüm :

Bir öğrencinin iki farklı şekilde 11 puan kazanabilir : $5 + 5 + 1$ veya $5 + 3 + 3$ biçiminde. Bu 11 puanın birinci olmasını garantilemeye yetmediğini gösterir. 13 puan almanın ise bir tek yolu var :

$$5 + 5 + 3 = 13.$$

Bu durumda, başka bir kişinin alabileceği maksimum puan $5 + 3 + 3 = 11$ olur. O halde, 13 puan alan üç yarış sonunda en fazla puan almayı garantiler.

Prob. 2.7 Rüzgar'ın babannesi 5 günde 3 yarım hap alıyor. Aldığı ilaç 60 hap içeriyorsa, tüm haplar kaç günde biter?

Çözüm : Rüzgar'ın babannesi 5 günde 3 yarım hap alıyorsa, 10 günde 3 tam hap alır.

$$60 \div 3 = 20$$

olduğundan,

$$20 \cdot 10 = 200$$

gün sonra haplar biter.

Prob. 2.8 Selin kızamık aşısı kuyruğundadır. Selin bu kuyrukta baştan 19'uncu, sondan ise 21'in sırada olduğuna göre bu kuyrukta kaç kişi vardır?

Çözüm : Selin'den önce 18, Selin'den sonra 20 kişi olduğundan, kuyrukta Selin dahil

$$18 + 20 + 1 = 39$$

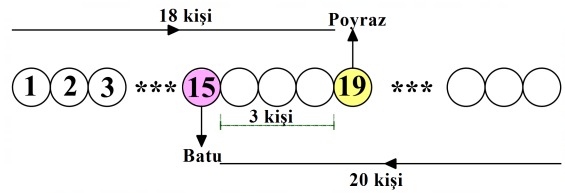
kişi vardır.

Prob. 2.9 Poyraz ve Batu yemek kuyruğundadır. Poyraz bu kuyrukta baştan 19'uncu, Batu ise sondan ise 21'in sıradadır. Aralarında 3 kişi olduğuna göre bu kuyrukta en az kaç kişi vardır?

Çözüm : En az kişi olması için Batu Poyraz'dan önce olmalıdır. Poyraz 19'uncu sırada ise ve aralarında 3 kişi varsa Batu 15'inci sıradadır. Batu sondan 21-inci sırada ise Batu'dan sonra 20 kişi daha vardır. Yani kuyrukta en az

$$20 + 15 = 35$$

kişi vardır.



Prob. 2.10 Alp her basketbol maçında 4 veya 5 basket atmaktadır. Her gün maça çıktığı bir haftada toplam 33 basket attığına göre, kaç gün 5 basket atmıştır?

Çözüm : Bir hafta boyunca Alp'in 5 basket maçların sayısı n , 5 basket attığı maçların sayısı da $7 - n$ olsun. Toplam 33 basket attığına göre,

$$5n + 4(7 - n) = 33$$

olması gerekir. Bu eşitlikten,

$$5n + 28 - 4n = 33$$

olur. Buradan,

$$n = 33 - 28 = 5$$

bulunur. Yani, 5 basket attığı gün sayısı 5'tir.

Prob. 2.11 AMC8-2008

Oya öğretmen, sınıfındaki her öğrenciden kenar uzunlukları doğal sayı olan ve çevresi 50 birim olan bir dikdörtgen çizmesini istiyor. Öğrencilerinin hepsi çizdikleri dikdörtgenin alanını hesaplıyor. Dikdörtgenlerin mümkün olan en büyük ve en küçük alanları arasındaki fark kaçtır?

Çözüm : Dikdörtgenin çevresi 50 ise uzun ve kısa kenarlarının uzunlukları toplamı 25 olur. Alanının en büyük olması için uzunluklar birbirine yakın seçilmelidir. Buna göre, en büyük alanlı dikdörtgenin alanı :

$$12 \times 13 = 156$$

olur. Alanının en küçük olması için uzunluklar birbirine uzak seçilmelidir. Buna göre, en küçük alanlı dikdörtgenin alanı :

$$1 \times 24 = 24$$

olabilir. Bunların arasındaki farkı $156 - 24 = 132$ olur.

Prob. 2.12 Bir okulda 10 spor dalı vardır ve her öğrenci sadece 1 spor dalını seçebiliyor. Okulda en az kaç öğrenci olmalıdır ki, aynı spor dalını seçen 10 öğrenci kesinlikle bulunsun?

Çözüm :

En kötü durum her spor dalını 9'ar kişinin seçmesi durumudur. Bu durumda,

$$10 \cdot 9 = 90$$

kişi olması gerekir. Eğer, $90 + 1 = 91$ kişi olursa aynı spor dalını seçen 10 öğrenci mutlaka bulunur.

Prob. 2.13 İçinde 10 sarı, 5 mavi ve 7 kırmızı top bulunan bir torbadan rasgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az 5'inin sarı, en az 3'ünün mavi ve en az 4'ünün kırmızı olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir?

Çözüm :

En kötü durum 10 sarı, 7 kırmızı ve 2 mavi top çekilme durumudur. Böylece,

$$10 + 7 + 2 = 19$$

top çekilmiş olur. 20-nci top kesinlikle mavi olacağından 3 mavi top çekilmiş olur. Yani, 20 top çekilirse, en az 5'inin sarı, en az 3'ünün mavi ve en az 4'ünün kırmızı olacağı garantidir.

Prob. 2.14 Bir torbada 10 kırmızı, 11 mavi ve 12 yeşil bilye vardır. Alp en az kaç bilye çekmelidir ki 3 yeşil bilye mutlaka olsun?

Çözüm : En kötü durum 10 sarı, 11 mavi ve 2 yeşil top çekilme durumudur. Böylece,

$$10 + 11 + 2 = 23$$

top çekilmiş olur. 24-üncü top kesinlikle yeşil olacağından 3 yeşil top çekilmiş olur. Yani, 24 top çekilirse, en az 3'ünün yeşil olacağı garantidir.

Prob. 2.15 İçinde 13 kırmızı ve 8 mavi top bulunan bir torbadan rasgele bir miktar top çekiliyor. Çekilen topların en az 6'sının kırmızı ve en az 4'ünün mavi olmasını garanti etmek için en az kaç top çekilmelidir? (UAMO - 2000)

Çözüm : En kötü durum 13 kırmızı, 3 mavi top çekilme durumudur. Böylece,

$$13 + 3 = 16$$

top çekilmiş olur. 17-nci top kesinlikle mavi olacağından 4 mavi top çekilmiş olur. Yani, 17 top çekilirse, en az 6'sının kırmızı ve en az 4'ünün mavi olması garanti olur.

Prob. 2.16 Bir torbada 5 mavi, 6 yeşil ve 8 kırmızı bilye vardır. Arda en az kaç bilye çekmelidir ki, her renkten en az 2 tane bilye kesinlikle olsun.

Çözüm : En kötü durum 8 kırmızı, 6 yeşil ve 1 mavi top çekilme durumudur. Böylece,

$$8 + 6 + 1 = 15$$

top çekilmiş olur. 16-nci top kesinlikle mavi olacağından, 16 top çekilirse her bir toptan 2 tane çekilmiş olur.

Prob. 2.17 Öğretmen her öğrencinin bir kağıda bir rakam yazmasını istiyor. Öğretmen sınıfta aynı rakamı yazan 4 kişinin kesinlikle olacağını biliyor. Bu sınıfta en az kaç kişi vardır?

Çözüm : 10 rakam var. En kötü durum 30 kişinin olup her rakam 3'er kez yazılmış olması durumudur. Ama 31'inci kişi mutlaka dördüncü olarak aynı rakamı yazan kişi olacaktır.

Prob. 2.18 Bir okulda her öğrenci iki basamaklı bir sayıyı sırt numarası olarak okul formasının sırtına yazdırıyor. Bu okulda 365 öğrenci varsa, aynı numarayı yazan en fazla kaç kişi kesinlikle bulunur?

Çözüm : İki basamaklı 90 sayı vardır. En kötü durum

$$360 \div 90 = 4$$

olduğundan her numaranın 4 kişi tarafından yazılması durumudur. Fakat, 361 kişi olduğu an aynı numarayı yazan 5 kişi kesinlikle olacaktır. Yanıt 5.

Prob. 2.19 Bir okulda beş öğrenci, okul başkanlığı için yarışıyor. Oy kullanan 306 kişi var. Birinin seçimi kazanması için gereken oy sayısı en az kaçtır?

Çözüm :

$$305 \div 5 = 61$$

olduğundan, en kötü durum 300 kişinin olup her birinin 61'er oy alması durumudur. Fakat, 306 kişi olması durumunda mutlaka biri en az 62 oy alarak kazanacaktır.

Prob. 2.20 ♣ Bir okulda hafta içi her gün en fazla 7 saatlik ders yapılabilir.

a) Bu okulda her hafta 146 ders yapılacaksa, ders programının yapılabilmesi için bir haftada en az kaç dersliğe ihtiyaç vardır?

b) 146 saat ders yapılabilen en az derslik durumunda, bir haftada kaç saate kadar bu derslikler yeterli olur?

Çözüm : Hafta içi en fazla $7 \cdot 5 = 35$ saatlik ders yapılıyor. 140 ders için,

$$\frac{140}{35} = 4$$

derslik yeterli olur. Fakat, 141-inci ders için 5-inci bir dersliğe ihtiyaç olur. Yani, 146 ders yapılacaksa en az 5 dersliğe ihtiyaç vardır. $35 \cdot 5 = 175$ olduğundan, 175 saate kadar 5 derslik yeterli olur.

Prob. 2.21 ♣ Bir sayı, rakamları yer değiştirilerek elde edilen iki basamaklı farklı iki sayının çarpımı olarak yazılabiliyorsa bu sayıya **kanka Sayı** diyelim. Örneğin, 252 sayısı bir kanka sayıdır. Çünkü,

$$12 \cdot 21 = 252$$

eşitliği vardır. 1000'den küçük kaç kanka sayı vardır? Bunları bulunuz.

Çözüm : En küçük kanka sayı 252'dir. Şimdi, diğerlerine bakalım. Önce rakamlarından biri 1 olanları bulalım.

$$\begin{aligned} 13 \times 31 &= 403, \\ 14 \times 41 &= 574, \\ 15 \times 51 &= 765, \\ 16 \times 61 &= 976, \\ 17 \times 71 &= 1207 > 1000 \end{aligned}$$

Demek ki Kanka sayıda 7 rakamı olamaz. Şimdi, rakamlarından biri 2 olanları bulalım.

$$\begin{aligned} 23 \times 32 &= 736 \\ 24 \times 42 &= 1008 > 1000 \end{aligned}$$

O halde, rakamlardan biri 2 ise, diğer rakam 3'den fazla olamaz. Sonuç olarak, 6 tane kanka sayı vardır.

Prob. 2.22 Ege her gün bir önceki güne göre 40 tane daha fazla soru çözerek kitabındaki tüm soruların tamamını 5 günde çözüyor. Ege'nin 3. gün çözdüğü soru sayısı, ilk gün çözdüğü soru sayısının 2 katı olduğuna göre Ege toplam kaç soru çözmüştür?

Çözüm : Ege ilk gün n tane soru çözsün. Bu durumda, 5 günde

$n + (n + 40) + (n + 80) + (n + 120) + (n + 160) = 5n + 400$ soru çözmüş olur. Ege 3-üncü gün $n + 80$ soru çözmüş ve bu sayı ilk gün çözdüğü soru sayısının 2 katıymış. Yani $n + 80 = 2n$ yazılabilir. Buradan, $n = 80$ elde edilir. O halde, Ege toplam $5 \cdot 80 + 400 = 800$ soru çözmüştür.

Prob. 2.23 AJHSME-1988

Aşağıdaki 3×3 tablonun her karesine en fazla bir sayı yazılabilir. Herhangi üç dikey, yatay ve çapraz karelerde sayı bulunmaması koşuluyla en fazla kaç sayı yerleştirilebilir?

Çözüm : 6 sayıyı, asal köşegendeki tüm kareleri boş bırakarak istenen şekilde aşağıdaki gibi yerleştirebiliriz.

	*	*
*		*
*	*	

Güvercin yuvası ilkesine göre, 7 sayı yerleştirildiğinde mutlaka 3 sayı olan bir satır olmak zorundadır. O halde, istenen yanıt 6'dır.

Prob. 2.24 Bir tam kare sayının birler basamağı olabilen rakamlarla oluşturulan, rakamları birbirinden farklı en büyük doğal sayı kaçtır?

Çözüm : Bir tam kare sayının birler basamağı,

$$0, 1, 4, 5, 6 \text{ ve } 9$$

olabilir. Bu sayılarla yazılabilecek rakamları birbirinden farklı en büyük doğal sayı 965410 olur.

Prob. 2.25 Bir sınıftaki kız öğrenci sayısı erkek öğrenci sayısının 3 katından 7 eksiktir. Sınıfa 3 erkek öğrenci daha gelirse, kız öğrenci sayısı erkek öğrenci sayısının 2 katından 2 eksik oluyor. Buna göre, başlangıçta sınıfta kaç öğrenci vardı?

Çözüm : Erkek öğrenci sayısını E, kız öğrenci sayısını K ile gösterelim. Verilenlerden,

$$K = 3E - 7 \text{ ve } K = 2(E + 3) - 2$$

oldüğundan,

$$3E - 7 = 2(E + 3) - 2 \Rightarrow 3E - 7 = 2E + 6 - 2$$

eşitliğinden $E = 11$ olur. Buradan, $K = 3 \cdot 11 - 7 = 26$ ve sınıf mevcudu $26 + 11 = 37$ bulunur.

Prob. 2.26 ♣ Bir kitabın sayfa numaraları 1'den itibaren 1'er artmaktadır. Padişahın Keloğlan'a 5 rakamını sadece 18 kez kullanması koşuluyla hazırladığı kitap en fazla kaç sayfa olabilir?



Çözüm : En fazla 84 sayfa olabilir.

5, 15, 25, 35, 45

numaralarında 5 kez 5 rakamı kullanılır.

50, 51, 52, ..., 59

numaralarında 11 kez 5 rakamı kullanılır. 17. kez 65 ve 18. inci kez 75'de 5 rakamı kullanılabilir. 85 olamayacağından en fazla 84 olabilir.

Prob. 2.27 Berk 124 sayfalık bir kitabı okumaya başlıyor. İlk gün bir miktar okuduktan sonra ikinci gün 16 sayfa daha okursa geriye kalan sayfa sayısı toplam okuduğu sayfa sayısının 2 katından 10 fazla olacaktır. Buna göre ilk gün kaç sayfa okumuştur?

Çözüm : Berk'in ilk gün okuduğu sayfa sayısı x olsun. İkinci gün 16 sayfa daha okursa geriye

$$124 - x - 16$$

sayfa kalacaktır. Kalan sayfa sayısı toplam okuduğu sayfa sayısı olan $x + 16$ 'nın 2 katından 10 fazla ise,

$$124 - x - 16 = 2(x + 16) + 10$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 108 - x &= 2x + 32 + 10 \Rightarrow 108 - x = 2x + 42 \\ &\Rightarrow 108 - 42 = 3x \\ &\Rightarrow 66 = 3x \end{aligned}$$

olduğundan $x = 22$ bulunur.

Prob. 2.28 Alper, Tuğra ve Berk 7100 TL'yi paylaşıyorlar. Alper Tuğra'dan 300 TL fazla, Tuğra Berk'ten 500 TL eksik alıyor. Daha sonra Alper Berk'e 200 TL veriyor, Tuğra'dan da 300 TL alıyor. En son durumda, Alper'in parası Tuğra'nın parasından ne kadar fazla olur?

Çözüm :

$$A = T + 300, \quad T = B - 500$$

ve $A + T + B = 7100$ olduğundan,

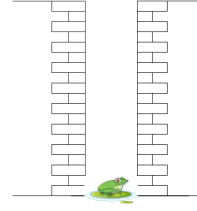
$$T + 300 + T + T + 500 = 7100$$

eşitliğinden, $T = 2100$ bulunur.

Alper	Tuğra	Berk
2400	2100	2600
$2400 - 200 + 300$	$2100 - 300$	$2600 + 200$

Böylece, $2500 - 1800 = 700$ TL fazla olduğunu buluruz.

Prob. 2.29 ♣ Bir kurbağa 27 metrelik bir kuyudan çıkmaya çalışıyor. Kuyunun ağzından çıkıncaya kadar her zıplayışında 3 metre zıplayıp 1 metre aşağıya kayıyor. Kurbağa kuyudan en az kaç zıplayıpta çıkabilir?



Çözüm : Kurbağa son 3 metreye ve son zıplayışa kadar her zıplamadan sonra 1 metre düşerek sadece 2 metre yukarı çıkabilir. O halde, 12 zıplama sonunda

$$2 \cdot 12 = 24$$

metre yukarı çıkar. Son zıplayışında 3 metre zıplayıp kuyudan çıkar. Yani, 13 zıplamada kuyudan çıkabilir.

Prob. 2.30 Bir satıcı 4 tanesini 75 TL'ye aldığı kavunların 3 tanesini 100 TL'ye satmıştır. Satış sonunda 1750 TL kar ettiğine göre kaç kavun satmıştır?

Çözüm : Kavunların 3 tanesinin alış, 4 tanesinin satış fiyatını biliyoruz. O halde 12 tanesinin satış ve alış fiyatını hesaplayarak çözüme ulaşabiliriz.

Kavunların 4 tanesini 75 TL'ye alıyorsa 12 tanesini $75 \cdot 3 = 225$ TL'ye alır.

Kavunların 3 tanesini 100 TL'ye satıyorsa 12 tanesini $100 \cdot 4 = 400$ TL'ye satar.

Yani 12 kavun satışından

$$400 - 225 = 175 \text{ TL}$$

kar eder. $1750 \div 175 = 10$ olduğundan, 10 defa 12 kavun satmalıdır. Buna göre, toplam

$$10 \cdot 12 = 120$$

kavun satması gerekir.

Bölme ve Bölünebilme

Alıştırma 3.1.

Aşağıdaki bölme işlemlerine göre $A + B + C$ toplamı en az kaç olabilir?

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline & 5 \\ \hline 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} B & C \\ \hline & 6 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Çözüm :

İkinci bölmeden başlayalım. Kalan 5 olduğuna göre C en küçük 6 olabilir. Buradan,

$$B = 6 \cdot 6 + 5 = 41$$

elde edilir. O halde birinci bölmeden de

$$A = 5 \cdot 41 + 6 = 211$$

olur. Sonuç olarak $A + B + C$ en az

$$211 + 41 + 6 = 258$$

olur.

Alıştırma 3.2.

Aşağıdaki bölme işlemlerine göre,



sayılarının toplamı en az kaç olabilir?

$$\begin{array}{r|l} \text{Heart} & \text{Star} \\ \hline & 5 \\ \hline 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} \text{Star} & \text{Sun} \\ \hline & 7 \\ \hline 4 & \end{array}$$

Çözüm : İkinci bölmeye göre en küçük 5 olabilir. Böylece,

$$\text{Star} = 7 \cdot 5 + 4 = 39$$

olur. Buradan,

$$\text{Heart} = 5 \cdot 39 + 6 = 201$$

elde edilir.

Alıştırma 3.3.

Aşağıdaki bölme işlemine göre, ve değerlerinin toplamı en az kaçtır?

$$\begin{array}{r|l} \text{Blue Square} + 5 & \text{Yellow Triangle} - 3 \\ \hline & \text{Yellow Triangle} \\ \hline 6 & \end{array}$$

Çözüm : Bölen kalandan büyük olmalı. En küçük

$$\text{Yellow Triangle} - 3 = 7$$

olabilir. Buradan $\text{Yellow Triangle} = 10$ elde edilir. O halde,

$$\text{Blue Square} + 5 = 10 \cdot 7 + 6$$

eşitliğinden $\text{Blue Square} = 71$ bulunur. Blue Square ve Yellow Triangle değerlerinin toplamı en az 81 olur.

Alıştırma 3.4.

Rakamları birbirinden farklı BAC üç basamaklı sayısı 11 ile bölündüğünde, bölüm 12 ve kalan A ise $A + B + C$ kaçtır?

Çözüm : Verilenlerden,

$$BAC = 132 + A$$

yazılabilir. Buradan,

$$A = 3$$

olması gerekir ki $BAC = 135$ ve $A + B + C = 9$ olur.

Çarpanlar ve Katlar

Alıştırma 3.5.

48 sayısının kaç çarpanı vardır. Çarpanlarından kaç tane karedir?

Çözüm : 48 sayısının çarpanları :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48

olmak üzere 10 tanedir. Tam kare olanlar : 1, 4 ve 16'dır.

Alıştırma 3.6.

Keloğlan, $\boxed{N} \rightarrow$ ifadesiyle N sayısının pozitif tam sayı çarpanlarının sayısını gösteriyor.. Örneğin,

$$\boxed{10} \rightarrow = 4$$

olur. Çünkü, 10'un çarpanları 1, 2, 5 ve 10'dur. Buna göre aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $\boxed{30} \rightarrow$

Çözüm : a) 30'un pozitif tam sayı çarpanları 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 ve 30 olduğundan

$$\boxed{30} \rightarrow = 8$$

olur.

b) $\boxed{\boxed{30} \rightarrow} \rightarrow$

Çözüm : b) 8'in pozitif tam sayı çarpanları 1, 2, 4 ve 8 olduğundan

$$\boxed{\boxed{30} \rightarrow} \rightarrow = \boxed{8} \rightarrow = 4$$

elde edilir.

c) $\boxed{6} \rightarrow \times \boxed{7} \rightarrow \rightarrow$

Çözüm : c) 6'nın pozitif tam sayı çarpanları 1, 2, 3, 6 ve 7'nin pozitif tam sayı çarpanları 1, 7 olduğundan

$$\boxed{6} \rightarrow \times \boxed{7} \rightarrow \rightarrow = \boxed{4 \times 2} \rightarrow = \boxed{8} \rightarrow = 4$$

bulunur.

Alıştırma 3.7.

A, B, C ve D doğal sayıları için

$$A \cdot B = 39$$

$$B \cdot C = 65$$

$$C \cdot A = 15$$

eşitliğini sağlayan kaç (A, B, C) üçlüsü vardır?

Çözüm : $A \cdot B = 39 = 3 \cdot 13$ ve $B \cdot C = 65 = 5 \cdot 13$ olduğundan, B sayısı hem 39 hem de 65'in çarpanı olması, yani $B = 13$ olması gerekir. Buradan,

$$A = 3 \text{ ve } C = 5$$

elde edilir. Yani, sadece (A, B, C) = (3, 13, 5) üçlüsü vardır.

Alıştırma 3.8.

12 tane pozitif bölene olan bir n sayısının pozitif bölenlerinden iki tanesi 14 ve 35'tir. Buna göre, n sayısı en az kaçtır?

Çözüm : 14 ve 35 sayıları n sayısının pozitif bölenleri ise,

$$1, 2, 7, 5, 2 \cdot 5 = 10, 2 \cdot 7 \cdot 5 = 70$$

sayıları da pozitif bölenler. Böylece $n = 70$ olursa pozitif bölen sayısı 8 olur. Fakat bölen sayısı 12 denilmiş. O halde, n'nin başka çarpanları da olmalıdır. En küçük sayıyı aradığımız için,

$$n = 70 \cdot 2 = 140$$

alınırsa, pozitif bölenler

$$\{1, 2, 4, 5, 7, 10, 14, 20, 28, 35, 70, 140\}$$

olmak üzere 12 tane olur ve koşul sağlanır.

Alıştırma 3.9.

321, 322, 323, ..., 1001 sayılarından kaç tanesi 11'in katıdır ama 13'ün katı değildir?

Çözüm : $321 = 11 \cdot 29 + 2 = 319 + 2$ olduğundan 1,2,...,320 sayılarından 29 tanesi 11'in katıdır.

$1001 = 11 \cdot 91$ olduğundan 1,2,...,1001 sayılarından 91 tanesi 11'in katıdır.

O halde, 321, 322, 323, ..., 1001 sayılarından $91 - 29 = 62$ tanesi 11'in katı olur. Bu sayılardan 13'ün katı olanları çıkarmalıyız. Yani,

$$13 \cdot 11 = 143$$

sayısının katları çıkarılmalıdır. Yani,

$$143 \cdot 3, 143 \cdot 4, 143 \cdot 5, 143 \cdot 6, 143 \cdot 7$$

sayıları çıkarılmalıdır. Yanıt : $62 - 5 = 57$ bulunur.

Alıştırma 3.10.

5 ve 9'un katı olup, 27'nin katı olmayan 1000'den küçük kaç sayı vardır?

Çözüm : 5 ve 9'un katı olan sayılar :

$$45 = 45 \cdot 1, \quad 90 = 45 \cdot 2, \quad \dots, \quad 990 = 45 \cdot 22$$

olmak üzere 22 tanedir. Fakat $5 \cdot 27 = 135$ 'in katları olanları çıkarmalıyız.

$$135 \cdot 1, \dots, 135 \cdot 7$$

olmak üzere 7 sayı çıkarılırsa, $22 - 7 = 15$ elde edilir.

Alıştırma 3.11. ♣

Rakamları çarpımı 30 olan kaç tane 4 basamaklı çift sayı bulunabilir?

Çözüm : $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan 4 basamaklı sayının rakamları 1, 2, 3, 5 veya 1, 1, 5, 6 olabilir. Sayı çift olması gerektiği için son rakamı 2 veya 6 olması gerekir. Böylece, son rakam 2 olursa

$$1352, 1532, 3152, 3512, 5132, 5312$$

olmak üzere 6 sayı, son rakam 6 olursa,

$$1156, 1516, 5116$$

olmak üzere 3 sayı olabilir. O halde, istenen şekilde 9 sayı vardır.

Alıştırma 3.12. ♣

Aşağıda verilen eşitliklerde her harf farklı bir rakamı göstermekte ve bir kelimenin değeri bu rakamları çarparak hesaplanmaktadır.

Kelime	Değer
TÜRK	84
KAR	140
TAŞ	30

ŞART kelimesinin değeri hangi sayılar olabilir?

Çözüm : ŞART kelimesinin harflerinde TAŞ olduğu için değeri TAŞ kelimesinin değerinin bir katı olması gerekir.

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \text{ ise } \text{TÜRK} = 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7 = 1 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 7$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \text{ ise } \text{KAR} = 4 \cdot 5 \cdot 7$$

olduğundan, A= 5 olmalıdır. Yani, R= 4, K= 7 veya R= 7, K= 4 olabilir. Buradan,

$$\text{ŞART} = R \cdot \text{TAŞ}$$

eşitliğinden, ŞART kelimesinin değeri ya $4 \cdot 30 = 120$ veya $7 \cdot 30 = 210$ olabilir. Ayrıca, T = 1, Ş= 6 olduğu görülebilir.

Alıştırma 3.13.

1, 2, 3, 4, ..., 50 sayılarından hiçbir sayı bir diğerinin 5 katı olmayacak şekilde bir grup sayı seçilecektir. Bu seçilecek sayı grubunda en fazla kaç sayı olabilir?

Çözüm : Bu sayılar arasında 5'in katı olan 10 sayı vardır.

$$5, 10, 15, \dots, 50$$

sayıları çıkarılırsa geriye $50 - 10 = 40$ sayı kalır. Bu 40 sayının hiçbirisi bir diğerinin 5 katı olamaz. 5 ve 10 zaten çıkarıldığı için $5 \cdot 5 = 25$ ve $10 \cdot 5 = 50$ 'nin çıkarılmasına gerek yoktu. Bu sayıların biri diğerinin 5 katı olmadığı için her ikisini de tekrar ekleyebiliriz. Böylece, $40 + 2 = 42$ sayı olabilir.

Alıştırma 3.14.

Öğrenciler yuvarlak bir masa etrafında içinde 188 adet şeker bulunan bir çantayı dolaştırırlar. Her kişi çantayı alıp bir şeker aldıktan sonra çantayı bir sonraki kişiye verir. Alp, Berk ve Mete diğerlerinden 1 fazla şeker aldığına göre masadaki öğrenci sayısı en az kaç olabilir? Alp kaç şeker almıştır?

Çözüm : Sadece 3 kişi fazla şeker aldığına göre, $188 - 3 = 185$ şeker olsaydı herkes eşit sayıda şeker alacaktı. 185'in 3'ten büyük en küçük çarpanı 5 olduğundan, öğrenci sayısı 5 olmalıdır. O halde, Alp, Berk ve Mete

$$\frac{185}{5} + 1 = 38 \text{'er}$$

şeker almışlardır.

Bölünebilme Kuralları

Alıştırma 3.15.

Aşağıdaki ifadeleri matematiksel olarak yazınız.

a) 11 sayısı 132 'yi böler.

Çözüm : " $11 \mid 132$ "

b) 144 sayısı 9 ile bölünür.

Çözüm : " $9 \mid 144$ " veya " k tam sayı olmak üzere $144 = 9 \cdot k$ "

c) A sayısı B sayısını böler.

Çözüm : " $A \mid B$ " veya " k tam sayı olmak üzere $B = A \cdot k$ "

d) C sayısı A sayısının katıdır.

Çözüm : " $A \mid C$ " veya " k tam sayı olmak üzere $C = A \cdot k$ "

e) 121 sayısı 12'ye tam bölünmez.

Çözüm : " $12 \nmid 121$ "

Alıştırma 3.16.

Aşağıdaki ifadeleri sözel olarak yazınız.

a) $A = 11k$

Çözüm : " A sayısı 11'in katıdır" veya " A sayısı 11 ile tam bölünür."

b) $A = 11k + 4$

Çözüm : " A sayısı 11 ile bölündüğünde 4 kalanını verir."

c) $A \mid B$ ise $A \mid A + B$ 'dir.

Çözüm : " A sayısı B sayısını bölerse, A sayısı $A + B$ sayısını da böler."

Alıştırma 3.17.

a) 453A4 sayısı 4 ile tam bölünüyorsa A yerine hangi rakamlar yazılabilir?

Çözüm : Son iki rakamın oluşturduğu sayı 4'ün katı olmalı. A rakamı 0, 2, 4, 6 veya 8 olabilir.

b) 453A4 sayısı 8 ile tam bölünüyorsa A yerine hangi rakamlar yazılabilir?

Çözüm : Son üç rakamın oluşturduğu sayı 8'in katı olmalı. A rakamı 0, 4 veya 8 olabilir.

c) 181818181819 sayısının 4 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : Son iki rakamın oluşturduğu sayının 4 ile bölümünden kalandır. Yanıt : 3.

d) 282828282828 sayısının 8 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : Son üç rakamın oluşturduğu sayının 8 ile bölümünden kalandır. Yanıt : 4.

Alıştırma 3.18.

Bir sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan kaç olamaz?

Çözüm : Sadece 0, 1, 2, 3 sayılarının karelerinin 4 ile bölümünden kalanı incelemek yeterlidir. Sayı çift ise sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan 0'dır. Sayı tek ise, sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan 1 olur.

Sayı çift ise, $2k$ formundadır.

$$(2k)^2 = (2k)(2k) = 4k^2$$

olduğundan her zaman 4 ile bölünür ve kalan 0 olur.

Sayı tek ise, $2k + 1$ formundadır. İki parantezin çarpımının nasıl dağıtıldığını görmüştük.

$$(2k + 1)^2 = (2k + 1)(2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1$$

olduğundan, 4 ile bölümünden kalan 1 olur. Yani, 2 ve 3 olamaz.

Alıştırma 3.19.

4092530, 4092531, 4092529, 4088486 sayılarından sadece biri tam karedir. Bu sayıyı bulunuz. (**İpucu:** 4 ile bölündüğünde 2 veya 3 kalanını verenler tam kare olamaz.)

Çözüm : Bir doğal sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan 2 ve 3 olamaz.

$$4092530, 4088486$$

sayılarının 4 ile bölümünden kalan 2, 4092531 sayısının 4 ile bölümünden kalan 3 olduğundan bu üç sayı tam kare olamaz. Sadece 4092529 sayısını kontrol etmemiz yeterlidir. $4092529 = 2023^2$ olduğunu görebilirsiniz.

Alıştırma 3.20.

a) 458A3 sayısı 3 ile tam bölünüyorsa A yerine hangi rakamlar yazılabilir?

Çözüm : Rakamları toplamı 3'ün katı olmalı.

$$4 + 5 + 8 + 3 + A = A + 20 \text{ olduğundan, } A \text{ rakamı } 1, 4 \text{ ve } 7 \text{ olabilir.}$$

b) 458A4 sayısı 9 ile tam bölünüyorsa A yerine hangi rakamlar yazılabilir?

Çözüm : Rakamları toplamı 9'un katı olmalı.

$$4 + 5 + 8 + 4 + A = A + 21 \text{ olduğundan, } A \text{ rakamı } 6 \text{ olabilir.}$$

Alıştırma 3.21.

9 ve 5 ile tam bölünen rakamları birbirinden farklı en büyük 7 basamaklı sayı kaçtır?

Çözüm : En büyük 7 basamaklı sayıyı aradığımız için

$$98765A0$$

yazalım. 5 ile bölünebilmesi için son rakam 0 olmalı. Rakamları toplamı

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + A + 0 = A + 35$$

olduğundan $A = 1$ olursa rakamları toplamı 9'un katı olur.

Alıştırma 3.22.

50 basamaklı 888...88 sayısının 3 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : Rakamları toplamı :

$$8 \cdot 50 = 400$$

ve 400'ün rakamları toplamı 4 olduğundan, 3 ile bölümünden kalan 1 olur.

Alıştırma 3.23.

Rakamları birbirinden farklı 53A47B sayısı hem 4 hem de 9 ile tam bölünüyorsa, AB iki basamaklı sayısı hangi sayılar olabilir?

Çözüm : Son iki rakam 4'ün katı olmalı. Rakamları birbirinden farklı olması için $B = 2$ veya 6 olması gerekir.

$B = 2$ ise 53A472 sayısının rakamları toplamı

$$5 + 3 + A + 4 + 7 + 2 = A + 21$$

olduğundan 9 ile tam bölünebilmesi için $A = 6$ olması gerekir. $AB = 62$ olur.

$B = 6$ ise 53A476 sayısının rakamları toplamı

$$5 + 3 + A + 4 + 7 + 6 = A + 25$$

olduğundan $A = 2$ olmalıdır. $AB = 26$ olur.

Alıştırma 3.24.

$\frac{2}{3} (10^{10} - 1)$ sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm :

$$\frac{2}{3} (10^{10} - 1) = \frac{2}{3} \cdot 9999999999 = 6666666666$$

olduğundan, bu sayının 9 ile bölümünden kalan $6 \cdot 10 = 60$ sayısının 9 ile bölümünden kalana eşittir. Yani 6'dır.

Alıştırma 3.25. ♣

İçinde **123** sayısını bir bütün olarak bulunduran rakamları birbirinden farklı beş basamaklı sayılardan kaç tanesi **9** ile tam bölünür? Örneğin **81234** sayısı **9** ile bölünen ve içinde **123** olan bir sayıdır.

Çözüm : Bu sayılar,

$$123ab, a123b, ab123$$

biçiminde olabilir. **9**'a bölünebilmeleri için rakamları toplamı **9**'un katı olması gerekir. Yani, $a + b = 3$ veya $a + b = 12$ olabilir.

i) $a + b = 3$ olursa, rakamlardan biri daima **1, 2, 3** ten biri olacak ve rakamları farklı koşulu bozulacaktır.

ii) $a + b = 12$ olursa, a ve b sadece $\{4, 8\}, \{5, 7\}$

ikilileri olabilir. Her bir ikili için **123** kullanılarak **6** sayı elde edilir. $2 \cdot 6 = 12$ tane istenen şekilde sayı vardır.

Alıştırma 3.26.

A sayısı ile $B + C$ toplamı **197** ile tam bölünebiliyorsa, aşağıdakilerden hangileri **197** ile tam bölünebilir?

- a) $A + B + C$
- b) $3B + 3C$
- c) $A + 2B + 2C$
- d) $3A + B + C$
- e) $3A + 3B$

Çözüm : Aynı sayıya bölünen sayıları katları ile bu sayıların katlarının toplamı da bu sayıya bölünür.

- a) A ile $B + C$ 'nin toplamı $A + B + C$ sayısı da **197** ile bölünür.
- b) $B + C$ bölünüyorsa, **3** katı da **197** ile tam bölünür.
- c) $B + C$ 'nin **2** katı ile A 'nın toplamı da tam bölünür.
- d) A 'nın **3** katı ile $B + C$ 'nin toplamı da tam bölünür.
- e) $3A + 3B$ bölünmeyebilir.

★ Bölmede Kalanla İlgili Bir Gösterim ★

Bir A sayısının bir n sayısına bölümünden kalan K olsun. Bunu kısaca,

$$A \xrightarrow{n} K$$

ile göstereceğiz. Örneğin,

$$143 \xrightarrow{9} 8, \quad 982 \xrightarrow{9} 1, \quad 982 \xrightarrow{5} 2$$

gibi. Bir sayının **9** ile bölümünden kalan rakamları toplamının **9** ile bölümünden kalana eşit olduğunu biliyoruz. Buna göre, bu gösterimle **111** tane **7** rakamından oluşan **777...777** sayısının **9** ile bölümünden kalan

$$777...777 \xrightarrow{9} 7 \cdot 111 = 777 \xrightarrow{9} 3 \cdot 7 = 21 \xrightarrow{9} 3$$

şeklinde yazılabilir.

NOT :

$A \xrightarrow{n} K$ gösterimi, yani bir A sayısının n ile bölümünden kalanın K olması

$$A \equiv K \pmod{n}$$

şeklinde de gösterilmektedir. Ama biz bu kitapta şimdilik bu gösterimi kullanmayacağız.

Alıştırma 3.27.

Bir A sayısının bir n sayısına bölümünden kalan K olduğunu $A \xrightarrow{n} K$ gösterelim. Aşağıdakileri hesaplayınız.

a) $5555555 \xrightarrow{9} K$ ise K kaçtır?

Çözüm : $7 \cdot 5 = 35$ in **9** ile bölümünden kalan **8**'dir. $K = 8$.

b) $5555555 \xrightarrow{555} K$ ise K kaçtır?

Çözüm : $5555555 = 10010 \cdot 555 + 5$ olduğundan kalan $K = 5$ olur.

c) $12345N \xrightarrow{9} 0$ ise altı basamaklı bu sayıda N kaçtır?

Çözüm : Kalan **0** ise rakamları toplamı **9**'un katı olmalı. Yani $N = 3$ 'tür.

d) $12M \xrightarrow{15} 6$ ise üç basamaklı bu sayıda M kaçtır?

Çözüm : $120 = 15 \cdot 8$ olduğundan kalanın **6** olması için **126** olmalıdır. Yani $M = 6$ 'dır.

Alıştırma 3.28.

25'er tane 5 ve 7 ile oluşturulmuş 555...555 ve 777...777 sayılarının toplamı S olsun.

a) S sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

b) S sayısının 4 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : a) 555...555 sayısının 9 ile bölümünden kalan $25 \cdot 5 = 125$ sayısının 9 ile bölümünden kalana eşittir ve $1 + 2 + 5 = 8$ olur. 777...777 sayısının 9 ile bölümünden kalan $25 \cdot 7 = 175$ sayısının 9 ile bölümünden kalana eşittir ve 4 olur. O halde, bu iki sayının toplamının 9 ile bölümünden kalan

$$8 + 4 = 12$$

nin 9 ile bölümünden kalandır ve $1 + 2 = 3$ olur.

b) 4 ile bölümünden kalan için son iki rakama bakmak yeterli. 555...555 sayısının 4 ile bölümünden kalan 3'tür. 777...777 sayısının 4 ile bölümünden kalan 1'dir. Kısaca

$$555...555 \xrightarrow{4} 3 \text{ ve } 777...777 \xrightarrow{4} 1$$

şeklinde gösterebiliriz. O halde,

$$55...55 + 77...77 \xrightarrow{4} 3 + 1 = 4 \xrightarrow{4} 0$$

olduğundan kalan 0 olur.

Alıştırma 3.29.

$5 + 55 + 555 + 5555 + \dots + 5555555555$ toplamının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm :

$$5 \xrightarrow{9} 5, \quad 55 \xrightarrow{9} 1, \quad 555 \xrightarrow{9} 6,$$

$$5555 \xrightarrow{9} 2, \quad 55555 \xrightarrow{9} 7, \quad 555555 \xrightarrow{9} 3,$$

$$5555555 \xrightarrow{9} 8, \quad 55555555 \xrightarrow{9} 4,$$

$$555555555 \xrightarrow{9} 0, \quad 5555555555 \xrightarrow{9} 5$$

olduğundan

$$5 + 1 + 6 + 2 + 7 + 3 + 8 + 4 + 0 + 5 = 41$$

elde edilir ki, buradan

$$41 \xrightarrow{9} 5$$

bulunur.

Alıştırma 3.30. ♣

$1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 100!$ sayısının 6 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm :

$$1! = 1 \xrightarrow{6} 1,$$

$$2! = 2 \xrightarrow{6} 2,$$

$$3! = 6 \xrightarrow{6} 0$$

...

olduğundan,

$$1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 100! \xrightarrow{6} 1 + 2 = 3$$

elde edilir.

Alıştırma 3.31. ♣

A ve B doğal sayılar olmak üzere, $A^2 + B^2 = 99$ eşitliğini sağlayan kaç (A, B) ikilisi vardır?

Çözüm : Bir önceki örnek göz önüne alınırsa, iki sayının kareleri toplamının 4 ile bölümünden kalan kesinlikle 3 olamaz. Fakat,

$$99 \xrightarrow{4} 3$$

olduğundan, $A^2 + B^2 = 99$ olamaz.

Alıştırma 3.32.

$4444 \cdot 55555 \cdot 7777777 \cdot 88888888$ çarpımının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm :

$$4444 \xrightarrow{9} 16 \xrightarrow{9} 7,$$

$$55555 \xrightarrow{9} 25 \xrightarrow{9} 7,$$

$$7777777 \xrightarrow{9} 49 \xrightarrow{9} 4,$$

$$88888888 \xrightarrow{9} 64 \xrightarrow{9} 1$$

olduğundan,

$$4444 \cdot 55555 \cdot 7777777 \cdot 88888888 \xrightarrow{9} 7 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 = 196$$

ve buradan da, $196 \xrightarrow{9} 7$ elde edilir.

Alıştırma 3.33.

12^{2023} sayısının 37 ile bölümünden kalan 9,

19^{1919} sayısının 37 ile bölümünden kalan 20'dir.

Buna göre, bu iki sayının çarpımı olan $12^{2023} \cdot 19^{1919}$ sayısının 37 ile bölümünden kalan kaç olur?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 12^{2023} &\xrightarrow{37} 9, \\ 19^{1919} &\xrightarrow{37} 20, \end{aligned}$$

olduğundan,

$$12^{2023} \cdot 19^{1919} \xrightarrow{37} 9 \cdot 20 = 180 \xrightarrow{37} 32$$

elde edilir ($180 = 4 \cdot 37 + 32$).

Alıştırma 3.34.

$33^2 \cdot 55^2 \cdot 77^2$ sayısının 4 ile bölümünden kalan kaçır?

Çözüm : Bir tek sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan daima 1'dir.

$$\begin{aligned} 33^2 &\xrightarrow{4} 1, \\ 55^2 &\xrightarrow{4} 1, \\ 77^2 &\xrightarrow{4} 1, \end{aligned}$$

olduğundan,

$$33^2 \cdot 55^2 \cdot 77^2 \xrightarrow{4} 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

elde edilir.

Alıştırma 3.35.

$777A7 \times 444A4$ çarpımı 9 ile bölündüğünde 1 kalanını veriyorsa A hangi rakamlar olabilir?

Çözüm : A = 4 veya A = 6 olursa,

$$A = 4 \text{ ise } 77747 \cdot 44444 \xrightarrow{9} 5 \cdot 2 \xrightarrow{9} 1,$$

$$A = 6 \text{ ise } 77767 \cdot 44464 \xrightarrow{9} 7 \cdot 4 \xrightarrow{9} 1,$$

kalan 1 olacaktır.

$$\begin{aligned} A &= 0 \text{ ise kalan } 7; & A &= 1 \text{ ise kalan } 7; \\ A &= 2 \text{ ise kalan } 0; & A &= 3 \text{ ise kalan } 4; \\ A &= 5 \text{ ise kalan } 0; & A &= 7 \text{ ise kalan } 4; \\ A &= 8 \text{ ise kalan } 0; & A &= 9 \text{ ise kalan } 7; \end{aligned}$$

olduğunu görebilirsiniz.

Alıştırma 3.36.

Bir n sayısının 13 ile bölümünden kalan 2'dir. Bir m sayısının 13 ile bölümünden kalan ise 5'tir. Buna göre, $n^3 + 2m^2$ sayısının 13 ile bölümünden kalan kaçır?

Çözüm :

$$n \xrightarrow{13} 2, \quad m \xrightarrow{13} 5$$

olduğundan,

$$n^3 + 2m^2 \xrightarrow{13} 2^3 + 2 \cdot 5^2 = 58 \xrightarrow{13} 6$$

elde edilir.

Üslü Sayının Bir Sayıya Bölümünden Kalan

A sayısının X sayısına bölümünden kalan k olsun. Bu durumda, bir n doğal sayısı için

$$A^n$$

sayısının X sayısına bölümünden kalan k^n sayısının X sayısına bölümünden kalana eşittir.

Örneğin, 137'nin 9 ile bölümünden kalan 2 olduğundan,

$$137^{100}$$

sayısının 9 ile bölümünden kalan,

$$2^{100}$$

sayısının 9 ile bölümünden kalana eşittir.

Alıştırma 3.37.

141^{2023} sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçır?

Çözüm : 141 sayısının 7 ile bölümünden kalan 1 olur. O halde,

$$141^{2023} \xrightarrow{7} 1^{2023} = 1$$

elde edilir.

Alıştırma 3.38.

$5^1, 5^7, 5^{13}, 5^{19}, \dots$ biçiminde tanımlanan sayı örüntüsü veriliyor.

a) 51'inci adımında 5'in hangi kuvveti bulunur?

b) 51'inci adımdaki sayının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : a) Üsler 1, 7, 13, 19, ... şeklinde 6'şar artarak devam ediyor. Buna göre,

$$1.\text{terim} + (n - 1) \cdot (\text{Artış Miktarı})$$

formülünden, 49'uncu üs

$$1 + 50 \cdot 6 = 301$$

olur.

b) $5^1 \xrightarrow{9} 5, 5^2 \xrightarrow{9} 7, 5^3 \xrightarrow{9} 8, 5^4 \xrightarrow{9} 4,$
 $5^5 \xrightarrow{9} 2, 5^6 \xrightarrow{9} 1$ olduğundan,

$$5^{300} \xrightarrow{9} 1 \text{ ve } 5^{301} \xrightarrow{9} 5$$

bulunur.

Alıştırma 3.39. ♣

$3^{12} = 4A0330 + 111111$ eşitliğine göre A sayısını hesaplayınız.

Çözüm : Sol taraf 9 ile bölünebiliyor. Bu bize bir ipucu verir. Böyle bir eşitliğin var olabilmesi için herşeyden önce sağ taraf da 9 ile tam bölünmelidir.

$$4A0330 \xrightarrow{9} A + 1$$

$$111111 \xrightarrow{9} 6$$

olduğundan,

$$4A0330 + 111111 \xrightarrow{9} A + 7$$

olur. $A = 2$ olursa sağ taraf ta 9 ile tam bölünebilir.

★ Üç rakamlı sayının 7 ile bölümünden kalan ★

ABC üç basamaklı bir sayı olsun.

$$ABC = 100A + 10B + C$$

sayısının 7 ile bölümünden kalan

$$2A + 3B + C$$

sayısının 7 ile bölümünden kalana eşittir. Çünkü B rakamının katsayısı olan 10'un 7 ile bölümünden kalan 3 ve A rakamının katsayısı olan 100'ün 7 ile bölümünden kalan 2'dir.

Örneğin, $ABC = 456$ sayısının 7 ile bölümünden kalanı bu yöntemle hesaplayalım.

$$2A + 3B + C = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + 6 \cdot 1 = 29$$

sayısının 7 ile bölümünden kalan 1 olduğundan, 456 sayısının 7 ile bölümünden kalan 1'dir.

Alıştırma 3.40.

685 sayısının 7 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : $A = 6, B = 8$ ve $C = 5$ için

$$645 \xrightarrow{7} 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 5 = 41 \xrightarrow{7} 6$$

olduğundan, 685 sayısının 7 ile bölümünden kalan 6 olur.

Alıştırma 3.41.

Rakamları birbirinden farklı üç basamaklı 7'ye tam bölünen en büyük sayı 987'dir. Peki, altı basamaklı rakamları birbirinden farklı 7'ye tam bölünen en büyük sayı kaçtır? (İpucu : 98765m sayısının m kaç olursa 7'ye bölüneceğini bulmaya çalışınız)

Çözüm : 98765m formunda 7'ye tam bölünen sayıyı belirleyelim. En sağdan itibaren +1, +3, +2, -1, -3, -2 işaretlemesi yapacağız.

$$1 \cdot m + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 6 - 1 \cdot 7 - 3 \cdot 8 - 2 \cdot 9 = m - 22$$

olduğunda $m = 1$ olursa, yanıt -21 olur ve 7'nin bir katı olur. Yanıt : 987651.

Alıştırma 3.42.

Aşağıdaki altı basamaklı sayıların A, B ve C rakamları kaç olursa olsun 7 ile tam bölünebileceğini görünüz.

a) ABCABC

b) AAAAAA

c) ABABAB

Çözüm : a) $-2A - 3B - C + 2A + 3B + C = 0.$

$$b) -2A - 3A - A + 2A + 3A + A = 0$$

$$c) -2A - 3B - A + 2B + 3A + B = 0$$

olduğundan A ve B ne olursa olsun bu sayılar 7 ile tam bölünebilir.

★ 11 ile bölünebilme (Artı-Eksi Kuralı) ★

Bir sayının sağ baştan itibaren tüm rakamlarının sol tarafına sırasıyla bir + ve bir - yazıp, işlemi hesaplayalım. Eğer sonuç 0 veya 11'in bir katıysa sayı 11'e tam bölünür.

Örneğin, 65378269 sayısının 11'e bölündüğünü görelim.

$$\boxed{-} 6 \boxed{+} 5 \boxed{-} 3 \boxed{+} 7 \boxed{-} 8 \boxed{+} 2 \boxed{-} 6 \boxed{+} 9$$

şeklinde sağdan itibaren bir " + ", bir " - " yazdık. Böylece,

$$+ \text{ olanlar} + 5 + 7 + 2 + 9 = 23,$$

$$- \text{ olanlar} - 6 - 3 - 8 - 6 = -23$$

olur ki, toplarsak 0 bulunur. O halde bu sayı 11 ile tam bölünür.

Ayrıca, sonuç 11'in katı değilse, 11'e bölünür ve kalan kaç ise sayının 11 ile bölümünden kalan bu kalana eşittir.

Örneğin, 78269 sayısının 11 ile bölümünden kalan 4'tür.

$$+7 - 8 + 2 - 6 + 9 = 4$$

olduğu görülebilir. Eğer bu sayı - çıkarsa pozitif oluncaya kadar 11 ekleyebilirsiniz.

Örneğin, 8269 sayısının 11 ile bölümünden kalan 8'dir.

$$-8 + 2 - 6 + 9 = -3 + 11 = 8$$

Aıştırma 3.43.

a) 1234567895 sayısı 11 ile tam bölünür mü?

Çözüm : $-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - 9 + 5 = 0$ olduğundan 11 ile tam bölünür.

b) Üç basamaklı 9m2 sayısı 11 ile tam bölünüyorsa m rakamı kaçtır?

Çözüm : $9 - m + 2 = 11 - m = 0$ olduğundan $m = 0$ olursa tam bölünür.

c) Üç basamaklı 92A sayısı 11 ile bölündüğünde 5 kalanını veriyorsa A rakamı kaçtır?

Çözüm : $9 - 2 + A = 7 + A$ olduğundan $A = 9$ olursa 5 kalanını verir.

d) 10^{10} sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : 10 'un çift kuvvetlerinin 11 ile bölümünden kalan 1, tek kuvvetlerinin 11 ile bölümünden kalan 10 'dur.

e) 11 ile tam bölünen rakamları birbirinden farklı en büyük 5 basamaklı sayı kaçtır?

Çözüm : 9876m için $9 - 8 + 7 - 6 + m = m + 2$ olduğundan $m = 9$ olması gerekir. Fakat, rakamları farklı olma koşulu sağlanmaz. 987nm için

$$9 - 8 + 7 - n + m = m - n + 8$$

olduğundan $m - n = 3$ olması gerekir. $m = 6$ ve $n = 3$ alınabilir. Yanıt : 98736.

Aıştırma 3.44.

Bir sayının 20 ile tam bölünüp bölünmediğini kontrol etmemiz için hangi iki sayıyla tam bölünüp bölünmediğini kontrol etmeliyiz? Hem 2 hem de 10 ile bölünen bir sayının 20 ile tam bölünemeyebileceğine bir örnek veriniz.

Çözüm : Bir sayının 20 ile bölünüp bölünmediğini kontrol etmemiz için $4 \cdot 5 = 20$ olduğundan hem 4 hem 5 ile bölünüp bölünmediği kontrol edilmelidir.

$20 = 2 \cdot 10$ eşitliğine göre 2 ve 10'un her ikisi de 2 ile bölündüğünden, yani ortak bölenleri olduğundan 20 ile bölünebilme için kullanılamazlar. Örneğin, 30 sayısı hem 2 hem de 10 ile bölünse de 20 ile tam bölünemez.

Alıştırma 3.45.

Bir sayı $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$ ile tam bölünüyorsa kaç doğal sayıyla tam bölünebilir?

Çözüm :

$$1, 7, 17, 7 \cdot 17, 17 \cdot 17, 7 \cdot 17 \cdot 17$$

sayılarına, yani 6 doğal sayıya tam bölünebilir.

Alıştırma 3.46.

8A31B beş basamaklı sayısı 55 ile tam bölünüyorsa A rakamının alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm : $55 = 5 \cdot 11$ olduğundan 8A31B sayısı hem 5 hem 11 ile bölünebilmelidir. 5 ile bölünebilmesi için

$$8A310 \quad \text{veya} \quad 8A315$$

olması gerekir.

$$8A310 \xrightarrow{11} 8 - A + 3 - 1 + 0 = 10 - A$$

olduğundan bu sayı 11 ile bölünemez.

$$8A315 \xrightarrow{11} 8 - A + 3 - 1 + 5 = 15 - A$$

olduğundan $A = 4$ olursa sayı 11 ile tam bölünecektir. Yani sadece 1 sayı vardır.

Alıştırma 3.47.

8A31B beş basamaklı sayısı,

a) 18 ile tam bölünecek şekilde kaç sayı vardır?

b) $A - B$ farkının alabileceği en büyük değer kaçtır?

Çözüm : $18 = 2 \cdot 9$ olduğundan 8A31B sayısı hem 2 hem 9 ile bölünebilmelidir. 2 ile bölünebilmesi için son rakam çift sayı olmalıdır.

$$8A310 \xrightarrow{9} 8 + A + 3 + 1 + 0 = A + 12 \Rightarrow A = 6$$

$$8A312 \xrightarrow{9} 8 + A + 3 + 1 + 2 = A + 14 \Rightarrow A = 4$$

$$8A314 \xrightarrow{9} 8 + A + 3 + 1 + 4 = A + 16 \Rightarrow A = 2$$

$$8A316 \xrightarrow{9} 8 + A + 3 + 1 + 6 = A + 18 \Rightarrow A = 0, 9$$

$$8A318 \xrightarrow{9} 8 + A + 3 + 1 + 8 = A + 20 \Rightarrow A = 7$$

olduğundan 5 sayı vardır. $A - B$ en fazla $9 - 0 = 9$ olabilir.

Alıştırma 3.48.

Bir doğal sayıyı 4 ile bölümünden elde edilebilecek kalan sayıya göre kaç kısma ayırabiliriz? Bunları yazınız.

Çözüm : Bir doğal sayının 4 ile bölümünden 4 farklı kalan elde edilebilir. Buna göre, dört kısımda yazabiliriz.

$$4n, \quad 4n + 1, \quad 4n + 2, \quad 4n + 3$$

Alıştırma 3.49.

Herhangi bir doğal sayının 11 katının 23 eksiği, k bir doğal sayı olmak üzere

$$\text{I. } 11k + 10$$

$$\text{III. } 11k - 1$$

$$\text{II. } 11k - 12$$

$$\text{IV. } 11k + 21$$

biçimlerinden hangileriyle yazılabilir?

Çözüm : Herhangi bir doğal sayının 11 katının 23 eksiğini $11k - 23$ biçiminde yazabiliriz. Bu gösterime istediğimiz kadar 11 ekleyip gösterebiliriz.

$$11k - 23 = 11k - 23 + 11 = 11k - 12$$

olduğundan $11k - 12$ ile de gösterebiliriz.

$$11k - 12 + 11 = 11k - 1 \text{ ile de gösterebiliriz.}$$

$$11k - 1 + 11 = 11k + 10 \text{ ile de gösterebiliriz.}$$

Tamamıyla gösterilebilir.

Problemler (Bölünebilme)

Prob. 3.1 ★ ve ▲ tam sayıları göstermek üzere,

$$18 \cdot \star + 19 \cdot \blacktriangle + 8 (\blacktriangle + 1)$$

sayısının 9 ile bölümünden kalan kaç olabilir?

Çözüm : Parantezi açarsak,

$$18 \cdot \star + 19 \cdot \blacktriangle + 8 \cdot \blacktriangle + 8 = 18 \cdot \star + 27 \cdot \blacktriangle + 8$$

olur. $18 \cdot \star + 27 \cdot \blacktriangle$ sayısı 9'un katı olduğundan kalan 8 elde edilir.

Prob. 3.2 Rakamları çarpımı 30 olan kaç tane 4 basamaklı çift sayı bulunabilir?

Çözüm : Rakamları çarpımı 30 ise rakamları sadece 1, 3, 5, 2 veya 1, 1, 5, 6 olabilir. 4 basamaklı çift sayı dediği için son rakam 2 veya 6 olabilir. Buna göre, sayının rakamları 1, 3, 5, 2 ise

$$1352, 1532, 3512, 3152, 5132, 5312$$

olmak üzere 6 tane sayı bulunur. Eğer sayının rakamları 1, 1, 5, 6 ise

$$1156, 5116, 1516$$

olmak üzere 3 tane sayı bulunur. Toplam 9 sayı vardır.

Prob. 3.3 İki basamaklı bir sayının 9 katı üç basamaklı ABO sayısı ise ABO sayısı en fazla kaç olabilir?

Çözüm : 2 basamaklı bir sayının 9 katı en fazla

$$99 \cdot 9 = 891$$

bulunur. Fakat aradığımız sayının son rakamı 0 olduğu için ABO sayısı en fazla

$$90 \cdot 9 = 810$$

olabilir.

Prob. 3.4 Hem 9 hem de 5 ile tam bölünen rakamları farklı 4 basamaklı en büyük sayı ile en küçük sayının farkı kaçtır?

Çözüm :

Hem 9 hem de 5 ile tam bölünen rakamları farklı 4 basamaklı en büyük sayı

$$98m0 \quad \text{veya} \quad 98n5$$

formunda olabilir. Buradan, $m = 1$ ve $n = 5$ olması gerekir. Fakat rakamları farklı denildiği için en büyük sayı 9810 olur. En küçük sayı ise

$$10m0 \quad \text{veya} \quad 10n5$$

formunda olabilir. Buradan, $m = 8$ ve $n = 3$ olması gerekir. O halde, en küçük sayı 1035 olur. Bunların farkı :

$$9810 - 1035 = 8775$$

elde edilir.

Prob. 3.5 $4 \times 4 \times \dots \times 4 \times 4 \times 4 = 4^{12}$ sayısının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm :

$$4^1 \xrightarrow{9} 4, \quad 4^2 \xrightarrow{9} 7, \quad 4^3 \xrightarrow{9} 1,$$

olduğundan,

$$4^{12} = 4^3 4^3 4^3 4^3 \xrightarrow{9} 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

elde edilir.

Prob. 3.6 Her rakamına bölünen rakamları sıfırdan ve birbirinden farklı üç basamaklı en büyük sayı kaçtır?

Çözüm : En büyük sayıyı aradığımız için sayı 9 ile başlamalı ve 9 ile bölünebilmelidir. Rakamlardan biri 9 ise diğer iki rakamın toplamı da 9 olmalıdır.

981 ve 918 sayısı 8 ile bölünmez ve koşul sağlanmaz.

972 ve 927 sayısı 7 ile bölünmez ve koşul sağlanmaz.

963 sayısı 6 ile bölünmez

Fakat, 936 sayısı hem 9, hem 6 hem de 3 ile tam bölünür.

Prob. 3.7 ♣ Bir doğal sayının dördüncü kuvvetinin 16 ile bölümünden kalanlar hangi sayılar olabilir? Bu bilgiyi kullanarak

$$a^4 + b^4 + c^4 = 4004$$

denklemini sağlayan kaç tane (a, b, c) doğal sayı üçlüsü olduğunu bulunuz.

Çözüm : Bir doğal sayı dördüncü kuvvetinin 16 ile bölümünden kalan sayı tek ise 1, sayı çift ise 0'dır. Yani, sadece 0 ve 1 kalanı elde edilir. Buna göre,

$$a^4 + b^4 + c^4$$

sayısının 16 ile bölümünden elde edilebilecek kalanlar 0, 1, 2, 3 olabilir. Fakat, 4004 sayısının 16 ile bölümünden kalan 4'tür. O halde,

$$a^4 + b^4 + c^4 = 4004$$

eşitliğini sağlayan (a, b, c) doğal sayı üçlüsü yoktur.

Prob. 3.8 $A \cdot B$ çarpımının 4 ile bölümünden kalan 1'dir. Buna göre A ve B sayılarının 4 ile bölümünden kalanlar sırasıyla m ve n ise $m + n$ toplamı hangi değerler olabilir?

Çözüm : A ve B sayılarının 4 ile bölümünden kalanlar m ve n ise,

$$A \xrightarrow{4} m \quad \text{ve} \quad B \xrightarrow{4} n$$

yazılabilir. Buna göre,

$$A \cdot B \xrightarrow{4} m \cdot n \xrightarrow{4} 1$$

olması için,

$$m = n = 1 \quad \text{veya} \quad m = n = 3$$

alınabilir. O halde, $m + n$ toplamı 2 veya 6 olabilir.

Prob. 3.9 10 ile tam bölünemeyen ardışık beş tek sayının toplamının 50 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : 10 ile bölünemeyen 4 ardışık beş tek sayı

$$10 \cdot n + 1, 10 \cdot n + 3, 10 \cdot n + 5, 10 \cdot n + 7, 10 \cdot n + 9$$

formundadır. Bunları toplarsak, $50 \cdot n + 25$ bulunur. O halde, bu toplamın 50'ye bölümünden kalan 25'tir.

Prob. 3.10 6 ile tam bölünemeyen ardışık üç tek sayının toplamı 189 ise bu sayıların en küçüğü kaçtır?

Çözüm : 6 ile bölünemeyen 4 ardışık üç tek sayı

$$6 \cdot n + 1, 6 \cdot n + 3, 6 \cdot n + 5$$

formundadır. Bunları toplamı 189 ise,

$$18 \cdot n + 9 = 189 \Rightarrow 18 \cdot n = 180$$

eşitliğinden $n = 10$ elde edilir. O halde, en küçüğü

$$6 \cdot 10 + 1 = 61$$

bulunur.

Prob. 3.11 (AMC8-2017)

N sayısı altı basamaklı bir sayıdır.

N sayısının ilk üç basamağı ile son üç basamağı aynıdır. Buna göre, N sayısı 11, 19, 101, 111, 1111 sayılarından hangisine tam bölünür?

Çözüm : N sayısı $ABCABC$ olsun. 11 ile bölünebilme kuralı gereği

$$A - B + C - A + B - C = 0$$

olduğundan, $ABCABC$ sayısı verilen sayılardan 11 ile bölünebilir.

Ayrıca,

$$ABCABC = 1001 \cdot ABC = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot ABC$$

olduğundan 7, 11 ve 13 ile tam bölünebildiği görülebilir.

Prob. 3.12 $555A5 \times 44444$ çarpımı 9 ile bölündüğünde 3 kalanını veriyorsa A hangi rakamlar olabilir?

Çözüm :

$$44444 \xrightarrow{9} 2$$

olduğundan, $555A5 \times 44444$ çarpımının 3 kalanını vermesi için, $555A5$ çarpanının 9 ile bölümünden kalan 6 olmalıdır.

$$555A5 \xrightarrow{9} 20 + A \xrightarrow{9} 2 + A$$

olduğundan $A = 4$ olabilir.

Prob. 3.13 Bir n sayısının 43 ile bölümünden kalan 5'tir. Bir m sayısının 43 ile bölümünden kalan ise 7'dir. Buna göre, $3 \cdot n^2 + 2 \cdot m^2$ sayısının 43 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : $n \xrightarrow{43} 5$ ve $m \xrightarrow{43} 7$ olduğundan,

$$3 \cdot n^2 + 2 \cdot m^2 \xrightarrow{43} 3 \cdot 5^2 + 2 \cdot 7^2 = 173 \xrightarrow{43} 1$$

elde edilir.

Prob. 3.14 ♣ İçinde 101 sayısını bir bütün olarak bulunduran beş basamaklı sayılardan kaç tanesi 45 ile tam bölünür? Örneğin 21015 sayısı 45 ile bölünen ve içinde 101 olan bir sayıdır.

Çözüm : Bu sayılar,

$$101ab, a101b, ab101$$

biçiminde olabilir. $45 = 9 \cdot 5$ ile tam bölünebilmesi için son rakam 0 veya 5 olabilir. Yani $ab101$ formunda olamaz.

$$101a0 \xrightarrow{9 \text{ ile tam bölünüyor}} 10170$$

$$101a5 \xrightarrow{9 \text{ ile tam bölünüyor}} 10125$$

$$a1010 \xrightarrow{9 \text{ ile tam bölünüyor}} 71010$$

$$a1015 \xrightarrow{9 \text{ ile tam bölünüyor}} 21015$$

olduğundan 4 sayı bulunur.

Prob. 3.15 5A55B beş basamaklı sayısı 55 ile tam bölünüyorsa A rakamının olabileceği sayıların toplamı kaçtır?

Çözüm : $55 = 5 \cdot 11$ olduğundan 5A55B sayısı hem 5 hem 11 ile bölünebilmelidir. 5 ile bölünebilmesi için

$$5A550 \quad \text{veya} \quad 5A555$$

olması gerekir.

$$5A550 \xrightarrow{11} 5 - A + 5 - 5 + 0 = 5 - A$$

olduğundan $A = 5$ ise bu sayı 11 ile bölünür.

$$5A555 \xrightarrow{11} 5 - A + 5 - 5 + 5 = 10 - A$$

olduğundan bu sayı 11 ile tam bölünemez. Yani sadece 1 sayı vardır.

Prob. 3.16 ♣ $11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 19^2$ sayısının 4 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : Bir tek sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan daima 1, bir çift sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan ise daima 0'dır. O halde, $11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 19^2$ sayısının 4 ile bölümünden kalan

$$1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 = 5 \xrightarrow{4} 1$$

elde edilir.

Prob. 3.17 Bir doğal sayının 5 katının 33 eksiğinin 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : Herhangi bir doğal sayının 5 katının 3 eksiğini $5k - 33$ biçiminde yazabiliriz. Hatta, $7 \cdot 5 = 35$ toplayarak

$$(5k - 33) + 35 = 5k + 2$$

biçiminde de yazabiliriz. O halde, bu sayının 5 ile bölümünden kalan 2 olur.

Prob. 3.18 Bir n doğal sayısının 17 ile bölümünden kalan 3'tür. Buna göre, $5 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 11$ sayısının 17 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : n doğal sayısının 17 ile bölümünden kalan 3 ise,

$$5 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 11$$

sayısının 17 ile bölümünden kalanı bulmak için kalanlarla aynı işlemleri yaparak elde edilen

$$5 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 11 \xrightarrow{17} 5 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 11 = 62$$

sayısının 17 ile bölümünden kalanı bulmalıyız. Buradan, $62 = 3 \cdot 17 + 11$ olduğundan

$$62 \xrightarrow{17} 11$$

elde edilir. Yani, $5 \cdot n^2 + 2 \cdot n + 11$ sayısının 17 ile bölümünden kalan 11 bulunur.

Asal Sayılar

Alıştırma 4.1.

131, 311 ve 113 sayılarının hangileri asaldır? (Karesi bu sayılardan en yakın olan asal sayılara kadar kontrol edebilirsiniz)

Çözüm :

113 sayısı 2, 3, 5, 7 sayılarının hiç birine bölünmediğinden asaldır.

131 sayısı 2, 3, 5, 7, 11 sayılarının hiç birine bölünmediğinden asaldır.

311 sayısı 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 sayılarının hiç birine bölünmediğinden asaldır.

Alıştırma 4.2.

Ters ve düz okunuşu aynı olan asal sayılara **palindromik asallar** denir. Örneğin 101 bir palindromik asaldır. 101'den bir sonraki palindromik asal kaçtır?

Çözüm : 101 den sonraki palindromik sayı $111 = 3 \cdot 37$ olduğundan, $121 = 11^2$ olduğundan asal değildir. 131 sayısı ise palindromik asaldır.

Alıştırma 4.3.

Bir asal sayının tersten okunuş kendisinden farklı bir asal sayı ise, bu sayıya **Lasa sayısı** denir. İki basamaklı kaç Lasa sayısı vardır?

Çözüm : Bu koşula uygun en küçük asal 13'tür. İki basamaklı tüm lasa sayıları :

13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

olmak üzere 8 tanedir. 19 olmaz çünkü $91 = 7 \cdot 13$ olduğundan asal değildir. İlk rakamı çift sayı olan asal sayıların hiçbiri lasa sayısı olamaz çünkü tersleri daima 2 ile bölünür. İlk rakamı 5 olanlar da olamaz tersi 5 ile bölünür.

Alıştırma 4.4.

a) n bir pozitif doğal sayı olmak üzere $6 \cdot n + 1$ biçimindeki bir sayı daima asal sayı mıdır?

b) n asal sayı ise $6 \cdot n + 1$ sayısı her zaman asal olur mu?

Çözüm : a) Hayır. Örneğin, $n = 4$ için $6 \cdot 4 + 1 = 25$ sayısı asal değildir.

b) Hayır. Örneğin, $n = 19$ için $6 \cdot 19 + 1 = 115$ sayısı asal değildir.

Alıştırma 4.5.

n bir pozitif tam sayı olmak üzere, $2^n - 1$ biçiminde yazılan bir sayı **asal** ise bu sayıya **Mersenne asalı** denir. 100'den küçük kaç Mersenne asalı vardır?

Çözüm :

$n = 1$ ise $2^1 - 1 = 1$ asal değil.

$n = 2$ ise $2^2 - 1 = 3$ asal. (En küçük Mersenne asalı)

$n = 3$ ise $2^3 - 1 = 7$ asal. (Mersenne asalı)

$n = 4$ ise $2^4 - 1 = 15$ asal değil.

$n = 5$ ise $2^5 - 1 = 31$ asal. (Mersenne asalı)

$n = 6$ ise $2^6 - 1 = 63$ asal değil.

Alıştırma 4.6.

Bir sayı örüntüsündeki 1. sayı hariç her sayı kendinden önce gelen sayının rakamlarının kareleri toplamıdır. Eğer, bu sayı örüntüsü 1 ile bitiyorsa, bu örüntünün ilk sayısına **Mutlu sayı** denir. Eğer ilk sayı aynı zamanda asal ise bu sayıya **Mutlu asal** denir. Örneğin, 139 mutlu asaldır.

$139 \xrightarrow{1^2+3^2+9^2} 91 \xrightarrow{9^2+1^2} 82 \xrightarrow{8^2+2^2} 68 \xrightarrow{8^2+6^2} 100 \rightarrow 1$

Buna göre, 7, 13 ve 17 sayılarından hangileri **Mutlu asaldır**?

Çözüm : 7 ve 13 mutlu asaldır.

$7 \xrightarrow{7^2} 49 \xrightarrow{9^2+4^2} 97 \xrightarrow{9^2+7^2} 130 \xrightarrow{1^2+3^2} 10 \rightarrow 1$
 $13 \xrightarrow{1^2+3^2} 10 \rightarrow 1$

17 nin mutlu asal olmadığını görebilirsiniz.

17, 50, 25, 29, 85, 89, 145, 42, 20, 4, 16, 37, 58, 89 biçiminde tekrar aynı sayıların tekrar edeceğini görebilirsiniz.

Alıştırma 4.7.

n bir doğal sayı olmak üzere, $2^{2^n} + 1$ biçiminde yazılan bir sayı asal ise, bu sayıya **Fermat asalı** denir. 100'den küçük kaç Fermat asalı vardır? Örneğin, $n = 0$ için $2^{2^0} + 1 = 2^1 + 1 = 3$ bir Fermat asalıdır.

Çözüm :

$n = 1$ ise $2^{2^1} + 1 = 5$ Fermat asalı.

$n = 2$ ise $2^{2^2} + 1 = 17$ Fermat asalı.

$n = 3$ ise $2^{2^3} + 1 = 257 > 100$ olur.

Alıştırma 4.8.

Aşağıdaki tablodan **her satırdan ve sütundan sadece 1 tane** eleman alınıp bu elemanlar çarpılıyor.

a) Aynı veya farklı kaç tane çarpım elde edilir?

b) Bu çarpımların kaçı asaldır?

2	4	1	3
5	1	7	4
1	2	3	6
1	2	2	5

Çözüm : a) Birinci satırdan 4 sayı alabilir. 2. satırdan ilk satırdan aldığı sayının bulunduğu sütundan sayı alamayacağı için 3 sayı alabilir. Benzer şekilde üçüncü satırda 2 ve dördüncü satırdan 1 eleman alabilir. Yani. $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ çarpım elde edilir. b) İlk satırdan 2 alınrsa, diğer satırlardan 1 alınması gerekir. Ama bu mümkün değildir. İlk satırdan 3 alınrsa, diğer satırlardan 1 alınması gerekir. Ama bu da mümkün değildir. **O halde, ilk satırdan sadece 1 alınabilir.** Böylece, birinci satır ve üçüncü sütundan alacağım sayı belirli olduğundan bu satır ve sütunu silerek devam edebiliriz.

5	1	4
1	2	6
1	2	5

5	3	4
1	2	6
1	2	5

Üçüncü sütundan mutlaka 1'den büyük bir sayı alacağımız için, diğer sütunlardan 1 almamız zorunludur. Üçüncü sütundan 4 alamayız. 6'da alamayız $6 = 2 \cdot 3$ olduğundan çarpım asal olmaz. O halde, üçüncü sütundan sadece 5'i alabiliriz. Buna göre, çarpımların sadece biri asaldır.

Alıştırma 4.9. AMC8-2014

İki asal sayının toplamı 85'tir. Bu iki asal sayının çarpımı nedir?

Çözüm : İki asal sayının toplamı 85 ise, biri 2 diğeri 83 olmalıdır. Çarpımları da

$$2 \cdot 83 = 166$$

bulunur.

Alıştırma 4.10.

Beş tane farklı asal sayının toplamı 72 ise

a) bu sayıların en büyüğü en az kaç olabilir?

b) bu sayıların en büyüğü en fazla kaç olabilir?

Çözüm : a) Biri 2 olmalıdır. Kalan dördünün toplamı 70 olur. $70 \div 4 = 17,5$ olduğundan diğer dördü :

$$11 + 17 + 19 + 23$$

bulunur. En büyüğü en az 23 elde edilir.

b) En büyüğünün en fazla olması için ilk dördü 2, 3, 7, 13 alınrsa,

$$72 - (2 + 3 + 7 + 13) = 47$$

elde edilir. 5 ve 7 alınca beşinci olarak elde edilen daha büyük sayıların asal olmadığını görebilirsiniz.

Alıştırma 4.11.

İki asal sayının farkı 4 ise bu asal sayılara **kardeş asal sayı çifti**, bu sayıların çarpımına da **kanka sayı** diyelim. 3 ile 7 kardeş asal sayı çifti olduğu için $3 \cdot 7 = 21$ bir kanka sayıdır. En küçük **üç kanka** sayının toplamı kaçtır? Bu toplam asal mıdır?

Çözüm : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 asal sayılarından kardeş asal sayı çiftleri sadece $\{3, 7\}$; $\{7, 11\}$ ve $\{13, 17\}$ sayılarıdır. Buradan, en küçük üç kanka sayı 21, 77 ve 221 olduğundan bunların toplamı da $21 + 77 + 221 = 319$ bulunur. $319 = 11 \times 29$ olduğundan asal değildir.

Alıştırma 4.12. ♣

"Bir n doğal sayısı asal değilse, $n + 2$ sayısı da asal değildir."

ifadesinin yanlış olduğunu gösteren 20'den küçük kaç n pozitif tam sayı vardır?

Çözüm : n çift olursa yukarıdaki ifade zaten doğru olur. O halde, asal olmayan tek sayıları kontrol edelim.

" $n = 1$ asal değilse $n + 2 = 3$ asaldır." ifade yanlış olur.

" $n = 9$ asal değilse $n + 2 = 11$ asaldır." ifade yanlış olur.

" $n = 15$ asal değilse $n + 2 = 17$ asaldır." ifade yanlış olur.

Bir Sayının Asal Çarpanları

Alıştırma 4.13.

Aşağıdaki sayıların asal çarpanlara göre yazılışını bulunuz.

a) 108 =

108	2	→	108 = 2×2×3×3×3
54	2		
27	3		
9	3		
3	3		
1	3		

Çözüm :

b) 180 =

180	2	→	180 = 2×2×3×3×5
90	2		
45	3		
15	3		
5	5		
1	5		

Çözüm :

Alıştırma 4.14.

Aşağıdaki sayıların asal çarpanlara göre yazılışını bulunuz.

a) $10^4 =$ Çözüm :

$$10^4 = (2 \cdot 5)^4 = 2^4 \cdot 5^4.$$

b) 12600 = Çözüm :

$$\begin{aligned} 12600 &= 126 \cdot 100 = 2 \cdot 63 \cdot 4 \cdot 25 \\ &= 2 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 25 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Alıştırma 4.15.

$333^2 + 444^2 + 555^2$ sayısının en büyük asal çarpanı kaçtır?

Çözüm : $333^2 = 3^2 \cdot 111^2$, $444^2 = 4^2 \cdot 111^2$ ve $555^2 = 5^2 \cdot 111^2$ yazılırsa,

$333^2 + 444^2 + 555^2 = 3^2 \cdot 111^2 + 4^2 \cdot 111^2 + 5^2 \cdot 111^2$ olur. 111^2 parantezine alırsak,

$111^2 \cdot (3^2 + 4^2 + 5^2) = 50 \cdot 111^2 = 2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 37^2$ olduğundan en büyük asal çarpan 37 olur.

Alıştırma 4.16. ♣

$11 \cdot 3^4 + 22 \cdot 3^3 + 33 \cdot 3^2 = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e$ ise $a + b + c + d + e$ toplamı kaçtır?

Çözüm : Eşitliğin sol tarafının çarpanlarını bulalım. Hem 11 hem de 3^2 ortak olduğundan

$$\begin{aligned} 11 \cdot 3^4 + 22 \cdot 3^3 + 33 \cdot 3^2 &= 11 \cdot 3^2 \cdot (3^2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 1) \\ &= 11 \cdot 3^2 \cdot 18 \\ &= 11 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \\ 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e &= 2 \cdot 11 \cdot 3^4 \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde, $a = 1$, $b = 4$, $c = d = 0$ ve $e = 1$ olduğundan

$$a + b + c + d + e = 6$$

bulunur.

Alıştırma 4.17.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ şeklinde tanımlanır. Buna göre, $10!$ sayısını en küçük hangi pozitif tam sayıyla çarparsak bir tam kare sayı buluruz?

Çözüm : Tam kare olması için üssü 2'nin katı olması gerekir.

$$\begin{aligned} 10! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \end{aligned}$$

oldüğundan en küçük

$$7^1$$

ile çarpılırsa tam kare olur.

Alıştırma 4.18.

$9 \cdot 10^5$ sayısı en küçük hangi pozitif tam sayıyla çarpılırsa hem tam kare hem tam küp olur?

Çözüm : Hem tam kare hem tam küp olması için her asal çarpanın üssü 6'nın katı olması gerekir.

$$9 \cdot 10^5 = 3^2 \cdot 2^5 \cdot 5^5$$

oldüğundan en küçük

$$3^4 \cdot 2 \cdot 5 = 810$$

ile çarpılırsa hem tam kare hem tam küp olur.

Pozitif Bölen (Çarpan) Sayısını Hesaplama

Alıştırma 4.19.

$2^{114}3^{111}$ sayısının bir çarpanında 2'nin kuvveti kaç farklı sayı olabilir?

Çözüm : $2^{114}3^{111}$ sayısının bir çarpanında 2'nin kuvveti 0, 1, 2, 3, ..., 114

sayıları olabilir. Yani en az 0 en fazla 114 olabilir. Bunların sayısı da

$$114 + 1 = 115$$

olur.

Alıştırma 4.20.

$2^{114}3^{99}$ sayısının kaç pozitif böleni vardır?

Çözüm : Asal çarpanların üslerinin 1 fazlalarının çarpımları, pozitif çarpan sayısını verir. Buna göre çarpan sayısı

$$(114 + 1)(99 + 1) = 115 \cdot 100 = 11500$$

olur.

Alıştırma 4.21.

360 sayısının kaç tane pozitif tam sayı böleni vardır?

Çözüm : $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ olduğundan, pozitif bölenlerin sayısı

$$(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$$

olur.

Alıştırma 4.22.

a) 180 sayısının kaç tane pozitif böleni vardır?

b) Bu bölenlerden kaçının 3'ten fazla çarpanı vardır?

Çözüm : $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olduğundan, pozitif bölenlerin sayısı

$$(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$$

olur. Tam kare ve asal olanlar dışındaki tüm bölenlerin 3'ten fazla çarpanı vardır.

$$1, 2, 3, 4, 5, 9$$

dışındaki $18 - 6 = 12$ bölenin 3'ten fazla çarpanı vardır.

Alıştırma 4.23.

72 sayısını bölen asal sayıların sayısını ■ ile, 72 sayısını bölen tüm pozitif doğal sayıların sayısını da ▲ ile gösterelim. ▲ - ■ değerini bulunuz.

Çözüm : $72 = 2^3 \cdot 3^2$ olduğundan ■ = 2 ve

$$▲ = (3 + 1)(2 + 1) = 12$$

olur. O halde, ▲ - ■ = 10 bulunur.

Alıştırma 4.24.

12000...000 sayısının pozitif bölenlerinin sayısı 160 ise bu sayı kaç basamaklıdır?

Çözüm : $12000...000 = 12 \cdot 10^n$ olsun. Yani n tane 0 olsun ve sayı $n + 2$ basamaklı olsun.

$$12 \cdot 10^n = 2^2 \cdot 3 \cdot 2^n \cdot 5^n = 3 \cdot 2^{n+2} \cdot 5^n$$

oldüğundan,

$$(1 + 1)(n + 3)(n + 1) = 160$$

$$(n + 3)(n + 1) = 80$$

olmalıdır. Buradan $n = 7$ olması gerektiği görülür. O halde, bu sayı $n + 2 = 9$ basamaklıdır.

Aralarında Asal Sayılar

Alıştırma 4.25.

$10^3 < A < 50^3$ eşitsizliğini sağlayan A tam küplerinden kaç tanesi 144 ile aralarında asaldır?

Çözüm : $144 = 2^4 \cdot 3^2$ olduğundan, 2 veya 3 ile tam bölünmeyen tam küplerin sayısını bulmalıyız. Çift sayıların veya 3'ün katı olan sayıların küpü 144 ile aralarında asal olamaz. O halde,

$$11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49$$

sayılarının küpleri 144 ile aralarında asaldır.

Alıştırma 4.26.

$m + n$ ve $m - n$ doğal sayıları aralarında asal sayılardır.

$$36 \cdot (m + n) = 60 \cdot (m - n)$$

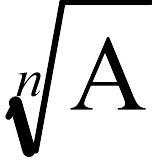
olduğuna göre, $m \cdot n$ çarpımı kaçtır?

Çözüm : Eşitliği, $3 \cdot 12 \cdot (m + n) = 5 \cdot 12 \cdot (m - n)$ biçiminde yazalım. Her iki tarafta da 12 var. Fakat eşitliğin sol tarafında 5, sağ tarafında ise 3 çarpanı yok. O halde, $m + n$ ve $m - n$ doğal sayıları aralarında asal olduğundan $m + n = 5$ ve $m - n = 3$ olması gerekir. Buradan $m = 4$, $n = 1$ ve $m \cdot n = 4$ elde edilir.

Keloğlan'ın Şifreli Kök Odası

Köklü sayılar daha sonraki sınıflarda gösterilen bir konudur. Burada, köklü sayıları kavramanızı sağlayacak bir örnek çözeceğiz. Bu konu Dahimatik 7'de ele alınacaktır.

Keloğlan içinde sayıların bulunduğu şifreli bir oda oluşturuyor. Bu odayı $\sqrt[n]{A}$ biçiminde gösteriyor. Bu odanın duvarının hemen kenarındaki n pozitif doğal sayısı odanın şifresini gösteriyor.



gösterimi Keloğlan'ın şifresi n olan odasında bulunan A sayısını göstermektedir.

Keloğlan odanın içinde sadece çarpan olarak bulunan sayıların bu odaya girip çıkabilmesi için kurallar koyuyor.

ŞİFRELİ KÖK ODASININ KURALLARI

Kural 1. Odanın içindeki bir doğal sayı **çarpanının dışarı çıkabilmesi için**, sayının üssünün odanın şifresiyle aynı olması gerekiyor.

$$\sqrt[5]{3^5 \cdot 7^4} = 3 \sqrt[5]{7^4}$$

örneğinde olduğu gibi odanın şifresi 5'tir ve 5'e sahip olan 3 sayısı dışarı çıkmıştır.

Kural 2. Bir **çarpan dışarı çıkabiliyorsa** odanın şifresi kadar üssünü kapıdaki görevliye teslim eder.

Örneğin,

$$\sqrt[7]{7^4 \cdot 13^2} = \sqrt[7]{7^3 \cdot 7^1 \cdot 13^2} = 7 \sqrt[7]{7^1 \cdot 13^2}$$

eşitliğinde görüldüğü gibi, sadece kapının şifresinden büyük üssü olan 7 dışarı çıkabilmiştir.

Kural 3. Bir sayının odanın içine **çarpan olarak girebilmesi için** kapıdaki şifreyi yine üs olarak alması gerekiyor.

$$2 \sqrt[3]{13^2} = \sqrt[3]{2^3 13^2}.$$

Kural 4. Sayılar çarpanlarına ayrılıp üslerini büyütterek dışarı daha küçük olarak odadan çıkabilirler.

Örneğin, içeride $8 = 2^3$ ve $6 = 2 \cdot 3$ yazılabilir.

$$\sqrt[4]{8 \cdot 6} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2 \sqrt[4]{3}$$

eşitliğinde sayılar çarpanlara ayrılarak 2'nin çıkmasını sağlamış ama 3 içeride kalmıştır.

Kural 5. Odanın içinde sayı kalmazsa oda tamamen yok oluyor.

$$\sqrt[5]{3^5} = 3, \quad \sqrt[11]{7^{11}} = 7 \text{ gibi.}$$

Kural 5. Odanın şifresi 2 ise $\sqrt[2]{\dots}$ yerine sadece $\sqrt{\dots}$ yazılabilir. Yani 2'yi yazmaya gerek duymuyor.

$$\sqrt{6}, \quad \sqrt{3^2} = 3, \quad \sqrt{25} = 5 \text{ gibi.}$$

Alıştırma 4.27.

Keloğlan'ın şifreli kök odasının kuralları yukarıda verilmiştir. Buna göre aşağıdakileri sadeleştiriniz. Odadan çıkabilenleri çıkarınız.

a) $\sqrt[5]{3^5} =$

Çözüm :

$$\sqrt[5]{3^5} = 3.$$

b) $\sqrt[3]{2^7} =$

Çözüm :

$$\sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{3^3} = 3.$$

c) $\sqrt[4]{3^5 2^4} =$

Çözüm :

$$\sqrt[4]{3^5 2^4} = \sqrt[4]{3 \cdot 3^4 \cdot 2^4} = 3 \cdot 2 \sqrt[4]{3} = 6 \sqrt[4]{3}.$$

d) $\sqrt[3]{48} =$

Çözüm : $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[3]{2^3 2^1 \cdot 3} = 2 \sqrt[3]{2 \cdot 3} = 2 \sqrt[3]{6}.$

e) $\sqrt[7]{2^3 3^4 2^2 3^2 2^2 3^1} =$

Çözüm :

$$\sqrt[7]{2^3 3^4 2^2 3^2 2^2 3^1} = \sqrt[7]{2^7 3^7} = 2 \cdot 3 = 6.$$

Alıştırma 4.28.

Yukarıda verilen Keloğlan'ın şifreli kök odasının kurallarına göre

$$\sqrt[8]{2^6 3^7 n}$$

ifadesinde tüm sayıların dışarı çıkıp kök sayı odasının ortadan kaybolması için n sayısı en az kaç olmalıdır?

Çözüm : $\sqrt[8]{2^6 3^7 n}$ ifadesinde içerideki çarpanların üslerinin 8 olması gerekir. O halde, en küçük $n = 2^2 3^1 = 12$ ile çarpılması gerekir. Bu durumda,

$$\sqrt[8]{2^6 \cdot 3^7 \cdot \underbrace{2^2 \cdot 3^1}} = \sqrt[8]{2^8 \cdot 3^8} = 2 \cdot 3 = 6$$

elde edilir.

Alıştırma 4.29.

Aşağıdaki şifreli odaların hangilerinde 2 sayısı odadan dışarı çıkabilir?

a) $\sqrt[5]{2^4 3^7}$

b) $\sqrt[5]{2^5 + 3^5}$

c) $\sqrt[5]{2^5 3^5 + 3^5}$

d) $\sqrt[5]{2^6 3^5}$

e) $\sqrt[5]{2^4 6}$

Çözüm :

a) 2'nin üssü kapı şifresinden daha küçük olduğundan 2 dışarı çıkamaz.

b) 2'nin üssü kapı şifresi ile aynı ama, odanın içinde çarpan olarak bulunmadığından dışarı çıkamaz.

c) 2'nin üssü kapı şifresi ile aynı ama, odanın tamamında çarpan olarak bulunmadığından dışarı çıkamaz.

d) 2'nin üssü kapı şifresinden daha büyük olduğundan 2 dışarı çıkabilir : $\sqrt[5]{2^5 2^1 3^5} = 2 \sqrt[5]{2^1 3^5}$.

e) $\sqrt[5]{2^4 6} = \sqrt[5]{2^4 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 3}$ yazılırsa 2'nin üssü kapı şifresi ile aynı olur ve dışarı çıkar : $2 \sqrt[5]{3}$.

Alıştırma 4.30.

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) $\sqrt[3]{3^2 + 2^2 + 6^2} = ?$

b) $\sqrt[2]{2^2 + 4 \cdot \sqrt[3]{5^2 + \sqrt[2]{3^1 + 3^0}}} = ?$

Çözüm :

a)

$$\sqrt[3]{3^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt[3]{49} = 7$$

olur.

b)

$$\begin{aligned} \sqrt[2]{2^2 + 4 \cdot \sqrt[3]{5^2 + \sqrt[2]{3^1 + 3^0}}} &= \sqrt[2]{2^2 + 4 \cdot \sqrt[3]{5^2 + 2}} \\ &= \sqrt[2]{2^2 + 4 \cdot \sqrt[3]{3^3}} \\ &= \sqrt[2]{2^2 + 4 \cdot 3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Problemler (Asal Sayı)

Prob. 4.1 m ve n doğal sayılar olmak üzere, $2^m 3^n + 1$ formundaki asal sayılara **Pierpont asalları** denir. 20'den küçük kaç Pierpont asalı vardır?

Çözüm : $m = n = 0$ ise $P_1 = 2^0 3^0 + 1 = 2$.

$m = 1, n = 0$ ise $P_2 = 2^1 3^0 + 1 = 3$.

$m = 2, n = 0$ ise $P_3 = 2^2 3^0 + 1 = 5$.

$m = 1, n = 1$ ise $P_4 = 2^1 3^1 + 1 = 7$.

$m = 2, n = 1$ ise $P_5 = 2^2 3^1 + 1 = 13$.

$m = 4, n = 1$ ise $P_6 = 2^4 3^1 + 1 = 17$.

$m = 1, n = 2$ ise $P_7 = 2^1 3^2 + 1 = 19$.

Prob. 4.2 13 asalından sonra gelen ilk asal sayı 17'dir. 13 ve 17 **ardışık asallardır**. Buna göre aşağıdakileri yanıtlayınız.

a) Aralarındaki fark 2 olan üç tane ardışık asal sayı ikilisi yazınız.

b) 300'den küçük ve ardışık iki asal sayının çarpımı olarak yazılabilen kaç sayı vardır?

Çözüm : a) Aralarındaki fark 2 olan ardışık asal sayı ikililerinden ilk üçü : $\{3, 5\}$; $\{5, 7\}$; $\{11, 13\}$ olur.

b)

$$2 \cdot 3 = 6, \quad 3 \cdot 5 = 15, \quad 5 \cdot 7 = 35,$$

$$7 \cdot 11 = 77, \quad 11 \cdot 13 = 143, \quad 13 \cdot 17 = 221$$

ve $17 \cdot 19 = 323 > 300$ olduğunda sadece 6 sayı vardır.

Prob. 4.3 60 sayısı iki asalın toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabilir?

Çözüm :

$$60 = 29 + 31 = 7 + 53 = 13 + 47$$

$$= 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37.$$

olduğundan 6 farklı şekilde yazılabilir.

Prob. 4.4 47 sayısı iki asal sayının toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabilir?

Çözüm : İki asal sayının toplamı tek ise biri 2 olmalıdır. $2 + 45 = 47$ yazılırsa 45 asal olmadığından, 47 sayısı iki asal sayının toplamı olarak yazılamaz.

Prob. 4.5 100'den küçük ve $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10$ sayısı ile aralarında asal en büyük doğal sayı ile en küçük doğal sayının toplamı kaçtır?

Çözüm : 100'den küçük ve $10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 10$ sayısı ile aralarında asal en küçük doğal sayı 11, en büyük doğal sayı ise 97'dir. Bunların toplamı da

$$97 + 11 = 108$$

olur.

Prob. 4.6 Altı basamaklı ABCABD sayısı 11 ile tam bölünebilmektedir. $C + D = 8$ olduğuna göre $C \cdot D$ çarpımının kaç pozitif böleni vardır?

Çözüm : 11 ile bölünebilme kuralına göre

$$A - B + C - A + B - D = C - D$$

değerinin 0 veya 11 olması gerekir. $C - D = 0$ olursa $C + D = 8$ olduğundan $D = C = 4$ olur. $C - D = 11$ olursa C ve D bulunamaz. $D = C = 4$ ise $C \cdot D = 4 \cdot 4 = 2^4$ olduğundan $(4 + 1) = 5$ pozitif böleni vardır.

Prob. 4.7 ♣ Bir n doğal sayısı için $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$ farklı asal sayılar olmak üzere $n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}$ yazılışında,

$$R(n) = m_1 + m_2 + \dots + m_k$$

şeklinde tanımlanıyor. Buna göre,

a) $R(200) = ?$

b) $R(n) = 7$ olacak şekilde en küçük n sayısı kaçtır?

c) $R(n) = 7$ olan birden fazla asal çarpanı olan en küçük n sayısı kaçtır?

Çözüm : a) $200 = 2 \cdot 100 = 2 \cdot 4 \cdot 25 = 2^3 5^2$ olduğundan $R(n) = 3 + 2 = 5$ bulunur.

b) $R(n) = 7$ ise en küçük n sayısı $n = 2^7$ olur.

c) 2 ve 3 asal çarpanları seçilerek $n = 2^6 3^1 = 192$ olur.

Prob. 4.8 AMC8-2007

Bartu, 3 kartın her iki tarafına birer tane olmak üzere 6 farklı sayı yazdı ve kartları şekilde gösterildiği gibi bir masaya koydu. Üç kartın her birinin iki yüzündeki sayıların toplamaları eşittir. Gizli taraflardaki üç sayı da asal sayıdır. Gizli taraftaki asal sayıların ortalaması kaçtır?

44 59 38

olduğuna dikkat edin. 59'a herhangi bir tek asal eklenirse,

Çözüm : sayı 44'te 38'in her iki tarafındaki toplam 59 olan bir çift sayıyı elde etmek için, hem 44'e hem de 38'e bir çift sayı eklenmelidir. Eklenen sayıların farklı asal olması ve çift olan asal sayının sadece 2 olması nedeniyle bu mümkün değildir. O halde, 59 sayısına çift asal olan 2 sayısını eklememiz gerekir. Yani sabit toplam $59 + 2 = 61$ olur. Böylece ilk kartın gizli numarası $61 - 44 = 17$, son kartın gizli numarası ise $61 - 38 = 23$ olur. Gizli asal sayıların toplamı $2 + 17 + 23 = 42$ olduğundan, asal sayıların ortalaması $42 \div 3 = 14$ bulunur.

Prob. 4.9 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ olmak üzere, aşağıdaki sayıların asal olup olmadıklarını belirleyiniz.

a) $8! + 7$ b) $55^{15} - 33^{13}$ c) $5! + 11$ d) 777771

Çözüm : A) $8! + 7 = 8 \cdot 7 \cdot 6! + 7 = 7(8 \cdot 6! + 1)$ sayısı 7'nin katıdır ve asal olamaz.

B) $505^{15} - 303^{13}$ sayısı tek sayıların farkıdır ve farkları 2'den büyük olduğundan 2 ile kesinlikle bölünür. O halde asal olamaz.

C) $5! + 11 = 131$ sayısı bir asal sayıdır.

D) 777773 sayısının rakamları toplamı 3'ün katıdır ve 3 ile tam bölündüğünden asal olamaz.

Prob. 4.10 ♣ AMC8-2017

Mete bugün okuldan sonra Kağan'ı ziyaret etmek istiyor ve onun yaşadığı sokağı biliyor ama ev numarasını bilmiyor. Ona, "Ev numaram iki haneli ve bununla ilgili aşağıdaki dört ifadeden sadece üçü doğru" diyor.

- (1) Asaldır.
- (2) Çifttir.
- (3) 7 ile bölünebilir.
- (4) Rakamlarından biri 9'dur.

Bu bilgi, Mete'nin Kağan'ın ev numarasını belirlemesini sağlar. O halde, Kağan'ın ev numarasının birler basamağı kaçtır?

Çözüm : (1) ve (2) aynı anda doğru olamaz. İki basamaklı asal bir çift sayı yoktur. O halde, bunların biri kesinlikle yanlış olmalıdır.

(1) ve (3) aynı anda doğru olamaz. İki basamaklı 7 ile bölünen sayı asal olamaz.

Buna göre, yanlış olan (1)'dir. Diğer üçü doğrudur. Sayı çift ve rakamlarından biri 9 ise sayı, A çift olmak üzere 9A biçimindedir. 7'nin katı olan sadece 98 vardır. Yanıt : 8

Prob. 4.11 m ve n pozitif doğal sayılar olmak üzere,

$$K = 2^4 \cdot 3^m \cdot 5^n$$

sayısının pozitif bölen sayısı 30 ise bu sayı en küçük kaçtır?

Çözüm : Pozitif bölen sayısı

$$(4 + 1)(m + 1)(n + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

olduğundan, $(m + 1)(n + 1) = 2 \cdot 3$ olmalıdır. En küçük sayı için n daha küçük alınır. Buna göre, $n + 1 = 2$ ise $n = 1$ ve $m + 1 = 3$ ise $m = 2$ olur. K sayısı da, $K = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 720$ elde edilir.

Prob. 4.12 $25 \cdot 35^n$ sayısının 48 tane pozitif tam böleni olduğuna göre n kaçtır?

Çözüm : $25 \cdot 35^n$ sayısını asal çarpanlarına göre yazmalıyız.

$$25 \cdot 35^n = 5^2 \cdot 7^n \cdot 5^n = 7^n \cdot 5^{n+2}$$

olduğundan, $(n + 1)(n + 3) = 48$ olmalıdır. Buradan $n = 5$ olması gerektiği görülür.

Prob. 4.13 Tüm rakamları asal ve birbirinden farklı olan en büyük asal sayı kaçtır? (Bilgi sorusu)

Çözüm : Rakamları 2, 3, 5, 7 olmalıdır. Son rakam 2 olmaz. 7523 sayısının asal olup olmadığı 83'e kadar olan asal sayılarla bölünmediği kontrol edilerek görülebilir.

Prob. 4.14 42 ile aralarında asal olacak şekilde 100'den büyük en küçük asal olmayan sayı kaçtır?

Çözüm : $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ olduğundan, 42 ile aralarında asal sayılar 2, 3 veya 7 ile bölünmeyen sayılar olmalıdır. 100'den büyük bu koşulu sağlayan sayılar, 101, 103, 107, 109, 113, 115, ... olduğundan asal olmayan en küçük sayı 115 bulunur.

Prob. 4.15 ♣ Sadece iki farklı asal çarpandan oluşan sayılara yarı asal diyelim. Örneğin, $3 \cdot 5 = 15$ sayısı bir yarı asaldır. $9 = 3 \cdot 3$ ve $12 = 2^2 \cdot 3$ sayıları yarı asal değildir. Aşağıdakilerin hangileri doğrudur?

- a) İki farklı yarı asal sayının toplamı da yarı asaldır.
- b) İki farklı yarı asal sayının çarpımı da yarı asaldır.
- c) Bir yarı asal sayının 4 pozitif tam sayı böleni vardır.
- d) 100'den küçük 11 ile bölünen 5 yarı asal vardır.
- e) Ortak böleni olmayan iki yarı asalın toplamı daima çifttir.
- f) Ortak böleni olan iki yarı asal sayının toplamı daima çifttir.
- g) Aralarında asal iki yarı asalın çarpımının 16 pozitif böleni vardır.

Çözüm : a) Yanlış. $3 \cdot 2 + 5 \cdot 2 = 16$ yarı asal değildir.

b) Yanlış. $(3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 2) = 90$ yarı asal değildir.

c) Doğru. $n = a^1 \cdot b^1$ ise pozitif bölen sayısı $(1 + 1)(1 + 1) = 4$ olur.

d) Yanlış. $11 \cdot 2$; $11 \cdot 3$; $11 \cdot 5$; $11 \cdot 7$ olmak üzere 4 yarı asal vardır.

e) Yanlış. $(3 \cdot 5) + (5 \cdot 2) = 25$ tek sayıdır.

f) Yanlış. $(3 \cdot 5) + (3 \cdot 2) = 21$ tek sayıdır.

g) Doğru. $n = a^1 \cdot b^1$ ve $m = c^1 \cdot d^1$ yarı asalları için $m \cdot n = a^1 \cdot b^1 \cdot c^1 \cdot d^1$ sayısının

$$(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$$

pozitif tam sayı böleni vardır.

Ortak Bölen ve Ortak Kat

Alıştırma 5.1.

108'in pozitif bölenlerinden kaç tanesi 18'in katı değildir?

Çözüm :

$$108 = 2^2 \cdot 3^3$$

olduğundan 108'in $(2 + 1)(3 + 1) = 12$ pozitif böleni vardır. Bunların arasında

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

sayısının katı olanlar

$$2 \cdot 3^2 = 18, 2^2 \cdot 3^2 = 36, 2 \cdot 3^3 = 54 \text{ ve } 2^2 \cdot 3^3 = 108$$

olmak üzere 4 tanedir. O halde, $12 - 4 = 8$ tanesi 18'in katı değildir.

Alıştırma 5.2.

10'un katı olan üç basamaklı sayılardan kaç 15 ile tam bölünemez?

Çözüm : 10'un katı olan üç basamaklı sayılar

$$100, 110, \dots, 990$$

sayılarıdır ve bunların sayısı $990 \div 10 = 99$ 'dan

$$90 \div 10 = 9 \text{ çıkarılarak elde edilir.}$$

$$99 - 9 = 90$$

olur. Şimdi, bunların arasından 15'in katı olanları çıkaralım. Hem 10 hem de 15'in katı olan sayılar 30'un katıdır. O halde, 30'un katı olanları çıkaracağız. Buna göre

$$120, 150, \dots, 990$$

örüntüsündeki sayıları çıkarmamız gerekir ki, bu örüntüde

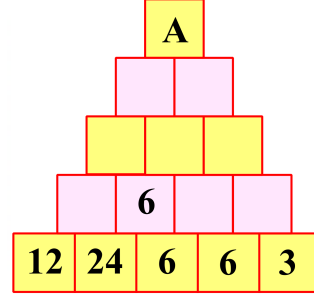
$$990 \div 30 = 33, 90 \div 30 = 3$$

olduğundan $33 - 3 = 30$ sayı vardır. O halde, 10'un katı olan üç basamaklı sayılardan $90 - 30 = 60$ tanesi 15 ile bölünemez.

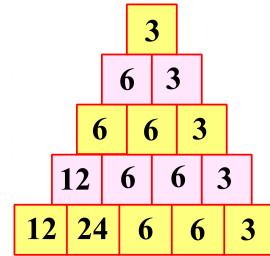
En Büyük Ortak Bölen

Alıştırma 5.3.

Her kare altında kalan komşu iki karedeki sayıların en büyük ortak bölenidir. Buna göre A sayısı kaçtır?



Çözüm :



Alıştırma 5.4.

96, 144 ve 120 sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü kaçtır?

Çözüm :

96	144	120	2
48	72	60	2
24	36	30	2
12	18	15	2
6	9	15	2
3	9	15	3
1	3	5	3
	1	5	5
		1	

$$\text{EBOB}(96, 144, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$$

olur.

Alıştırma 5.5.

108, 90 ve 126 sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü kaçtır?

Çözüm :

90	108	126	2
45	54	63	2
45	27	63	3
15	9	21	3
5	3	7	3
5	1	7	5
1		7	7
		1	

$$\text{EBOB}(90, 108, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$$

olur.

Alıştırma 5.6.

Sarp, 48 kg'lık şeker ve 60 kg'lık unu birbirine karıştırmadan ve hiç artmayacak şekilde eşit büyüklüklerde poşetlere dolduracaktır. Her poşette aynı kiloda un veya şeker olmalıdır. Buna göre, en az kaç poşet gerekir?

Çözüm : En az poşet için 48 ve 60'ın en büyük böleni kadar kg'lık poşet seçilmelidir.

$$\text{EBOB}(48, 60) = 12$$

olduğu kolayca görülebilir. Buna göre,

$48 \div 12 = 4$ tane şeker için, $60 \div 12 = 5$ tane un için toplam 9 poşet gerekir.

Alıştırma 5.7.

Bir okulda 90 beşinci sınıf, 54 altıncı sınıf ve 72 yedinci sınıf öğrencisi vardır. Bir gruptaki tüm öğrencilerin aynı sınıftan olması koşuluyla eşit sayıda öğrenciye sahip gruplar oluşturulacaktır. En az kaç grup oluşturulabilir?

Çözüm : En az grup için, gruplardaki kişi sayısı 90, 54 ve 72'nin en büyük böleni kadar olmalıdır.

$$\text{EBOB}(90, 54, 72) = 18$$

olduğundan,

$$(90 \div 18) + (54 \div 18) + (72 \div 18) = 5 + 3 + 4 = 12$$

grup oluşturulabilir.

Alıştırma 5.8.

Alp 163 kalem ve 176 silgiyi sınıfındaki arkadaşlarına eşit olarak dağıttığında elinde 7 kalem ve 8 silgi kalıyor. Buna göre, Alp kalem ve silgileri en az kaç arkadaşına dağıtmıştır?

Çözüm : Eğer

$$163 - 7 = 156$$

kalem ve

$$176 - 8 = 168$$

silgi olsaydı hiç kalmadan eşit olarak paylaşılacaktı.

$$\text{EBOB}(156, 168) = 12$$

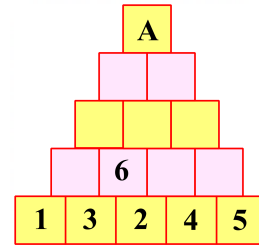
olduğundan, Alp en az

$$(156 \div 12) + (168 \div 12) = 13 + 14 = 27$$

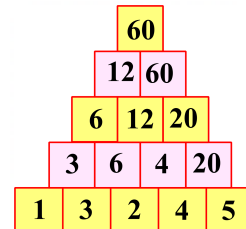
arkadaşına 12'şer olarak dağıtmıştır.

En Küçük Ortak Kat**Alıştırma 5.9.**

Her kare altında kalan komşu iki karedeki sayıların en küçük ortak katıdır. Buna göre A sayısı kaçtır?



Çözüm :



Alıştırma 5.10.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16}$$

toplamını hesaplamak için payda en küçük hangi değerde eşitlenir?

Çözüm : 2, 4, 6, 8, 12, 14 ve 16'nın en küçük ortak katını bulalım. 2'nin en büyük kuvvetini yani 16'yı almalıyız. Böylece, tüm 2 çarpanlarını görmezden gelebiliriz. 3 çarpanının en büyük kuvveti ise 6 ve 12'de 3 olarak karşımıza çıkar. Geriye sadece 14 sayısının 7 çarpanını göz önüne almak gerekir. Böylece,

$$16 \cdot 3 \cdot 7 = 336$$

elde edilir.

Alıştırma 5.11. ♣

A ve B sayılarının en küçük ortak katı 12,
B ve C sayılarının en küçük ortak katı ise 30'dur.
A ve C sayılarının en küçük ortak katının en büyük değeri, en küçük değerinden kaç fazladır?

Çözüm :

$$\text{EKOK}(A, B) = 2 \cdot 2 \cdot 3,$$

$$\text{EKOK}(B, C) = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

yazalım. B sayısı 1, 2, 3 veya 6 olabilir. A ve C'nin EKOK'unun en küçük değeri için B = 6 alınırsa, A = 4 ve C = 5 olur ve EKOK(A, C) = 20 bulunur. A ve C'nin EKOK'unun en büyük değeri için B = 1 alınırsa, A = 12 ve C = 30 olur ve EKOK(A, C) = 60 bulunur. İstenen yanıt $60 - 20 = 40$ elde edilir.

Alıştırma 5.12.

6, 10 ve 12 sayılarının ortak katlarının en küçüğü kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 6 & 10 & 12 & 2 \\ 3 & 5 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ & 1 & & 1 \end{array}$$

olduğundan, $\text{EKOK}(6, 10, 12) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ elde edilir.

Alıştırma 5.13.

36, 54 ve 90 sayılarının EKOK ve EBOB'unu bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 36 & 54 & 90 & 2 \\ 18 & 27 & 45 & 2 \\ 9 & 27 & 45 & 3 \\ 3 & 9 & 15 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ & 1 & 5 & 5 \\ & & 1 & 1 \end{array}$$

olduğundan, $\text{EKOK}(36, 54, 90) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 540$ elde edilir. EBOB'u için daire içine aldığımız üç sayıyı aynı anda bölen sayılar çarpılır. $\text{EBOB}(36, 54, 90) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ olur.

Kesirlerin EKOK'u**Alıştırma 5.14.**

Bir okulda müdür öğrencileri dörder, beşer veya altışar gruplara ayırdığından her defasında 3 öğrenci artmaktadır. Aşağıdaki problemleri çözünüz.

a) Bu okulda en az kaç öğrenci olabilir?

b) Okuldaki öğrenci sayısı 500'den küçük olduğuna göre en fazla kaç olabilir?

Çözüm : a) $\text{EKOK}(4, 5, 6) = 60$ olduğunda, her defasında 3 öğrenci artıyorsa

$$60 + 3 = 63$$

öğrenci vardır.

b) $60 \cdot 8 = 480$ alınırsa 500'den küçük en fazla 483 öğrenci olur.

Asal Çarpanlarla EBOB ve EKOK

★ Asal Çarpanlar yazılışıyla EBOB ve EKOK ★

A ve B sayıları asal çarpanlarına göre yazılsın. Her iki sayıda da **ortak** olan asal çarpanların **en küçük kuvvetli olanlarını çarparsak**, A ve B sayılarının en büyük ortak **böleni** elde edilir.

Her iki sayının ortak olması gerekmeyen **tüm** asal çarpanlarından **en büyük kuvvetli olanlarını çarparsak**, A ve B sayılarının en küçük ortak **katı** elde edilir. Örneğin,

$$\begin{aligned} 60 &= 2^2 \cdot 3 \cdot 5, \\ 18 &= 2 \cdot 3^2 \end{aligned}$$

sayıları için,

$$\text{EBOB}(60, 18) = 2 \cdot 3 = 6, \text{ (ortak olan küçük üslümler)}$$

$$\text{EKOK}(60, 18) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180, \text{ (büyük üslümler)}$$

bulunur.

Alıştırma 5.15.

$A = 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5$ ve $B = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7$ sayılarının EBOB ve EKOK'larını bulunuz.

Çözüm : EBOB için ortak asal çarpanların küçük üslü olanı, EKOK için tüm çarpanların büyük üslü olanları alınarak çarpılır.

$$\begin{aligned} \text{EBOB}(A, B) &= 2^1 \cdot 3^2 = 18, \\ \text{EKOK}(A, B) &= 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 = 11\,340 \end{aligned}$$

Alıştırma 5.16.

Bir sayı örüntüsünün ilk iki terimi 3 ve 4'tür. Sonraki her terim ise, kendinden önceki iki terimin en küçük ortak katıdır. Buna göre, bu örüntünün 1000-inci terimi kaçtır?

Çözüm : $\text{EKOK}(3, 4) = 12$, $\text{EKOK}(4, 12) = 12$, $\text{EKOK}(12, 12) = 12$ olduğundan sayı örüntüsü

$$3, 4, 12, 12, \dots$$

biçiminde devam eder. Yani 1000-inci terimi de 12'dir.

Alıştırma 5.17. ♣

$A = 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^n$, $B = 3^k \cdot 5^4 \cdot 7^3$, $C = 3^2 \cdot 5^m \cdot 7$ olmak üzere,

$$\text{EKOK}(A, B, C) = 3^4 \cdot 5^5 \cdot 7^3$$

$$\text{EBOB}(A, B, C) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$$

ise, k , m ve n doğal sayılarının toplamı en az kaçtır?

Çözüm :

$$\text{EKOK}(A, B, C) = 3^k \cdot 5^5 \cdot 7^3 \text{ ise } k = 4.$$

$$\text{EBOB}(A, B, C) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \text{ ise } m = 2$$

ve $n = 1, 2$ veya 3 olabilir. En az $n = 1$ alınırsa toplam $4 + 2 + 1 = 7$ olur.

Alıştırma 5.18. ♣

Bir sayı örüntüsünün ilk terimi 36'dır. İkinci terimi de iki basamaklı bir sayıdır. İlk iki terim dışındaki her terim ise, kendinden önceki iki terimin en büyük ortak bölenidir. Bu örüntünün 1000-inci terimi 3 ise ikinci terimi en fazla kaç olabilir?

Çözüm : İkinci terim A olsun. EBOB alınarak oluşturulan örüntünün 1000-inci terimi 3 olduğuna göre, iki basamaklı A sayısı da kesinlikle 3 ile bölünmesi gerekir. Hatta $\text{EBOB}(36, A) = 3$ olması gerekir. Kabul edelim ki, A ve 36 sayısının EBOB'ı 9 olsun. Bu durumda, A sayısı 9'un bir katı demektir. Bu durumda örüntü

$$36, 9k, 9, 9, 9, \dots$$

şeklinde devam eder ve 1000-inci terim 9 olurdu. Ama 3 olarak verilmiş. O halde, A sayısı 3'ün katı olan ama 36'nın başka bir bölenine sahip olmayan bir sayı olmalıdır. Bu ise, $A = 93$ olması demektir.

★ EBOB biliniyorsa sayılar nasıl yazılabilir? ★

A ve B sayılarının en büyük ortak böleni d ise, m ve n aralarında asal olmak üzere,

$$A = dm \quad \text{ve} \quad B = dn$$

olur. Böylece, bu iki sayının en küçük ortak katı da

$$\text{EKOK}(A, B) = d \cdot m \cdot n$$

eşitliğinden bulunabilir.

Örneğin, 12 ve 18'in EBOB'u 6'dır.

$$12 = 6 \cdot 2 \quad \text{ve} \quad 18 = 6 \cdot 3$$

yazılabilir ve burada 2 ile 3 aralarında asaldır.

Alıştırma 5.19.

A ve B farklı doğal sayıları için, $EBOB(A, B) = A$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) A sayısı B sayısının tam katıdır.
- b) B sayısı A sayısının tam katıdır.
- c) A sayısı B sayısına eşittir.

Çözüm : $EBOB(A, B) = A$ ise her iki sayı da A sayısının katı olmalıdır. Biri zaten kendisi, o halde

$$B = A \cdot k$$

olmalıdır. Yani, B sayısı A sayısının bir katıdır. Yani sadece b) doğrudur.

Alıştırma 5.20.

A ve B farklı doğal sayıları için, $EKOK(A, B) = A$ ise aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) A sayısı B sayısının katıdır.
- b) B sayısı A sayısının katıdır.
- c) A sayısı B sayısına eşittir.

Çözüm : $EKOK(A, B) = A$ ise, hem A hem B sayıları A sayısının bir böleni olmaları gerekir. Biri zaten kendisi olduğundan bölenidir. O halde, B sayısı da A sayısının bir böleni olmalıdır. Yani,

$$A = B \cdot k$$

olmalıdır. Buna göre A sayısı B sayısının bir katıdır. Yani sadece a) doğrudur.

EBOB Bulmak İçin Farklı Bir Yöntem**Örnek 5.21.**

Keloğlan ile Aykız bir oyun oynuyorlar. Önce her ikisi de bir sayı seçiyorlar, sonra sayısı küçük olan diğerinin sayısından kendi sayısını istediği kadar çıkararak rakibinin sayısını küçültüyor. Bunu yaparken tek şart, çıkardığında sıfır veya negatif sayı olmaması gerekiyor. Oyuna bu şekilde her ikisinin sayısı da eşit oluncaya kadar devam ediyorlar ve en sonunda elde ettikleri eşit olan sayıya da ortak sayımız diyorlar. Keloğlan 108 ve Aykız 288 sayılarını seçtiğine göre, oyun sonunda hangi ortak sayıyı elde ederler?

Çözüm 1. adımda, sayısı küçük olan Keloğlan, dolayısıyla 108 sayısını, Aykız'ın seçtiği 288'den iki kez çıkarıyor. Böylece, Aykız'ın yeni sayısı 72'ye düşer.

	Keloğlan	Aykız
Başlangıç	108	288
1. Adım	108	$288 - 2 \cdot 108 = 72$
2. Adım	$108 - 72 = 36$	72
3. Adım	36	$72 - 36 = 36$

2. adımda artık sayısı küçük olan Aykız ve sayısı 72 olduğundan, 72'yi 108'den bir kez çıkarıyor ve Keloğlan'ın sayısı 36'ya düşüyor.

3. adımda, sayısı küçük olan Keloğlan 36'yı Aykız'ın sayısından yani 72'den çıkarıp Aykız'ın sayısını da 36 yapıyor.

Böylece, 3. adımda her ikisinin sayısı da eşit oldu. O halde, Keloğlan ve Aykız'ın ortak sayıları 36 olur. (**Not** : 36'nın 108 ve 288 sayılarının EBOB'u olduğunu fark ettiniz mi?)

Tablo çizmeden aşağıdaki gibi de gösterebiliriz.

$$(108, 288) \rightarrow (108, 288 - 2 \cdot 108) = (108, 72)$$

$$(108, 72) \rightarrow (108 - 72, 72) = (36, 72)$$

$$(36, 72) \rightarrow (36, 72 - 36) = (36, 36)$$

Alıştırma 5.21.

Keloğlan ile Aykız bir önceki örnekteki oyunu tekrar oynuyorlar. Bu kez Keloğlan 120, Aykız ise 92 sayılarını seçiyorlar. Bu kez ortak sayıları kaç olur?

Çözüm :

$$(120, 92) \rightarrow (120 - 92, 92) = (28, 92)$$

$$(28, 92) \rightarrow (28, 92 - 3 \cdot 28) = (28, 8)$$

$$(28, 8) \rightarrow (28 - 4 \cdot 8, 8) = (4, 8)$$

$$(4, 8) \rightarrow (4, 8 - 4) = (4, 4) = 4$$

Alıştırma 5.22.

Siz de **203** ve **319** sayılarının EBOB'unu bu yöntemle bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned}(203, 319) &\rightarrow (203, 319 - 203) = (203, 116) \\ &\rightarrow (203 - 116, 116) = (87, 116) \\ &\rightarrow (87, 116 - 87) = (87, 29) \\ &\rightarrow (87 - 2 \cdot 29, 29) = (29, 29) = 29.\end{aligned}$$

olduğundan, $\text{EBOB}(203, 319) = 29$ olur.

Alıştırma 5.23.

198 ve **211** sayılarının aralarında asal olduğunu görünüz (Yani, $\text{EBOB}(198, 211) = 1$).

Çözüm :

$$\begin{aligned}(198, 211) &\rightarrow (198, 211 - 198) = (198, 13) \\ &\rightarrow (198 - 14 \cdot 13, 13) = (16, 13) \\ &\rightarrow (16 - 13, 13) = (3, 13) \\ &\rightarrow (3, 13 - 4 \cdot 3) = (3, 1) \\ &\rightarrow (3 - 2 \cdot 1, 1) = (1, 1) = 1\end{aligned}$$

olduğundan, $\text{EBOB}(198, 211) = 1$ olur.

Problemler (EBOB - EKOK)

Prob. 5.1 AMC8-2004

2'den büyük bir doğal sayı, 3, 4, 5 ve 6 sayılarının her birine bölündüğünde kalan 2 oluyor. Bunu sağlayan en küçük sayının rakamları toplamı kaçtır?

Çözüm : 3, 4, 5 ve 6 sayılarının her birine bölünen en küçük sayı bunların en küçük ortak katı olan 60 sayısıdır. Kalanın 2 olması istenildiği için 2 ekleriz. Böylece, 62 sayısı istenen koşula uygundur. Yanıt : $6 + 2 = 8$ bulunur.

Prob. 5.2 Aşağıda A ve B sayılarının EBOB ve EKOK'larını hesaplamak için bölen tablosu yapılmıştır. C sayısının 5'ten küçük bir asal sayı olduğunu da göz önüne alarak, $A + B + C + D + E$ toplamının hangi değerler olabileceğini bulunuz.

A	B	C
D	E	C
B	1	C
5		5
1		

???

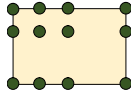
Prob. 5.3 AJHSME-1987

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$$

toplamını hesaplamak için, kesirlerin ortak paydası en küçük kaçta eşitlenir?

Çözüm : 2, 3, 4, 5, 6, 7 sayılarında 2'nin en fazla ikinci kuvveti, 3, 5 ve 7'nin ise birinci kuvvet vardır. O halde, bu sayıların EKOK'u, $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ olduğundan ortak payda en küçük 420'de eşitlenir.

Prob. 5.4 Kenarları 42 m ve 56 m olan dikdörtgen şeklindeki bir arazinin içine, kenarlarına ve köşelerine eşit aralıklarla ağaç dikilecektir. Buna göre en az kaç ağaç gereklidir.



Çözüm : Önce 42 ve 56'nın EBOB'unu bulalım.

$$\text{EBOB}(42, 56) = \text{EBOB}(6 \cdot 7, 7 \cdot 8) = 14$$

olduğundan 56 m olan kenara köşeler de dahil $4 + 1 = 5$ ağaç dikilir. İç tarafa da ağaç dikileceğinden bu işlem 4 m kenar boyunca 14'er metre arayla $3 + 1 = 4$ kez yapılır. O halde, toplam $(4 + 1)(3 + 1) = 20$ ağaç gereklidir.

Prob. 5.5 ♣ A bir doğal sayı olmak üzere,

$$\text{EBOB}(30, 48, A) = 6$$

$$\text{EKOK}(30, 48, A) = 2160$$

koşulunu sağlayan en küçük A sayısı kaçtır?

Çözüm : $\text{EBOB}(30, 48, A) = 6$ ise $A = 6 \cdot k$ biçiminde olmalıdır. Diğer yandan,

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5, 48 = 2^4 \cdot 3 \text{ ve } A = 2 \cdot 3 \cdot k$$

için : $\text{EKOK}, 2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$ ise 3^3 sayısı A sayısının çarpanı olması gerekir. O halde, A en küçük $A = 2 \cdot 3^3 = 54$ olur.

Prob. 5.6 ♣ Rakamları birbirinden farklı 1BC ve 7A sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü 39 ise $A + B + C$ kaçtır? **Çözüm :** 1BC ve 7A sayılarının ortak bölenlerinin en büyüğü 39 ise, her ikisi de 39 ile tam bölünmelidir.

$$39 \cdot 2 = 78$$

olduğundan A rakamı 8'dir. Şimdi B ve C rakamlarını bulalım.

$$39 \cdot 3 = 117, 39 \cdot 4 = 156 \text{ ve } 39 \cdot 5 = 195$$

olduğundan, ilk bakışta üç tane sayı olabilir gibi görülebilir. Fakat, bunlardan 117 ve 156 olamaz. 117 sayısının rakamları farklı olduğundan olamaz. 156 ile 78'in ortak bölenlerinin en büyüğü 78 olur ve sorudaki ifadeyle çelişir O halde,

$$1BC = 195 \text{ ise } B = 9 \text{ ve } C = 5$$

bulunur. $A + B + C = 8 + 9 + 5 = 22$ elde edilir.

Prob. 5.7 80 ve 120 sayılarının kaç ortak pozitif böleni vardır?

Çözüm :

$$\text{EBOB}(80, 120) = \text{EBOB}(2^4 \cdot 5, 2^3 \cdot 3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 5^1$$

olduğundan, her ikisini de bölen

$$(3 + 1)(1 + 1) = 8$$

pozitif böleni vardır.

Prob. 5.8 $A = 3^5 5^3 7^4$ ve $B = 3^4 5^4 7^3$ sayılarının kaç ortak pozitif tam sayı böleni vardır?

Çözüm :

$$\text{EBOB}(A, B) = 3^4 5^3 7^3$$

olduğundan,

$$(4 + 1)(3 + 1)(3 + 1) = 80$$

pozitif tam böleni vardır.

Prob. 5.9 12, 15 ve 18 ile bölündüğünde 4 kalanını veren üç basamaklı kaç pozitif tam sayı vardır?

Çözüm :

$$\text{EKOK}(12, 15, 18) = \text{EKOK}(2^2 \cdot 3, 3 \cdot 5, 2 \cdot 3^2) \\ = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 180 + 4 &= 184, & 180 \cdot 2 + 4 &= 364, \\ 180 \cdot 3 + 4 &= 544, & 180 \cdot 4 + 4 &= 724, \\ 180 \cdot 5 + 4 &= 904, \end{aligned}$$

olmak üzere beş pozitif tam sayı vardır.

Prob. 5.10 ♣ Bir A doğal sayısı için,

$$\text{EBOB}(A, A) + \text{EKOK}(A, A) + \text{EBOB}(1, A)$$

toplamı 43 ise A kaçtır?

Çözüm : Aynı iki sayının en büyük ortak böleni de, en küçük ortak katı da kendisidir. Yani

$$\text{EBOB}(A, A) = A, \quad \text{EKOK}(A, A) = A$$

olur. $\text{EBOB}(1, A) = 1$ olduğundan,

$$\text{EBOB}(A, A) + \text{EKOK}(A, A) + \text{EBOB}(1, A) = 2A + 1 \\ \text{bulunur. Böylece, } 2A + 1 = 43 \text{ eşitliğinden } A = 21 \text{ elde edilir.}$$

Prob. 5.11 4171 ve 3977 sayılarının EBOB'unu birini diğerinden çıkarma yöntemini kullanarak bulunuz. (Örnek 5.22'deki yöntemi kullanınız)

Çözüm :

$$\begin{aligned} (4171, 3977) &\longrightarrow (4171 - 3977, 3977) = (194, 3977) \\ &\longrightarrow (194, 3977 - 20 \cdot 194) = (194, 97) \\ &\longrightarrow (194 - 1 \cdot 97, 97) = (97, 97) = 97 \end{aligned}$$

elde edilir.

Prob. 5.12 Yıldız işlemi aşağıdaki gibi tanımlanıyor.

$$m \star n = \begin{cases} 1, & \text{EBOB}(m, n) = 1 \\ 0, & \text{EBOB}(m, n) \neq 1 \end{cases}$$

Yani, $\text{EBOB}(m, n) = 1$ ise $m \star n = 1$ ve $\text{EBOB}(m, n) \neq 1$ ise $m \star n = 0$ oluyor. Buna göre, aşağıdakileri yanıtlayınız.

a) $1 \star 2 + 2 \star 3 + 3 \star 4 + 4 \star 5 + \dots + 99 \star 100$

Çözüm : Ardışık iki tam sayının EBOB'ları daima 1'dir. O halde, bu toplamda 99 tane 1 olduğundan yanıt 99 olur.

b) $20 \star 1 + 20 \star 2 + 20 \star 3 + 20 \star 4 + \dots + 20 \star 20$

Çözüm : $20 = 2^2 \cdot 5$ olduğundan 2 veya 5'in katı olan tüm n sayıları için $\text{EBOB}(20, n) > 1$ ve $20 \star n = 0$ olacaktır. Buna göre, sadece

$$n = 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19$$

için $\text{EBOB}(20, n) = 1$ ve $20 \star n = 1$ olur. Yani, istenen toplam 8 bulunur.

Prob. 5.13 ♣ Bazı matematik kaynaklarında EBOB ve EKOK farklı ve daha kısa gösterilebilir. m ve n birer pozitif tam sayı olmak üzere,

m ve n 'nin en büyük ortak böleni (m, n) ile,

m ve n 'nin en küçük ortak katı ise $[m, n]$ ile gösterilir. Buna göre aşağıdakileri yanıtlayınız.

a) $[(12, 30), (8, 20)] = ?$

Çözüm : a) $[(12, 30), (8, 20)] = [6, 4] = 12$ olur.

b) $(n, 2) + [n, 15] = 32$ olan kaç n sayısı vardır?

Çözüm : b) $(n, 2)$ değeri 1 veya 2 olabilir. 1 olursa geriye $[n, 15] = 31$ kalır ki bu mümkün değildir. O halde $(n, 2) = 2$ ve $[n, 15] = 30$ olmalıdır. n sayısının 2 ile bölünmesi ve $[n, 15] = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ eşitliğini sağlaması gerekir. Buna göre, n sayısı 2'nin birinci kuvvetine, 3'ün ve 5'in ise en fazla birinci kuvvetine bölünmesi gerekir. Yani, n sayısı 2, 6, 10, 30 sayıları olabilir.

c) $(n, 2) + [n, 15] = 31$ olan kaç n sayısı vardır?

Çözüm : c) $(n, 2)$ değeri 1 veya 2 olabilir. 2 olursa geriye $[n, 15] = 29$ kalır ki bu mümkün değildir. O halde $(n, 2) = 1$ ve $[n, 15] = 30$ olmalıdır. Fakat, $[n, 15] = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan n sayısı mutlaka 2'ile bölünmelidir. Ama bu durumda $(n, 2) = 1$ olmaz. O halde, $(n, 2) + [n, 15] = 31$ olacak şekilde n sayısı olamaz.

Prob. 5.14 ♣ Alp, m ve n sayılarının EBOB'unu tablo kullanarak aşağıdaki yöntemle buluyor.

1. **Adım :** İki sütunlu bir tablonun birinci satırına büyüktен küçüğe doğru m ve n sayılarını yazıyor.

2. **Adım :** Tablonun her satırındaki soldan ilk sayıyı sağdaki sayıya bölüp, böleni ve kalanı sırasıyla bir altındaki satıra yazıyor.

3. **Adım :** Kalan 0 olan satıra kadar devam ediyor.

Sonuç : Elde edilen tablonun son satırındaki soldan ilk sayı m ve n sayılarının EBOB'udur.

48	18
18	12
12	6
6	0

Alp; 48 ile 18 sayılarının en büyük ortak bölenini yandaki gibi bulmuştur.

$\Rightarrow$

$$\text{EBOB}(48, 18) = 6$$

m	48
A	15
B	C
D	E

tablosuna göre aşağıdakileri yanıtlayınız.

a) $\text{EBOB}(m, 48)$ kaçtır?

Çözüm : $A = 48$, $B = 15$ ve $48 = 3 \cdot 15 + 3$ olduğundan $C = D = 3$ ve $E = 0$ olur. $\text{EBOB}(m, 48) = 3$ bulunur.

b) m sayısı üç basamaklı ise en fazla kaç olabilir?

Çözüm : $m = 48 \cdot k + 15$ formunda olmalıdır. $k = 20$ alınırsa, m sayısı üç basamaklı olarak en fazla $m = 48 \cdot 20 + 15 = 975$ olur.

Ardışık Sayıların Toplamı

Alıştırma 6.1.

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) 213, 214, 215, ..., 311 sayı örüntüsünde kaç sayı vardır?

Çözüm :

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{311 - 213}{1} + 1 = 99$$

b) 213, 215, 217, ..., 311 sayı örüntüsünde kaç sayı vardır?

Çözüm :

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{311 - 213}{2} + 1 = 50$$

c) 213, 214, 215, 216, ..., 311 sayı örüntüsünde kaç çift sayı vardır?

Çözüm :

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{310 - 214}{2} + 1 = 49$$

d) 213, 221, 229, 237, ..., 309 sayı örüntüsünde kaç sayı vardır?

Çözüm :

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{309 - 213}{8} + 1 = 13$$

e) 11, 112, 213, 314, ..., 1930 sayı örüntüsünde kaç sayı vardır?

Çözüm :

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{1930 - 11}{101} + 1 = 20$$

Alıştırma 6.2.

Tam 20 terimi olan 13 ile başlayan bir sayı örüntüsü 7'şer olarak artıyorsa son terimi kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 &= \frac{x - 13}{7} + 1 = 20 \\ \Rightarrow \frac{x - 13}{7} &= 19 \Rightarrow x - 13 = 133 \end{aligned}$$

ise $x = 146$ olur.

Alıştırma 6.3.

20 sayıdan oluşan bir sayı örüntüsünde artış miktarı 7'dir. Son terim 511 ise ilk terim kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 &= \frac{511 - x}{7} + 1 = 20 \\ \Rightarrow \frac{511 - x}{7} &= 19 \\ \Rightarrow 511 - x &= 133 \end{aligned}$$

ise $x = 378$ bulunur.

Alıştırma 6.4.

Yağmur her gün bir önceki günden 10 tane daha fazla soru çözmektedir. İlk gün 25 soru çözdüğüne göre, 41'inci gün kaç soru çözmüştür?

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 &= \frac{x - 25}{10} + 1 = 41 \\ \Rightarrow \frac{x - 25}{10} &= 40 \Rightarrow x - 25 = 400 \end{aligned}$$

ise $x = 425$ bulunur.

Alıştırma 6.5.

Yağmur her gün bir önceki günden 10 tane daha fazla soru çözmektedir. 13'üncü gün 215 soru çözdüğüne göre, ikinci gün kaç soru çözmüştür?

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 &= \frac{215 - x}{10} + 1 = 13 \\ \Rightarrow \frac{215 - x}{10} &= 12 \Rightarrow 215 - x = 120 \end{aligned}$$

ise $x = 95$ bulunur. O halde, ikinci gün $95 + 10 = 105$ soru çözmüştür.

Alıştırma 6.6.

11'den itibaren sayıların küpleri alınarak elde edilen

$$11^3, 12^3, 13^3, 14^3, 15^3, \dots, 11^6$$

sayı örüntüsü için aşağıdakileri yanıtlayınız.

a) Bu örüntüde 11^6 teriminden bir önceki üslü sayıyı yazınız.

Çözüm : $11^6 = 121^3$ olduğundan bir önceki terim 120^3 olur.

b) Bu sayı örüntüsünde kaç sayı vardır?

Çözüm : $121 - 11 + 1 = 111$ sayı vardır.

c) Bu sayı örüntüsünde 5 ile tam bölünen kaç sayı vardır?

Çözüm : $15^2, 20^3, \dots, 120^3$ sayıları 5 ile bölünür.

$$\frac{120 - 15}{5} + 1 = 22$$

tanisi 5 ile bölünür.

Ardışık Sayıların Gösterilmesi**Alıştırma 6.7.**

5'in katı olan ardışık 4 sayının toplamı 210 ise bu sayıların en küçüğü kaçtır?

Çözüm : 5'in katı olan ardışık 4 sayı

$$5n, 5n + 5, 5n + 10, 5n + 15,$$

biçiminde gösterebiliriz. Topamları da,

$$5n + 5n + 5 + 5n + 10 + 5n + 15 = 20n + 30 = 210$$

eşitliğinden $n = 9$ ve en küçüğü 45 elde edilir.

Alıştırma 6.8.

6 ile bölündüğünde 1 kalanını veren ardışık 4 sayının toplamı üç basamaklıdır. Bu toplam en az kaç olabilir?

Çözüm : 6'ile bölündüğünde 1 kalanını veren ardışık 4 sayıyı

$$6n + 1, 6n + 7, 6n + 13, 6n + 19,$$

biçiminde gösterebiliriz.

$$6n + 1 + 6n + 7 + 6n + 13 + 6n + 19 = 24n + 40,$$

ifadesi $n = 3$ için en az $24 \cdot 3 + 40 = 112$ olur. $n = 2$ için iki basamaklı olacağını görebilirsiniz.

Alıştırma 6.9.

6 ile tam bölünemeyen ardışık üç tek sayının toplamının olabileceği en küçük üç basamaklı sayı kaçtır?

Çözüm : 6 ile tam bölünemeyen ardışık üç tek sayıyı

$$6n + 1, 6n + 3, 6n + 5,$$

biçiminde gösterebiliriz. O halde, istenen sayı

$$6n + 1 + 6n + 3 + 6n + 5 = 18n + 9,$$

formunda olmalıdır. $n = 6$ için 117 olur. Bu durumda, sayılar 37, 39, 41 olacaktır.

Alıştırma 6.10.

4 ile tam bölünemeyen ardışık 3 sayının toplamı 30, 42, 48 ve 66 sayılarından hangisi olamaz?

Çözüm : 4'ile tam bölünemeyen ardışık üç sayının toplamı $4n + 1 + 4n + 2 + 4n + 3 = 12n + 6 = 6(2n + 1)$ olduğundan, 6 ile bir tek sayının çarpımı olmalıdır.

$$30 = 6 \cdot 5, \quad 42 = 6 \cdot 7, \quad 66 = 6 \cdot 11$$

istenen şekildedir. $6(2n + 1) = 48$ olamaz.

Alıştırma 6.11.

Aşağıdaki sayı örüntüsünde 101'inci terim kaçtır?

$$13, \quad 19, \quad 25, \quad 31, \quad 37, \dots$$

Çözüm : Artış miktarı 6 olduğundan,

$$\begin{aligned} 101. \text{ terim} &= 1. \text{ Terim} + (101 - 1) \cdot (\text{Artış Miktarı}) \\ &= 13 + 100 \cdot 6 \\ &= 613 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 6.12.

Aşağıdaki sayı örüntüsünde 20'nci terim kaçtır?

$$201, \quad 197, \quad 193, \quad 189, \quad 185, \dots$$

Çözüm : Azalış miktarı 4 olduğundan,

$$\begin{aligned} 20. \text{ terim} &= 1. \text{ Terim} - (20 - 1) \cdot (\text{Azalış Miktarı}) \\ &= 201 - 19 \cdot 4 \\ &= 125 \end{aligned}$$

elde edilir.

Ardışık Sayıların Toplamı

Alıştırma 6.13.

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ toplamını örnekteki gibi yaparak bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \\ 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 \\ \hline 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 7 \cdot 8 = 56 \end{array}$$

olduğundan, istenen toplam $56 \div 2 = 28$ olur.

Alıştırma 6.14.

6, 13, 20, 27, 34, 41, 48, 55 sayı örüntüsünde kaç sayı vardır. Bunların toplamını örnekteki gibi yaparak bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{array}{r} 6 + 13 + 20 + 27 + 34 + 41 + 48 + 55 \\ 55 + 48 + 41 + 34 + 27 + 20 + 13 + 6 \\ \hline 61 + 61 + 61 + 61 + 61 + 61 + 61 + 61 = 8 \cdot 61 \end{array}$$

olduğundan, istenen toplam $8 \cdot 61 \div 2 = 244$ olur.

Gauss Toplam Formülü

Şimdi yukarıdaki Örneklerdeki yöntemi kullanarak elde edilen bir formül verelim. Bu formüle Gauss formülü de denir ve 1'den itibaren birer birer artan sayıların toplamını

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n \times (n + 1)}{2}$$

formülüyle hemen bulabiliriz. En son sayıyı n ile gösterdiğimizize dikkat ediniz. Bu formülü kullanarak,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

bulunur. Örneğin,

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 29 + 30$$

toplamını da hemen hesaplayabiliriz. $n = 30$ 'dur ve

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 29 + 30 = \frac{30 \times 31}{2} = 465$$

elde edilir.

Alıştırma 6.15.

Aşağıdaki toplamı hesaplayınız.

i. $1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \dots\dots\dots$ **Çözüm :**

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$

ii. $1 + 2 + 3 + \dots + 49 = \dots\dots\dots$ **Çözüm :**

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$$

iii. $12 + 13 + 14 + \dots + 49 = \dots\dots\dots$ **Çözüm :**

$$12 + 13 + \dots + 49 = 1225 - 66 = 1159$$

Alıştırma 6.16.

$S = 11 + 22 + 33 + 44 + \dots + 88 + 99$ toplamını örnekteki gibi yaparak bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} S &= 11 + 22 + 33 + 44 + \dots + 88 + 99 \\ &= 11 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 11 \cdot 3 + \dots + 11 \cdot 9 \\ &= 11 (1 + 2 + \dots + 9) \\ &= 11 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 495. \end{aligned}$$

Ardışık Sayıların Toplam Formülü

Hep aynı şekilde artan ardışık sayıların toplamını, terim sayısını en küçük en büyük terimin ortalamasıyla çarparak buluruz. İki sayının ortalamasını bu iki sayıyı toplayıp ikiye bölerek buluruz. Terim sayısını bu sayıyla çarparsak verilen tüm ardışık sayıların toplamını bulmuş oluruz.

ARDIŞIK SAYILARIN TOPLAMI

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1$$

$$\text{TOPLAM} = (\text{Terim Sayısı}) \times \frac{\text{Son Terim} + \text{İlk Terim}}{2}$$

Alıştırma 6.17.

7, 13, 19, 25, 31, ..., 601, 607 sayı örüntüsünde kaç sayı vardır. Bunların toplamını bulunuz.

Çözüm : En küçük ve en büyük terimlerin ortalaması

$$\frac{607 + 7}{2} = 307$$

ve Terim Sayısı = $\frac{607 - 7}{6} + 1 = 101$ olduğundan
toplam $101 \cdot 307 = 31\,007$ bulunur.

Alıştırma 6.18.

101, 110, 119, 128, ..., 893, 902 sayı örüntüsünde kaç sayı vardır? Bunların toplamını bulunuz.

Çözüm : En küçük ve en büyük terimlerin ortalaması

$$\frac{902 + 101}{2} = \frac{1003}{2}$$

ve Terim Sayısı = $\frac{902 - 101}{9} + 1 = 90$ olduğundan
toplam $90 \cdot \frac{1003}{2} = 45\,135$ bulunur.

Alıştırma 6.19.

Alper yaz kampında her gün bir önceki günden 100 metre daha fazla yürümektedir. Kampın ilk gününde 3400 metre yürüdüğüne göre 12-inci gün sonunda toplam kaç metre yürümüş olur?

Çözüm : 12-inci gün

$$3400 + 11 \cdot 100 = 4500$$

metre yürümüşür. O halde 12 gün boyunca

$$\begin{aligned} S &= 3400 + 3500 + \dots + 4500 \\ &= 12 \cdot \frac{3400 + 4500}{2} = 47400 \end{aligned}$$

metre yürür.

Alıştırma 6.20. ♣

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, ..., 101, 101, ...

biçiminde her sayının kendisi kadar tekrarlandığı bir sayı örüntüsünde ilk 101 sayısı baştan kaçınıcı terimdir?

Çözüm : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, ..., 100 sayı örüntüsünde

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5050$$

terim vardır. İlk 101 sayısı $5050 + 1 = 5051$ -inci terimdir.

Alıştırma 6.21. ♣

1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, ...

biçiminde her tek sayının kendisi kadar tekrarlandığı bir sayı örüntüsünde 101-inci terim kaçtır?

Çözüm : Terim sayısının 100'e yakın olduğu bir değer bulalım.

$$1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 10 \cdot \left(\frac{19 - 1}{2} + 1 \right) = 100$$

olduğundan, 101-inci terim 21 olur.

Alıştırma 6.22.

$2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \dots 2^{50} = 8^n$ eşitliğine göre n doğal sayısı kaçtır?

Çözüm : $2^{1+2+3+\dots+50} = 2^{3n}$ eşitliğinden,

$$1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \cdot 51}{2} = 1275$$

olduğundan, $3n = 1275$ ve $n = 425$ elde edilir.

Alıştırma 6.23. ♣

13 ardışık tek sayının toplamı 325 olduğuna göre, bu 13 ardışık sayının en küçüğü kaçtır?

Çözüm : Tam ortadaki 7-inci sayıya n diyelim. n sayısından küçük olan 6 tek sayı

$$n - 2, n - 4, n - 6, n - 8, n - 10, n - 12,$$

n sayısından büyük olan 6 tek sayı

$$n + 2, n + 4, n + 6, n + 8, n + 10, n + 12,$$

olur. Bu 13 sayının toplamı $13n = 325$ eşitliğinden $n = 25$ olur. En küçük sayı $25 - 12 = 13$ bulunur.

Artış Miktarı Katlanarak Artan Ardışık Sayıların Toplamı

Alıştırma 6.24.

Artış miktarı 5'in katları olarak artan aşağıdaki sayı örüntüsünde 11'inci adımdaki sayı kaçtır?

11, 16, 26, 41, 61, ...

Çözüm : 11-inci adımdaki sayıyı, 10-uncu adımdaki sayıya 5'ün 10 katını ekleyerek buluruz. Yani ilk terimden itibaren artış miktarları :

5, 10, 15, ..., 50

olacaktır. Buna göre, 11-inci adımdaki sayı :

$$\begin{aligned} &= 11 + 5 + 10 + \dots + 50 \\ &= 11 + 5 (1 + 2 + \dots + 10) \\ &= 11 + 5 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 286 \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 6.25.

Artış miktarı 3'ün katları olarak artan aşağıdaki sayı örüntüsünde 101'inci adımdaki sayı kaçtır?

11, 14, 20, 29, 41, ...

Çözüm : 101-inci adımdaki sayı 100-üncü adımdaki sayıdan $3 \cdot 100 = 300$ daha fazla olacaktır. O halde, 101-inci adımdaki sayı, birinci adımdaki sayıya tüm artış miktarları eklenerek bulunabilir.

$$\begin{aligned} 11 + 3 + 6 + \dots + 300 &= 11 + 3 (1 + 2 + \dots + 100) \\ &= 11 + 3 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} \\ &= 11 + 15150 \\ &= 15161 \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 6.26. ♣

Aşağıdaki 11×11 ölçülerindeki büyük tablo, 1'den itibaren sol alt köşeden belirli bir kurala göre sırayla sayma sayılarıyla doldurulmaya başlanıyor. Bu tabloda sağ üst köşede bulunan N sayısı kaçtır?

										N
17	18	19	20	21						
16	15	14	13							
5	6	7	12							
4	3	8	11							
1	2	9	10							

Çözüm : Artış miktarı 2, 4, 6, 8, biçiminde devam etmektedir. Buna göre, 11'inci sayı için 10-uncudan sonra $10 \cdot 2$ artış yapılır. Buna göre, 11-inci sayı

$$1 + 2 (1 + 2 + 3 + \dots + 10) = 1 + 10 \cdot 11 = 111 \text{ bulunur.}$$

Alıştırma 6.27.

Ege'nin 43 sayfalık kitabında, sayfalar numaralandırılırken kullanılan tüm rakamların toplamının 9 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm :

$$1 + 2 + \dots + 9 = 45$$

$$10, 11, \dots, 19 \Rightarrow 10 \cdot 1 + 45 = 55,$$

$$20, 21, \dots, 29 \Rightarrow 10 \cdot 2 + 45 = 65,$$

$$30, 31, \dots, 39 \Rightarrow 10 \cdot 3 + 45 = 75,$$

$$40, 41, 42, 43 \Rightarrow 4 \cdot 4 + (1 + 2 + 3) = 22$$

olduğundan $45 + 55 + 65 + 75 + 22 = 262$ olur. 9 ile bölümünden kalan da 1'dir.

Kareler Toplamı İçin Kısa Yöntem

Doğal Sayıların Karelerinin Toplamı

1'den n 'ye kadar doğal sayıların karelerinin toplamı

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

formülüyle bulunur. Örneğin,

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 10^2 &= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \\ &= 5 \cdot 11 \cdot 7 = 385 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 6.28.

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2$ sayısının asal çarpanlarını bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 &= \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} \\ &= 3 \cdot 5 \cdot 19 \end{aligned}$$

olduğundan, 3, 5 ve 19 olur.

Kuvvetler Toplamını Hesaplama

Bir Doğal Sayının Kuvvetlerinin Toplamı

Bir a doğal sayısının üslerini 0'dan itibaren arttırarak bir n sayısına kadar artıralım. Bunların toplamı :

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

formülüyle bulunur. Örneğin,

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^8 = \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 511$$

elde edilir.

Alıştırma 6.29.

$$2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 1$$

ifadesinin kaç pozitif doğal sayı böleni vardır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5) + 1 &= 2 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} + 1 \\ &= 3^6 - 1 + 1 \\ &= 3^6 \end{aligned}$$

olduğundan, $(6 + 1) = 7$ pozitif doğal sayı böleni vardır.

Problemler (Ardışık Sayıların Toplamı)

Prob. 6.1 5 ile bölündüğünde 1 kalanını veren dört basamaklı kaç sayı vardır?

Çözüm : İstenen sayılar

$$1001, 1006, 1011, \dots, 9996$$

sayılarıdır. Bunların sayısı da :

$$\frac{9996 - 1001}{5} + 1 = 1800$$

olur.

Prob. 6.2 131 ile 931 arasındaki tüm çift sayılar yan yana yazılırsa elde edilen sayı kaç basamaklı olur?

Çözüm : 132,134,136,...,930 sayı dizisinde

$$\frac{930 - 132}{2} + 1 = 400$$

sayı vardır. Dolayısıyla elde edilen sayı

$$400 \cdot 3 = 1200$$

basamaklıdır.

Prob. 6.3 Bir sayının 20 ile bölündüğünde elde edilebilecek tüm kalanların toplamı kaçtır?

Çözüm : Kalanların toplamı

$$0 + 1 + 2 + \dots + 19 = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

olur.

Prob. 6.4 $S = 13 + 26 + 39 + \dots + 130$ toplamını hesaplayınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} S &= 13 + 26 + 39 + \dots + 130 \\ &= 13 (1 + 2 + \dots + 10) \\ &= 13 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 715 \end{aligned}$$

olur.

Prob. 6.5 İki tane üç basamaklı birbirinden farklı tek doğal sayının toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Çözüm : En küçük $101 + 103 = 204$ ve en büyük $999 + 997 = 1996$ elde edilir. Yani,

$$204, 206, \dots, 1996$$

sayıları elde edilebilir. Bunların sayısı da :

$$\frac{1996 - 204}{2} + 1 = 897$$

olur.

Prob. 6.6

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Aşağıdaki toplamaları yukarıda verilen formülleri kullanarak hesaplayınız.

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 15 = ?$

Çözüm : $n = 15$ olduğundan,

$$1 + 2 + 3 + \dots + 15 = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120.$$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 15^2 = ?$

Çözüm : $n = 15$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 15^2 &= \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} \\ &= 5 \cdot 8 \cdot 31 \\ &= 1240 \end{aligned}$$

olur.

c) $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{10} = ?$

Çözüm : $a = 2$ ve $n = 10$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{10} &= \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} \\ &= 2047 \end{aligned}$$

elde edilir.

d) $3 + 7 + 11 + 15 + \dots + 99 = ?$

Çözüm : Artış miktarı 4, tam ortadaki terim $\frac{99 + 3}{2} = 51$

ve terim sayısı : $\frac{99 - 3}{4} + 1 = 25$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 3 + 7 + 11 + \dots + 99 &= 51 \cdot 25 \\ &= 1275 \end{aligned}$$

elde edilir.

Prob. 6.7 111'den itibaren 888'e kadar olan tüm üç basamaklı tek sayılar

$$111113115117\dots887$$

biçiminde yan yana yazılırsa elde edilen sayı kaç basamaklı olur?

Çözüm : 111'den 887'ye kadar

$$\frac{887 - 111}{2} + 1 = 339$$

tek sayı vardır. O halde 339 tane üç basamaklı sayı ile

$$339 \times 3 = 1017$$

basamaklı bir sayı oluşur.

Prob. 6.8 Dört tane iki basamaklı birbirinden farklı doğal sayının toplamının alabileceği kaç farklı değer vardır?

Çözüm : En küçük,

$$10 + 11 + 12 + 13 = 46$$

ve en büyük

$$99 + 98 + 97 + 96 = 390$$

olabilir. Bu iki değer arasındaki tüm toplamaları alabileceğinden, istenen şekilde

$$390 - 46 + 1 = 345$$

farklı değer vardır.

Prob. 6.9 7 ve 77 dahil, 7'den 77'ye kadar tüm sayılar yan yana yazılarak elde edilen sayının 3'e bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : 7891011...77 sayısının rakamları toplamını bulalım.

$$(7 + 8 + 9) = 24$$

$$(10 + 11 + \dots + 19) = 10 + 45 = 55$$

$$(20 + 21 + \dots + 29) = 20 + 45 = 65$$

$$(30 + 31 + \dots + 39) = 30 + 45 = 75$$

$$(40 + 41 + \dots + 49) = 40 + 45 = 85$$

$$(50 + 51 + \dots + 59) = 50 + 45 = 95$$

$$(60 + 61 + \dots + 69) = 60 + 45 = 105$$

$$(70 + 71 + \dots + 77) = 8 \cdot 7 + \frac{7 \cdot 8}{2} = 84$$

olduğundan rakamları toplamı

$$24 + 55 + 65 + 75 + 85 + 95 + 105 + 84 = 588$$

olur. $5 + 8 + 8 = 21$ olduğundan 3 ile bölümünden kalan 0'dır.

Yukarıdaki gibi toplamak yerine her toplamın 3 ile bölümünden kalanları da toplayabilirdik. Yani, $0 + 1 + 2 + 0 + 1 + 2 + 0 + 0 = 6$ olur ki, 3 ile tam bölünür.

Prob. 6.10 1'den itibaren doğal sayılar sırasıyla aşağıdaki şekilde yazılarak bir sayı merdiveni oluşturuluyor. Buna göre, 1000'inci eleman kaçinci satırda ve soldan kaçinci sırada bulunur?

1							
2	3						
4	5	6					
7	8	9	10				
11	12	13	14	15			
16	17	18	19	20	21		

Çözüm :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 44 = \frac{44 \cdot 45}{2} = 990$$

olduğundan, 44-üncü satırın en sonundaki elemandır. O halde, 1000 sayısı, 45-inci satırın soldan 10-uncu sayısıdır.

Prob. 6.11

$$S = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + \dots + 20 \cdot 41$$

toplamında her bir terimin renkli yazılmış büyük olan çarpanları 5 artırırsa sonuç ne kadar artar?

Çözüm : Yeni toplamı YS ile gösterelim.

$$\begin{aligned} YS &= 1 \cdot (3 + 5) + 2 \cdot (5 + 5) + \dots + 20 \cdot (41 + 5) \\ &= S + (1 \cdot 5) + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + \dots + 20 \cdot 5 \\ &= S + 5(1 + 2 + \dots + 20) \\ &= S + 1050 \end{aligned}$$

olduğundan, 1050 artar.

Prob. 6.12

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 20$$

toplamındaki tüm çift sayılar %30 artırırsa toplam ne kadar artar?

Çözüm :

$$\begin{aligned} YS &= 1 + \left(2 + 2 \cdot \frac{3}{10}\right) + 3 + \dots + \left(20 + 20 \cdot \frac{3}{10}\right) \\ &= S + \frac{3}{10}(2 + 4 + \dots + 20) \\ &= S + \frac{3}{10} \cdot 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 10) \\ &= S + \frac{3}{10} \cdot 10 \cdot 11 \\ &= S + 33 \end{aligned}$$

Prob. 6.13 AMC8-2015

Bir aritmetik dizi, birinci terimden sonraki her terimin önceki terime sabit bir sayı eklenerek elde edildiği bir dizidir. Bu 5×5 dizisindeki her satır ve her sütun, **beş terimli bir aritmetik dizidir**. X değeri nedir?

1				25
		X		
17				81

Çözüm : Tabloyu doldurmaya başlıyoruz. En üst satırda birinci terim 1 ve beşinci terim 25 vardır, dolayısıyla ortak farkımız $\frac{25-1}{4} = 6$ olur. Böylece ilk satırı doldurabiliriz. Beşinci satırın birinci terimi 17 ve beşinci terimi 81 'dir, dolayısıyla ortak fark $\frac{81-17}{4} = 16$ 'dır. Tablonun beşinci satırını gösterildiği gibi doldurabiliriz. Son olarak, birinci terimi 13 ve beşinci terimi 49 olan aritmetik dizinin üçüncü terimini bulmalıyız. Bu dizinin ortak farkı $\frac{49-13}{4} = 9$ 'dır, yani üçüncü terim $13 + 2 \cdot 9 = 31$ olur.

1	7	13	19	25
		X		
17				81

Prob. 6.14 $2^{11}, 2^{20}, 2^{29}, 2^{38}, \dots$ biçiminde devam eden sayı örüntüsünün 101'inci adımındaki sayının 9'a bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : Bu örüntünün 101-inci adımındaki sayı $2^{11+100 \cdot 9} = 2^{911}$ sayıdır. 2^{911} ün 9 ile bölümünden kalanı bulalım. Sırasıyla 2'nin kuvvetlerinin 9 ile bölümünden kalanları bulalım. 9 ile bölümünden kalanı $\rightarrow$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} 2^1 &\rightarrow 2, & 2^2 &\rightarrow 4, & 2^3 &\rightarrow 8, \\ 2^4 &\rightarrow 7, & 2^5 &\rightarrow 5, & 2^6 &\rightarrow 1, \end{aligned}$$

olduğundan, 2 nin her altıncı kuvvetinin 9 ile bölümünden kalan 1 olur. $911 = 6 \cdot 151 + 5$ olduğundan 2^{911} sayısı için

$$(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdots (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 \\ & & \downarrow \\ & & 5 \end{array}$$

yazılırsa, 9 ile bölümünden kalan $1 \cdot 1 \cdots 1 \cdot 5 = 5$ bulunur.

Prob. 6.15 1, 7, 13, 19, 25, 31, ..., 127, 133

sayılarının toplamının 9 ile bölümünden kalanı bu sayıları toplamadan hesaplayınız. (İpucu : Kalanların oluşturduğu sayı örüntüsünü kullanınız.)

Çözüm : 9 ile bölümünden kalan 1, 7, 4, 1, 7, 4, ... şeklinde devam etmektedir ve bu sayı örüntüsünde

$$\frac{133 - 1}{6} + 1 = 23$$

sayı vardır. O halde, $23 = 3 \cdot 7 + 2$ olduğundan, 8 kez 1 ve 7 kalanı; 7 kez de 4 kalanı elde edilecektir. Bu kalanların toplamı da

$$8 \cdot 1 + 8 \cdot 7 + 7 \cdot 4 = 92$$

olduğundan 92'nin 9 ile bölümünden kalan 2 olur : $92 \xrightarrow{9} 2$.

Prob. 6.16 101, 102, 103, ..., 191, 192 sayılarını 3 ile bölümünden kalanlar aynı olacak şekilde üç gruba ayırırsak, 3 ile bölümünden kalanın 1 olduğu grupta kaç sayı yer alır? **Çözüm :** 101, 102, 103, ..., 191, 192 sayılarının 3 ile bölümünden 1 kalanını verenler

$$103, 106, 109, 112, \dots, 190$$

sayılarıdır. Bunların sayısı da :

$$\frac{190 - 103}{3} + 1 = 30$$

bulunur.

Kümeler

Alıştırma 7.1.

Aşağıdakilerden küme olanları belirtiniz.

- a) Antalya'nın ilçeleri
- b) Haftanın günleri
- c) Zor sorular
- d) Nüfusu fazla olan ülkeler
- e) 3 ve 5'e bölünen asal sayılar

Çözüm : Sorunun zor olması veya nüfusun fazla olması herkese göre değişir. Net olmadıklarından küme belirtmezler.

Alıştırma 7.2.

Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

- a) $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ise $s(A) = \dots\dots\dots$
- b) $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ise $4 \dots\dots A$
- c) $A = \{1, 2, 4, 8\}$ ise $5 \dots\dots A$
- d) $B = \{24\text{'ün asal bölenleri}\}$ ise $s(B) = \dots\dots$
- e) $C = \{\text{KAVAK kelimesinin harfleri}\}$ ise $s(C) = \dots\dots$

Alıştırma 7.3.

Aşağıdakilerden boş küme olanları belirtiniz.

- a) 7 ile tam bölünen asal sayılar.
- b) İki basamaklı çift asal sayılar
- c) 3'ten küçük asal sayılar
- d) 2'den büyük çift asal sayılar
- e) 3'ün bir kuvveti olan asal sayılar.
- f) 3 ile tam bölünen 10'un katları
- g) $A = \{2 \cdot x = 3 \text{ denkleminin doğal sayı çözümleri}\}$

Çözüm : a) 7 ile tam bölünen asal sayı vardır : 7. Bu küme bir elemanlıdır ve boş değildir. ,

- b) İki basamaklı çift asal sayı yoktur. Bu küme boştur.
- c) 3'ten küçük asal sayı 2 vardır. Bu küme boş değildir.
- d) 2'den başka çift asal sayı yoktur. Bu küme boştur.
- e) 3'ün bir kuvveti olan 3 bir asal sayıdır ve bu küme boş değildir.
- f) 3 ile tam bölünen 10'un katlarına bir örnek 30. Bu küme boş değildir.
- g) $A = \{2 \cdot x = 3 \text{ denkleminin doğal sayı çözümleri}\}$. Bir doğal sayının 2 katı bir tek sayı olamaz. Bu küme boştur.

★ Kümenin Ortak Özellik Gösterimi ★

Kümeleri ortak özellikleriyle gösterebileceğimizi belirtmiştik. Örneğin,

$$A = \{6\text{'yı tam bölen doğal sayılar}\}$$

biçiminde yazmıştık. Bazen liste gösteriminde matematiksel semboller kullanırız. Bunun için de, harfli ifadeleri kullanabiliriz. Küme işaretinden sonra

$$x : \text{ veya } x |$$

gösterimleri "***x öyle bir elemandır ki***" şeklinde veya kısaca "***x öyle ki***" biçiminde okunur. Yani, kümede söz konusu olan, dedikodusu yapılacak kişi isim verilmeden gizlice belirtilir. Örneğin, yukarıdaki A kümesini,

$$A = \{x : 6 \text{ sayısı } x \text{ sayısının tam katıdır ve } x \in \mathbb{N}\},$$

$$A = \{x | 6 \text{ sayısı } x \text{ sayısının tam katıdır ve } x \in \mathbb{N}\},$$

biçimlerinde yazabiliriz. Bu kümeleri,

$$A = \{x \text{ öyleki, } 6 \text{ sayısı } x \text{ doğal sayısının tam katıdır}\}$$

biçiminde okuruz.

Alıştırma 7.4.

Aşağıdaki kümenin eleman sayısını bulunuz.

$$A = \{x : x + 2 < 8 \text{ ve } x \text{ asal sayı}\}$$

Çözüm : $x = 2, x = 3, x = 5$ olursa $x + 2 < 8$ eşitsizliği doğru olacağından,

$$A = \{2, 3, 5\} \text{ ve } s(A) = 3$$

bulunur.

Alıştırma 7.5.

Aşağıdaki kümenin eleman sayısını bulunuz.

$$A = \{x : 3x + 2 = 8 \text{ ve } x \in \mathbb{N}\}$$

Çözüm : Sadece $x = 2$ olursa,

$$3x + 2 = 8$$

eşitliği sağlanır.

$$A = \{2\} \text{ ve } s(A) = 1$$

olur.

Alıştırma 7.6.

Aşağıdaki kümenin eleman sayısını bulunuz.

$$A = \{x : x \in \mathbb{N}, 6 \mid x \text{ ve } 11 < x < 26\}$$

(Okunuşu : x öyleki, x 11 ile 26 arasında bir doğal sayıdır ve 6 ile tam bölünür.)

Çözüm : 11 ile 26 arasındaki 6'nın katlarını yazarsak,

$$A = \{12, 18, 24\} \text{ ve } s(A) = 3$$

olur.

Alıştırma 7.7.

Aşağıdaki kümenin eleman sayısını bulunuz.

$$A = \{x : x = 9k, k \in \mathbb{N} \text{ ve } 101 < x < 124\}$$

Çözüm : 101 ile 124 arasındaki 9'un katlarını yazarsak,

$$A = \{108, 117\} \text{ ve } s(A) = 2$$

olur.

Alıştırma 7.8.

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ olmak üzere aşağıdaki kümenin eleman sayısını bulunuz.

$$A = \{x : x = 4k + 3, x < 30 \text{ ve } k \in \mathbb{N}_0\}$$

Çözüm : 30'dan küçük olan ve $x = 4k + 3$ biçimindeki sayıları yazalım.

$$k = 0 \text{ ise } x = 3,$$

$$k = 1 \text{ ise } x = 7,$$

...

$$k = 6 \text{ ise } x = 27$$

ve $A = \{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27\}$ ve $s(A) = 7$ olur.

Alıştırma 7.9.

$\mathbb{N}_5 = \{5, 6, 7, \dots\}$ olmak üzere aşağıdaki kümenin eleman sayısını bulunuz.

$$A = \{x : x \text{ asal}, x = 11k + 3, k \in \mathbb{N}_5, x < 100\}$$

Çözüm :

$$k = 5 \text{ ise } x = 58 \text{ asal sayı değil,}$$

$$k = 6 \text{ ise } x = 69 \text{ asal sayı değil,}$$

$$k = 7 \text{ ise } x = 80 \text{ asal sayı değil,}$$

$$k = 8 \text{ ise } x = 91 \text{ asal sayı değil,}$$

$k = 9$ için $x = 102 > 100$ olduğundan $A = \emptyset$ ve $s(A) = 0$ olur.

Alıştırma 7.10.

$$A = \{3, 5, 7, 9\}$$

kümesini ortak özellik gösterimiyle tanımlayınız.

Çözüm : A kümesi 10'dan küçük ve 2'den büyük tek sayılar olarak verilebilir.

$$A = \{x : x \text{ tek sayı}, 2 < x < 10\}.$$

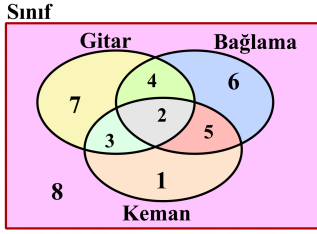
Farklı biçimlerde de vermek mümkündür.

$$A = \{x : x, 9573 \text{ sayısının rakamı}\}$$

gibi.

Alıştırma 7.11.

Aşağıdaki Venn şemasında bir sınıftaki üç müzik aletini çalabilenlerin sayıları gösterilmiştir.



a. Bu sınıfta kaç kişi vardır?

Çözüm : $7 + 4 + 6 + 3 + 2 + 5 + 1 + 8 = 36$ kişi vardır.

b. Gitar çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $7 + 4 + 2 + 3 = 16$ kişi vardır.

c. Gitar ve keman çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $3 + 2 = 5$ kişi vardır.

d. Gitar, bağlama ve keman çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : 2 kişi vardır.

e. Gitar çalabilen ama keman çalamayan kaç kişi vardır?

Çözüm : $7 + 4 = 11$ kişi vardır.

f. Gitar çalabilen ama keman **veya** bağlama çalamayan kaç kişi vardır?

Çözüm : 7 kişi vardır.

g. Gitar çalabilenlerden kaç hem keman hem de bağlama çalamıyor?

Çözüm : 14 kişi vardır.

h. Üç müzik aletinden sadece birini çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $7 + 6 + 1 = 14$ kişi vardır.

i. En az 2 müzik aleti çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $3 + 4 + 5 + 2 = 14$ kişi vardır.

j. Keman veya gitar çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $7 + 4 + 3 + 2 + 5 + 1 = 22$ kişi vardır.

k. Keman veya gitar veya bağlama çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $36 - 8 = 28$ kişi vardır.

l. Üç müzik aletinden en fazla birini çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $8 + 7 + 1 + 6 = 22$ kişi vardır.

m. Üç müzik aletinden en az birini çalabilen kaç kişi vardır?

Çözüm : $36 - 8 = 28$ kişi vardır.

n. Bağlama ve keman çalıp, gitar çalamayan kaç kişi vardır?

Çözüm : $7 - 2 = 5$ kişi vardır.

o. Bağlama veya keman çalıp, gitar çalamayan kaç kişi vardır?

Çözüm : $6 + 5 + 1 = 12$ kişi vardır.

Kümelerin Kesişimi, Birleşimi, Farkı**★ Kümelerin Kesişimi, Birleşimi ve Farkı ★**

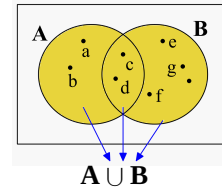
A ve B kümeleri verilsin, bu iki kümenin birleşimi, kesişimi ve farkı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Kümelerin Birleşimi : A ve B gibi iki kümenin **bütün** elemanlarından oluşan kümeye A ile B kümelerinin birleşim kümesi denir ve $A \cup B$ biçiminde gösterilir.

Kısaca,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ veya } x \in B\}$$

biçiminde ifade edilebilir.

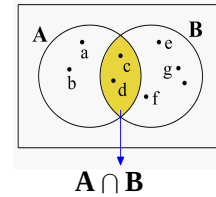


Kümelerin Kesişimi : A ve B gibi iki kümenin **ortak** elemanlarından oluşan kümeye A ile B kümelerinin kesişim kümesi denir ve $A \cap B$ biçiminde gösterilir.

Kısaca,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ ve } x \in B\}$$

biçiminde ifade edilir.



A ve B kümelerinin hiç ortak elemanları yoksa, bu kümelere **ayrık kümeler** denir ve

$$A \cap B = \emptyset$$

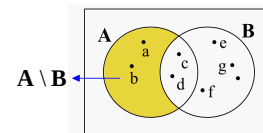
şeklinde yazılır.

Kümelerin Farkı : Bir A kümesinin elemanı olan ve B kümesinin elemanı olmayan elemanların kümesine A ile B kümelerinin farkı denir ve $A \setminus B$ veya $A - B$ ile gösterilir.

Kısaca,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ ve } x \notin B\}$$

ile tanımlanır.



Alıştırma 7.12.

Aşağıda verilen A ve B kümeleri için, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ ve $B \setminus A$ kümelerini bulunuz.

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$B = \{x : x \in \mathbb{N}, 9 \leq x^2 < 50\}$$

Çözüm : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ve $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ olduğundan,

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\},$$

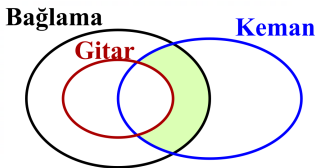
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\};$$

$$A \setminus B = \{1, 2\} \quad B \setminus A = \{7\}$$

olur.

Alıştırma 7.13.

Aşağıda bir sınıftaki, keman, bağlama ve gitar çalan kişiler Venn şemasında gösterilmiştir.



Buna göre, taralı bölgeyi hangisi ifade eder?

- A) Keman ve gitar çalamayıp bağlama çalanlar.
- B) Keman ve bağlama çalıp gitar çalamayanlar.
- C) Bağlama çalıp, keman veya gitar çalamayanlar.

Çözüm : Keman ve bağlama çalıp gitar çalamayanlar.

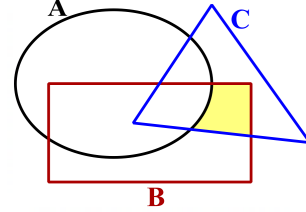
Alıştırma 7.14.

A = Rakamları toplamı 5 olan sayılar.

B = Palindromik sayılar

C = Asal sayılar

olduğuna göre, 13, 11, 131, 212, 111, 101 sayılarından hangisi ya da hangileri taralı bölgede yer alır?



Çözüm : Verilen bölge B ve C'nin kesişiminden olup, A'da olmayanları ifade eder. Buna göre, taralı bölge palindromik ve asal olup, rakamları toplamı 5 olmayan sayıları gösterir.

$$A = \{131, 212\}, \quad B = \{11, 131, 212, 111, 101\}$$

$$C = \{11, 13, 131, 101\}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} (B \cap C) \setminus A &= \{11, 131, 101\} \setminus \{131, 212\} \\ &= \{11, 101\} \end{aligned}$$

elde edilir.

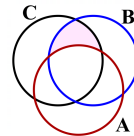
Alıştırma 7.15.

A = {3 ile bölünen pozitif tam sayılar}

B = {5'in pozitif katları}

C = {20'den küçük pozitif tam sayılar}

Bir önceki örneğe göre 5'in pozitif katı olan 20'den küçük tam sayılardan 3 ile bölünemeyenleri hangi kümeyle gösterebiliriz?



Çözüm : $(B \cap C) \setminus A$

Alıştırma 7.16.

$A = \{\text{Sınıftaki mavi gözlü öğrenciler}\}$

$B = \{\text{Sınıftaki gözlüklü öğrenciler}\}$

$C = \{\text{Sınıftaki erkek öğrenciler}\}$

$D = \{\text{Sınıftaki kız öğrenciler}\}$

olduğuna göre, $A \cap [C \setminus (B \cup D)]$ kümesi aşağıdakilerden hangisini ifade eder?

- a) Sınıftaki gözlüklü olmayan mavi gözlü erkek öğrenciler
- b) Sınıftaki mavi gözlü olmayan erkek öğrenciler
- c) Sınıftaki mavi gözlü erkek öğrenciler
- d) Sınıftaki mavi gözlü olmayan gözlüklü erkek öğrenciler

Çözüm : a) Sınıftaki gözlüklü olmayan mavi gözlü erkek öğrenciler

Alıştırma 7.17.

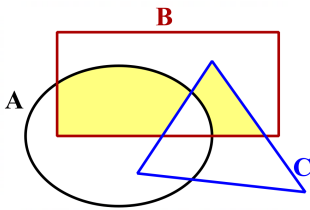
Hatay, Yozgat, Denizli, Bursa, Konya, Elazığ ve İzmir şehirleri arasından aşağıdaki kümeler oluşturuluyor.

$A = 5$ harfli şehirler

$B =$ İsminde A harfi olan şehirler

$C =$ İsminde O harfi olan şehirler

Buna göre, taralı bölgenin eleman sayısı kaçtır?



Çözüm : Verilen bölge hem A hem B bölgelerinde olup, C bölgesinde olmayan elemanlarla, hem B hem C bölgelerinde olup A bölgesinde olmayan elemanların birleşimini ifade eder. Yani,

$$[(A \cap B) \setminus C] \cup [(B \cap C) \setminus A]$$

biçiminde ifade edilebilir.

$$A = \{\text{Hatay, Bursa, Konya, İzmir}\}$$

$$B = \{\text{Hatay, Yozgat, Bursa, Konya, Elazığ}\}$$

$$C = \{\text{Yozgat, Konya}\}$$

Hem A hem B bölgelerinde olup, C bölgesinde olmayan şehirler : **Hatay, Bursa**; hem B hem C bölgelerinde olup A bölgesinde olmayan şehirler **Yozgat** olduğundan, bunların birleşimi

$$\{\text{Hatay, Bursa, Yozgat}\}$$

elde edilir.

BİR GÖSTERİM :

Yukarıdaki Örnek'teki yapılan bölme işlemlerinde sadece bölümle ilgileniyoruz ve kalamı ihmal ediyoruz. Bölme işleminde, bir B sayısının bir n sayısına bölümünden elde edilen bölümü kısaca

$$\text{Bölüm} = \left\lfloor \frac{B}{n} \right\rfloor$$

biçiminde gösterebiliriz. Örneğin, 100'ün 9'a bölümünde elde edilecek bölümü

$$\text{Bölüm} = \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11$$

şeklinde gösterebiliriz. Burada, $\lfloor M \rfloor$ ifadesi M sayısından büyük olmayan en büyük tam sayıyı gösterir.

$$\lfloor 4,95 \rfloor = 4, \quad \lfloor 3,01 \rfloor = 3, \quad \lfloor 5 \rfloor = 5$$

gibidir.

Alıştırma 7.18.

Aşağıdaki kümeler tanımlanıyor.

$$A = \{x : x = 3k, k \in \mathbb{N} \text{ ve } 1 \leq x \leq 100\},$$

$$B = \{x : x = 4k, k \in \mathbb{N} \text{ ve } 1 \leq x \leq 100\},$$

$$C = \{x : x = 5k, k \in \mathbb{N} \text{ ve } 1 \leq x \leq 100\}$$

Buna göre, aşağıdakileri hesaplayınız.

$$\text{a) } s(A) + s(B) + s(C) = ?$$

Çözüm : a)

$$\begin{aligned} s(A) + s(B) + s(C) &= \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor \\ &= 33 + 25 + 20 \\ &= 78 \end{aligned}$$

olur.

$$\text{b) } s(A \cap C) + s(B \cap C) = ?$$

Çözüm :

b)

$$\begin{aligned} s(A \cap C) + s(B \cap C) &= \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4 \cdot 5} \right\rfloor \\ &= 6 + 5 = 11 \end{aligned}$$

olur.

$$\text{c) } s(A \cap B \cap C)$$

Çözüm :

c)

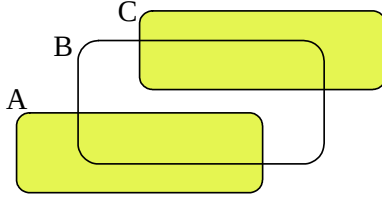
$$s(A \cap B \cap C) = \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 4 \cdot 5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{60} \right\rfloor = 1$$

olur.

Kümelerle Problem Çözümü

Alıştırma 7.19.

Şekilde 3 tane bahçenin sınırları gösterilmiştir ve bu bahçelerin ortak olan bölgeleri de bulunmaktadır. Bahçeler A, B ve C ile gösterilmiştir. A bahçesinin sınırları içerisinde 100 çiçek, B bahçesinde 200 çiçek, C bahçesinde ise 80 çiçek bulunmaktadır. Eğer, A ve B'nin ortak 50, B ve C'nin 40 ortak çiçeği varsa, A, B ve C bahçelerindeki toplam çiçek sayısı kaçtır?



Çözüm : $100 + 200 + 80 = 380$ 'den iki kez sayılan ortak bölgelerdeki çiçek sayılarını çıkarmamız gerekir. Buradan

$$380 - 50 - 40 = 290$$

elde edilir.

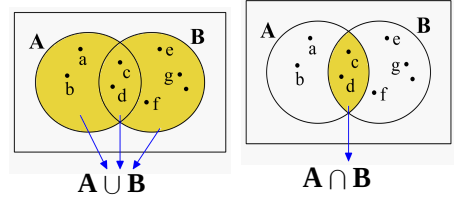
İDİ - İçerme-Dışarma İlkesi

★ İki Küme İçin İÇERME-DIŞARMA İlkesi ★

Herhangi iki küme verildiğinde, bu iki kümenin birleşiminin eleman sayısı, kümelerin eleman sayılarının toplamıyla, kümelerin kesişiminin eleman sayısının farkıdır. Yani,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

eşitliği vardır. Bu eşitliğe **İçerme-Dışarma Eşitliği** denir. Örneğin,



kümeleri için,

$$A = \{a, b, c, d\} \Rightarrow s(A) = 4,$$

$$B = \{c, d, e, g, f\} \Rightarrow s(B) = 5,$$

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, g, f\} \Rightarrow s(A \cup B) = 7$$

$$A \cap B = \{c, d\} \Rightarrow s(A \cap B) = 2$$

olduğundan

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$$

eşitliğinin sağlandığını görünüz. Bu ilkeyi kısaca **İDİ** şeklinde yazacağız.

Alıştırma 7.20.

$\{1, 2, 3, 4, \dots, 99, 100\}$ kümesinin elemanlarından kaç tanesi 4 veya 9 ile tam bölünür?

Çözüm : Bu kümenin 4 ile bölünen elemanlarından oluşan küme

$$A = \{4, 8, 12, \dots, 100\}$$

olmak üzere, $100 \div 4 = 25$ elemanlıdır. Bu kümenin 7 ile bölünen elemanlarından oluşan küme ise,

$$B = \{9, 18, 27, \dots, 99\}$$

olmak üzere, $100 \div 9 \simeq 11$ (sadece bölünen yazdık) elemanlıdır. Hem 4 hem 9 ile bölünen elemanlar 36'nın katı olmalıdır.

$$A \cap B = \{36, 72\}$$

ve $100 \div 36 \simeq 2$ (sadece bölünen yazdık) elemanlıdır. Sonuç olarak, $s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B)$ eşitliğinden, $25 + 11 - 2 = 34$ eleman 4 ile veya 9 ile tam bölünür.

Alıştırma 7.21.

50 kişilik bir sınıftaki öğrencilerden bazıları Rusça veya Almanca konuşabilmektedir. Almanca konuşabilen 18 kişi, Rusça konuşabilen 22 kişi, Rusça veya Almanca konuşabilen 34 kişi varsa, bu sınıfta bu iki dilin herhangi birini konuşmayan kişi sayısı iki dili birden konuşan kişi sayısından ne kadar fazladır?

Çözüm : Soruya göre küme şemasını çizelim. Bu iki dili konuşamayan

$$50 - 34 = 16$$

kişi vardır.

$$s(A \cup R) = s(A) + s(R) - s(A \cap R)$$

$$34 = 18 + 22 - x$$

eşitliğinden $x = s(A \cap R) = 6$ olur. O halde, bu iki dilin herhangi birini konuşmayan kişi sayısı iki dili birden konuşan kişi sayısından $16 - 6 = 10$ fazladır.

Alıştırma 7.22.

Bir sınıftaki öğrencilerden bazıları basketbol veya futbol oynamaktadır.

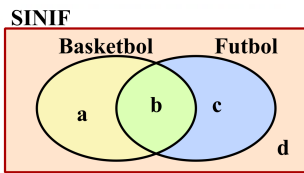
i) Futbol oynamayanların sayısı 32'dir.

ii) Futbol oynayıp basketbol oynamayanların sayısı ise 26'dır.

iii) Hem basketbol hem futbol oynayanların sayısı 5'dir.

Buna göre, bu sınıfta toplam kaç kişi vardır?

Çözüm : Soruya göre küme şemasını çizelim.



Futbol oynamayanların sayısı 32 ise $a + d = 32$ 'dir. Futbol oynayıp basketbol oynamayanların sayısı 26 ise $c = 26$ olur. Hem basketbol hem futbol oynayanların sayısı 5 ise $b = 5$ olur. O halde,

$$a + b + c + d = 32 + 26 + 5 = 63$$

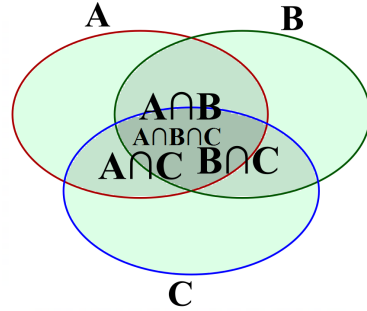
bulunur.

★ Üç Küme İçin İÇERME-DIŞARMA İlkesi ★

Herhangi üç küme A , B ve C kümesi verildiğinde, bu üç kümenin birleşiminin eleman sayısı aşağıdaki değere eşittir.

$$\begin{aligned} s(A \cup B \cup C) &= s(A) + s(B) + s(C) \\ &\quad - s(A \cap B) - s(A \cap C) - s(B \cap C) \\ &\quad + s(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Bu eşitliğe üç küme için **içerme dışarma ilkesi** denir. Bu eşitliğin doğruluğunu aşağıdaki Venn şeması üzerinden anlatalım.



A , B ve C kümelerinin eleman sayıları toplanırsa, $A \cap B$, $A \cap C$ ve $B \cap C$ kümelerinin her birinin elemanları iki kez hesaba katılmış olur. O halde, $s(A) + s(B) + s(C)$ toplamından ikişerli kesişimlerin eleman sayılarını çıkarırız. Fakat, bu defa da, $A \cap B \cap C$ bölgesi her üçünde de olduğu için 3 kez çıkarılır. Yani fazladan 1 kez çıkarmış oluruz. Tekrar ilave edersek bu eksiklik de tamamlanır.

Alıştırma 7.23.

30 kişilik bir sınıfta öğrencilerin her biri Rusça Türkçe veya Almanca dillerinden en az birini konuşabilmektedir. Rusça bilen 13, Türkçe bilen 17, Almanca bilen 11 kişi vardır. Hem Rusça hem Türkçe bilen 7, hem Rusça hem Almanca bilen 4, her üç dili bilen 3 kişi varsa ve hem Almanca hem Türkçe bilen kaç kişi vardır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} s(R \cup T \cup A) &= s(R) + s(T) + s(A) \\ &\quad - s(R \cap T) - s(R \cap A) - s(T \cap A) \\ &\quad + s(R \cap T \cap A) \end{aligned}$$

eşitliğine göre, hem Almanca hem Türkçe bilen kişi sayısına x dersek,

$$30 = 13 + 17 + 11 - 7 - 4 - x + 3$$

olur ki buradan $30 = 33 - x$ eşitliğinden $x = 3$ elde edilir.

Alıştırma 7.24. ♣

42 kişilik bir sınıfta öğrenciler resim, satranç ve gitar kurslarından en az birine gitmektedir.

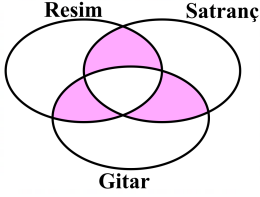
Her üç kursa da giden 2 öğrenci vardır.

Resim kursuna giden 20 öğrenci vardır.

Satranç kursuna giden 15 öğrenci vardır.

Gitar kursuna giden 18 öğrenci vardır.

Buna göre, sadece iki kursa giden öğrencilerin sayısını bulunuz.



Çözüm : Önce bize gerekli olan $s(R \cap S) + s(R \cap G) + s(S \cap G)$ değerini bulalım ve bu değerden $s(R \cap S \cap G)$ değerini 3 kez çıkaralım.

$$\begin{aligned} s(R \cup S \cup G) &= s(R) + s(S) + s(G) \\ &\quad - s(R \cap S) - s(R \cap G) - s(S \cap G) \\ &\quad + s(R \cap S \cap G) \end{aligned}$$

eşitliğine göre,

$$42 = 20 + 15 + 18 - x + 2$$

olur ki buradan $42 = 55 - x$ ve $x = 55 - 42 = 13$ elde edilir. Fakat, bu toplamın içinde $s(R \cap S \cap G)$ üç kez bulunur. O halde sadece iki kursa giden öğrenci sayısı $13 - 3 \cdot 2 = 7$ elde edilir.

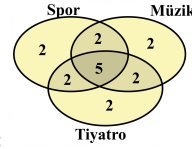
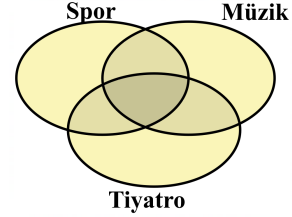
Alıştırma 7.25. ♣

50 kişilik bir sınıftaki öğrenciler spor, müzik veya tiyatro kursundan en az birine gitmektedir.

Her üçüne de giden 5 öğrenci vardır.

Sadece tiyatro, sadece spor ve sadece müzik kursuna giden 1'den çok ve eşit sayıda öğrenci vardır.

Spor, tiyatro ve müzik kurslarının sadece ikisine giden öğrencilerin sayısı da 1'den çok ve birbirine eşittir. Buna göre, spor kursuna giden öğrenci sayısı en az kaçtır?



Çözüm :

Alıştırma 7.26. ♣

$\{1, 2, 3, 4, \dots, 100\}$ kümesinin elemanlarından

- a) Kaç tanesi 4 veya 5 veya 9 ile tam bölünür
 b) Kaç tanesi 4, 5 ve 9'dan herhangi birine bölünmez?
 c) Kaç tanesi 5'e tam bölünüp, 4 ve 9'a tam bölünmez?
 d) Kaç tanesi 5'e tam bölünüp, 4 veya 9'a tam bölünmez?
 e) Kaç tanesi 4, 5 ve 9'dan sadece bir tanesine tam bölünür?

Çözüm :

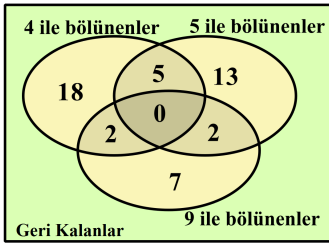
1'den 100'e kadar olan sayıların, 4, 5 ve 9'a bölünenlerin sayısını bölerek bulalım.

$$\left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor = 25, \quad \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20, \quad \left\lfloor \frac{100}{9} \right\rfloor = 11,$$

olduğundan, 25 tanesi 4'e, 20 tanesi 5'e, 11 tanesi ise 9'a bölünür. Bunun yanında,

$$\left\lfloor \frac{100}{4 \cdot 5} \right\rfloor = 5, \quad \left\lfloor \frac{100}{4 \cdot 9} \right\rfloor = 2, \quad \left\lfloor \frac{100}{5 \cdot 9} \right\rfloor = 2,$$

olduğundan, 4 ve 5'e bölünenlerin sayısı 5, 4 ve 9'a bölünenlerin sayısı 2 ve 5 ve 9'a bölünenlerin sayısı 2'dir. 4, 5 ve 9'a yani $4 \cdot 5 \cdot 9 = 180$ 'e bölünen yoktur. Böylece, aşağıdaki şemayı yapabiliriz.



Sonuç olarak, verilen kümenin

- a) 4 veya 5 veya 9'a bölünenlerin sayısı

$$18 + 5 + 13 + 2 + 2 + 7 = 47$$

bulunur. Bunu, üç küme için içerme-dışarma prensibinden de

$$s(A \cup B \cup C) = 25 + 20 + 11 - 5 - 2 - 2 + 0 = 47$$

biçiminde bulabiliriz.

- b) 4, 5 ve 9'dan herhangi birine bölünmeyenlerin sayısı da : $100 - 47 = 53$ bulunur.

- c) 5'e tam bölünüp ama 4 ve 9'a tam bölünmeyenlerin sayısı $20 - 0 = 20$ olur.

- d) 5'e tam bölünüp ama 4 veya 9'a tam bölünmeyenlerin sayısı $20 - 5 - 2 = 13$ olur.

- e) $18 + 13 + 7 = 38$ tanesi 4, 5 ve 9'dan sadece bir tanesine tam bölünür?

Bir Kümenin Alt Kümesi Nedir?

Verilen bir kümenin elemanlarından seçilerek oluşturulan kümeler bu kümenin **alt kümeleri** denir. Örneğin

$$A = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 0\}$$

kümesi için,

$$B = \{7, 0, 8\}$$

kümesi A kümesinin bir alt kümesidir. Görüldüğü gibi B kümesindeki her eleman A kümesinin elemanlarından seçilmiştir. Fakat,

$$C = \{1, 2, 9, 0\}$$

kümesi A kümesinin alt kümesi değildir. Çünkü C kümesindeki 9 elemanı A kümesinde olmayan bir elemandır. Bir B kümesi A kümesinin alt kümesi ise

$$B \subset A \text{ veya } A \supset B$$

biçiminde gösterilir. Küçük, büyük işaretindeki gibi ağızı açık olan taraf büyük olan kümedir. Büyük olan taraf küçük olan tarafı kapsar. Bir C kümesi A kümesinin alt kümesi değilse,

$$C \not\subset A$$

ile gösterilir. alt kümelerle ilgili önemli iki özelliği verelim.

★ Boş küme her kümenin bir alt kümesi kabul edilir.
 $\emptyset \subset A$

★ Her küme kendisinin alt kümesidir. $A \subset A$

★ alt küme işaretini sadece kümeler arasında kullanabiliriz. $1 \subset A$ şeklinde yazılamaz. Ya $\{1\} \subset A$ ve $1 \in A$ yazılmalıdır.

Alıştırma 7.27.

$A = \{a, b, c\}$ kümesinin tüm alt kümelerini yazınız. Kaç alt kümesi vardır?

Çözüm : Sıfır elemanlı alt kümesi

$$\emptyset,$$

yani boşkümedir. 1 elemanlı alt kümeleri :

$$\{a\}, \{b\}, \{c\},$$

olmak üzere 3 tanedir. 2 elemanlı alt kümeleri :

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$$

olmak üzere 3 tanedir. 3 elemanlı alt kümesi

$$\{a, b, c\}$$

olmak üzere 1 tanedir. $1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$ alt kümesi vardır.

Alıştırma 7.28.

$A = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi için aşağıdakileri ifadelerin yanlarına doğru veya yanlış olduklarını belirtiniz.

a) $B = \{c, d, e\}$ ise $A \subset B$ olur.

Çözüm : a) YANLIŞ $B \subset A$ olması gerekirdi.

b) $B = \{d, e, f\}$ ise $B \subset A$ olur.

Çözüm : a) YANLIŞ B 'deki f elemanı A da yok.

c) $B = \{c, d, e, a\}$ ise $A \supset B$ olur.

Çözüm : a) DOĞRU. A, B 'yi kapsamaktadır.

d) A kümesinin 4 elemanlı 5 alt kümesi vardır.

Çözüm : a) DOĞRU. $\{b, c, d, e\}$, $\{a, c, d, e\}$, $\{a, b, d, e\}$, $\{a, b, c, e\}$, $\{a, b, c, d\}$ olmak üzere 4 elemanlı 5 alt kümesi var.

e) $d \subset A$ yazılabilir.

Çözüm : a) YANLIŞ. $d \in A$ yazılmalıdır. d elemandır küme değildir.

Alıştırma 7.29.

Bir A kümesinin farklı iki alt kümesinden biri diğerinin alt kümesidir. Bu kümeler hangisi olabilir?

a) $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2, 3\}$

b) $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = \{2, 6\}$

c) $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 3\}$, $C = \{1\}$

d) $A = \{1, 3, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 4\}$, $C = \{1, 6\}$

Çözüm : $B \not\subset A$ olduğundan a) ve b) olamaz. $C \not\subset B$ olduğundan da d) olamaz. verilenlerden sadece c) olabilir.

Problemler (Kümeler)

Prob. 7.1 AJHSME-1991

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ arasından seçilen, toplamı 15 olan üç farklı sayıdan oluşan kümelerden kaç tanesinde 5 vardır?

Çözüm : Üç elemanlı ve elemanlarından biri 5 olan küme $K = \{5, b, c\}$ olsun.

$$b + c = 10 \quad \text{ve} \quad b \neq c$$

olacak şekilde b ve c belirleyeceğiz.

$$(b, c) \longrightarrow (1, 9); (2, 8); (3, 7); (4, 6)$$

olmak üzere 4 farklı şekilde K kümesi belirlenebilir.

Prob. 7.2 AMC8-2019

Lincoln Ortaokulundaki sekizinci sınıflarda toplam 93 öğrenci vardır. Her öğrenci bir matematik dersi veya bir yabancı dil dersi veya her ikisini birden alabiliyor. Matematik dersi alan 70, yabancı dil dersi alan ise 54 sekizinci sınıf öğrencisi vardır. Matematik dersini alan öğrencilerden kaç yabancı dil dersini almamıştır?

Çözüm : İçerme dışarma ilkesine göre,

$$s(M \cup Y) = s(M) + s(Y) - s(M \cap Y)$$

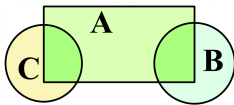
$$93 = 70 + 54 - x$$

eşitliğinden $x = 31$ olur. Yani, iki dersi birden alan 31 öğrenci vardır. Buna göre, matematik dersini alan öğrencilerden yabancı dil dersini almayanların sayısı $70 - 31 = 39$ bulunur.

Prob. 7.3 AMC8-1999

Üç çiçek bahçesinin bazı kısımları gösterildiği gibi üst üste gelmektedir. A bahçesinde 500 çiçek, B bahçesinde 450 çiçek ve C bahçesinde 350 çiçek vardır. A ve B bahçelerinin 50, A ve C bahçelerinin ise 100 çiçeği ortak. Buna göre, bu üç bahçede toplam kaç çiçek vardır?

Çözüm :



İki bahçe tarafından ortak paylaşılan bitkiler iki kez sayılmıştır, dolayısıyla bahçede toplam

$$500 + 450 + 350 - 50 - 100 = 1150$$

çiçek vardır.

Prob. 7.4 $A = \{x : 11 \leq x^2 + x \leq 88, x \in \mathbb{N}\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm : $3^2 + 3 = 12$ olduğundan $x = 3$ kümedeki en küçük elemandır. $x = 9$ için $9^2 + 9 = 90$ olduğundan $x = 8$ kümedeki en büyük elemandır.

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

olduğundan, $s(A) = 6$ bulunur.

Prob. 7.5 $A = \left\{x : \frac{12}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$ kümesinin eleman sayısını bulunuz.

Çözüm : $x+1$ sayısı 12'nin bir pozitif böleni olması gerekir.

$$x+1 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

olabilir. Buradan,

$$A = \{0, 1, 2, 3, 5, 11\}$$

olduğundan $s(A) = 6$ elde edilir.

Prob. 7.6 AMC8-2008

Cumhuriyet Ortaokulu'ndaki 39 sekizinci sınıf öğrencisinin her birinin bir köpeği veya bir kedisi veya hem köpeği hem de kedisi vardır. Okulda 20 öğrencinin bir köpeği ve 26 öğrencinin de bir kedisi varsa, hem köpeği hem de kedisi olan kaç öğrenci vardır?

Çözüm : Hem köpeği hem de kedisi olan öğrencilerin sayısı x olsun. İçerme dışarma ilkesinden,

$$26 + 20 - x = 39$$

olması gerekir. Buradan,

$$x = 7$$

bulunur.

Prob. 7.7 AMC8-2011

351 yetişkinin yaşadığı bir kasabada her yetişkinin arabası, motosikleti veya her ikisi de vardır. 331 yetişkinin arabası ve 45 yetişkinin motosikleti olduğuna göre, arabası olanlardan kaçının motosikleti yoktur?

Çözüm : İçerme dışarma ilkesine göre,

$$s(M \cup A) = s(M) + s(A) - s(M \cap A)$$

$$351 = 45 + 331 - x$$

eşitliğinden, $x = 25$ elde edilir. O halde, arabası olanlardan motosikleti olmayan

$$331 - 25 = 306$$

kişi vardır.

Prob. 7.8 $A = \{1, 2, 3, \dots, 101\}$ kümesinin elemanlarından kaç 5'e bölünür ama 3'e bölünmez?

Çözüm : Bu kümede 5 ile bölünen

$$\left\lfloor \frac{101}{5} \right\rfloor = 20$$

eleman vardır : $\{5, 10, 15, \dots, 100\}$. Fakat, bunların arasından 3 ile bölünenleri çıkarmalıyız. Yani, hem 3 hem de 5 ile bölünenleri çıkarmalıyız. Bu elemanların sayısı $\{15, 30, 45, 60, 75, 90\}$ olmak üzere

$$\left\lfloor \frac{101}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 6$$

olarak bulunabilir. Böylece, $20 - 6 = 14$ eleman 5'e bölünür ama 3'e bölünmez

Prob. 7.9 AJHSME-1991

1'den 46'ya kadar olan doğal sayılardan kaç tanesi 3 veya 5 veya her ikisiyle de bölünür?

Çözüm : 1'den 46'ya kadar olan sayıların

$$\left\lfloor \frac{46}{3} \right\rfloor = 15$$

tanesi 3 ile bölünür.

$$\left\lfloor \frac{46}{5} \right\rfloor = 9$$

tanesi 5 ile bölünür. Fakat, her ikisiyle de bölünenleri iki kez hesaplamamak 15 ile bölünenleri çıkarmalıyız.

$$\left\lfloor \frac{46}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 3$$

olduğundan istenen şekilde $15 + 9 - 3 = 21$ elde edilir.

Prob. 7.10 1'den 100'e kadar olan sayılardan,

a) Kaç tanesi 2 veya 3 veya 5 ile tam bölünür

b) Kaç tanesi 2, 3 ve 5'ten herhangi birine bölünmez?

c) Kaç tanesi 3'e tam bölünür ama 2 veya 5'e tam bölünmez?

Çözüm : 1'den 100'e kadar olan sayıların, 2, 3 ve 5'e bölünenlerin sayısını ayrı ayrı bölerek bulalım.

$$\left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor = 50, \quad \left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33, \quad \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20,$$

olduğundan, 50 tanesi 2'ye, 33 tanesi 3'e, 20 tanesi ise 5'e bölünür. Bunun yanında,

$$\left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 3} \right\rfloor = 16, \quad \left\lfloor \frac{100}{2 \cdot 5} \right\rfloor = 10, \quad \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 6,$$

olduğundan, 2 ve 3'e bölünenlerin sayısı 16, 2 ve 5'e bölünenlerin sayısı 10 ve 3 ve 5'e bölünenlerin sayısı 6'dır. 2, 3 ve 5'e yani $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ 'a bölünenlerin sayısı da $\left\lfloor \frac{100}{30} \right\rfloor = 3$ bulunur.

a) 2 veya 3 veya 5'e bölünenlerin sayısı içme-dışarma prensibinden de $50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$ olur.

b) 2, 3 ve 5'den herhangi birine bölünmeyenlerin sayısı da : $100 - 74 = 26$ bulunur.

c) $3 \cdot 2 = 6$ veya $3 \cdot 5 = 15$ 'e bölünen $16 + 6 - 3 = 19$ sayı vardır. O halde, $33 - 19 = 14$ tanesi 3'e bölünür, ama 2 veya 5'e tam bölünemez. Bunlar :

$\{3, 9, 27, 81, 21, 63, 33, 99, 39, 51, 57, 69, 87, 93\}$.

Prob. 7.11 1'den 46'ya kadar olan doğal sayılardan 3 ile bölünen fakat 5 ile bölünemeyen sayıların kümesi A olsun.

$$B = \{x : x = 7k, k \in \mathbb{N}\} \subset A$$

olacak şekilde kaç tane boş kümeden farklı B alt kümesi bulunabilir?

Çözüm : $A = \{3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27, 33, 36, 39, 42\}$ olduğundan, B alt kümesi

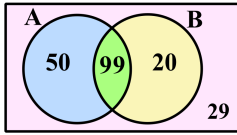
$$\{21\}, \{42\} \text{ veya } \{21, 42\}$$

olabilir.

Prob. 7.12 AMC8 - 2015

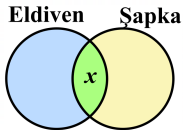
Euler Ortaokulunda 198 öğrenci bir okul referandumunda iki konuda "evet veya hayır" oyu kullanacaklardır. Her öğrenci her bir konu için bir oy kullanacaktır. Sonuçlara göre, 149 öğrenci birinci konuya "evet" ve 119 öğrenci de ikinci konuya "evet" oyu kullanmıştır. Her iki konuya da "hayır" oyu veren tam olarak 29 öğrenci olduğuna göre, her iki konuya da "evet" oyu veren kaç öğrenci vardır?

Çözüm : İki konuya evet oyu verenleri A ve B harfi ile gösterelim. Toplam 198 öğrenci bulunmaktadır. Her iki konuya da "hayır" oyu veren 29 kişi varsa, $198 - 29 = 169$ öğrenci iki konudan birine "evet" oyu vermiştir. Birinci konuya "evet" oyu veren 149 ve ikinci konuya "evet" oyu veren 119 kişi varsa, "evet" oyu sayısı $149 + 119 = 268$ olur. Yani, $268 - 169 = 99$ kişi her iki konuya da "evet" oyu vermiştir.

**Prob. 7.13 AMC8-2010**

Bir odadaki insanların $\frac{2}{5}$ 'i eldiven, $\frac{3}{4}$ 'ü ise şapka takıyor. Odada hem şapka hem de eldiven giyen en az kaç kişi vardır?

Çözüm :



Hem şapka hem de eldiven giyen kişi sayısı x olsun. Şapkalı veya eldivenli kişilerin sayısı tam sayı olması gerektiğinden, odadaki kişi sayısı hem 4 hem de 5'in katı olmalıdır. En az kişi için odadaki kişi sayını $\text{EKOK}(4, 5) = 20$ alabiliriz. Böylece,

$$\frac{2}{5} \cdot 20 = 8 \text{ kişi eldiven, } \frac{3}{4} \cdot 20 = 15 \text{ kişi şapka giyor.}$$

Buradan, içme-dışarma ilkesinden hem şapka takan hem eldiven giyen $20 = 8 + 15 - x$ eşitliğinden $x = 3$ kişi olduğu bulunur.

Prob. 7.14 a) $A = \{1, 2, 3, \dots, 101\}$ kümesinin 1 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

Çözüm : Her defasında elemanlardan sadece biri alınabilir. 101 alt kümesi vardır.

b) $A = \{1, 2, 3, \dots, 101\}$ kümesinin 100 elemanlı kaç alt kümesi vardır?

Çözüm : Her defasında elemanlardan sadece biri alınmayabilir. 100 elemanlı 101 alt kümesi vardır.

c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin 2 elemanlı kaç alt kümesi vardır? Bunları yazınız.

Çözüm : $\{1, 2\}; \{1, 3\}; \{1, 4\}; \{1, 5\}; \{2, 3\}; \{2, 4\}; \{2, 5\}; \{3, 4\}; \{3, 5\}; \{4, 5\}$ olmak üzere 10 alt kümesi vardır.

Prob. 7.15 AMC8 - 2017

Bayan Selin'in onu düzenli olarak arayan üç torunu vardır. Biri onu üç günde bir, biri dört günde bir, biri beş günde bir arıyor. 31 Aralık 2016'da üçü de onu aradılar. Sonraki yıl boyunca torunlarından telefon almadığı kaç gün vardır?

Çözüm : Bir yılda 365 gün vardır. En az 1 telefon araması aldığı günleri hesaplayalım. İçme dışarma ilkesiyle çözeceğiz.

$$\left\lfloor \frac{365}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{365}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{365}{5} \right\rfloor = 285,$$

$$\left\lfloor \frac{365}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{365}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{365}{20} \right\rfloor = 72,$$

$$\left\lfloor \frac{365}{60} \right\rfloor = 6$$

olduğundan, İDİ'ye göre, en az bir telefon araması yapılan gün sayısı :

$$285 - 72 + 6 = 219$$

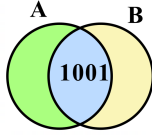
olduğundan, Bayan Selin'in torunlarından telefon almadığı

$$365 - 219 = 146$$

gün vardır.

Prob. 7.16 AMC8-2007

Aşağıdaki Venn şemasında gösterilen A ve B kümeleri aynı sayıda elemana sahiptir. Birleşimlerinin 2007, kesişimlerinin ise 1001 elemanı vardır. Buna göre A kümesinin eleman sayısı kaçtır?



Çözüm : A ve B kümeleri aynı sayıda elemana sahipmiş.

$$s(A) = s(B) = x + 1001$$

diyelim. Böylece, içermeye-dışarma ilkesinden

$$(x + 1001) + (x + 1001) - 1001 = 2007$$

eşitliğinden

$$2x + 1001 = 2007 \Rightarrow 2x = 2007 - 1001 = 1006$$

olur ve $x = 503$ elde edilir. O halde, A kümesinin eleman sayısı : $1001 + 503 = 1504$ bulunur.

Prob. 7.17

$$A = \{3n \mid 0 < 3n \leq 40, n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{5n \mid 0 < 5n \leq 40, n \in \mathbb{N}\},$$

olmak üzere, $A \cap B$ kümesinin elemanlarının toplamı kaçtır?

Çözüm :

$$A = \{3, 6, 9, \dots, 39\},$$

$$B = \{5, 10, 15, \dots, 40\},$$

olduğundan $A \cap B = \{15, 30\}$ olur bu kümenin elemanları toplamı $15 + 30 = 45$ bulunur.

Prob. 7.18 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $B = \{1, 2, 3\}$

kümeleri veriliyor. A kümesinin alt kümelerinden kaç tanesi B kümesinin alt kümesi değildir?

Çözüm : A kümesinin 4 elemanına sahip herhangi bir alt kümesi, B kümesinin alt kümesi olamaz. Buna göre,

$$\{4\}; \{1, 4\}; \{2, 4\}; \{3, 4\}; \{1, 2, 4\};$$

$$\{1, 3, 4\}; \{2, 3, 4\}; \{1, 2, 3, 4\};$$

olmak üzere 8 tanesi B kümesinin alt kümesi değildir.

Prob. 7.19 $\mathbb{P}$ kümesi doğal sayılar kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesidir. $\mathbb{P}$ kümesindeki bir n elemanın $\mathbb{P}$ kümesinde kendisinden başka bölene yoksa n sayısına $\mathbb{P}$ kümesinin asalımsı sayısı deniyor. Örneğin,

$$\mathbb{P} = \{4, 5, 6, 10, 12\}$$

kümesi için, 4, 5 ve 6 sayıları $\mathbb{P}$ kümesinin asalımsı sayılarıdır. Buna göre, aşağıdakiler yanıtlayınız.

a) $\mathbb{P} = \{2, 3, 6, 7, 15, 35, 55\}$ kümesinde kaç tane asalımsı sayı vardır?

Çözüm : 2, 3, 7 ve 55 sayıları $\mathbb{P}$ kümesinin asalımsı sayılarıdır. O halde, $\mathbb{P}$ kümesinde 4 tane asalımsı sayı vardır.

b) $\mathbb{P} = \{x \mid x = 4k - 1, k \in \mathbb{N}, x > 0\}$

kümesinin asalımsı olmayan en küçük elemanı kaçtır?

Çözüm : $\mathbb{P} = \{3, 7, 11, 15, \dots\}$ olduğundan 15 sayısı asalımsı olmayan en küçük sayıdır. Çünkü 3 bölene de kümededir.

c) $\mathbb{P} = \{x \mid x = 5k - 3, k \in \mathbb{N}, x > 0\}$

kümesinin üç basamaklı en küçük asalımsı elemanı kaçtır?

Çözüm : $k = 21$ için, $x = 5 \cdot 21 - 3 = 102 = 2 \cdot 3 \cdot 17$ ve $2 = 5 \cdot 1 - 3$ bölene kümede olduğundan 102 asalımsı sayı değildir.

$$k = 22 \text{ için, } x = 5 \cdot 22 - 3 = 107$$

asal olduğundan bir asalımsı sayıdır.

Prob. 7.20 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin boş kümeden farklı bir B alt kümesinin elemanları toplamı $\mathcal{T}(B)$ ile gösteriliyor.

Örneğin, $\mathcal{T}(\{2, 3, 4\}) = 2 + 3 + 4 = 9$ olur.

$$\mathcal{T}(\{2, 3, 4\}) + \mathcal{T}(B) = \mathcal{T}(\{1, 2, 3, 4, 6\})$$

olduğuna göre B kümesi kaç farklı küme olabilir?

Çözüm :

$$2 + 3 + 4 = \mathcal{T}(B) + 1 + 2 + 3 + 4 + 6$$

eşitliğinden, $\mathcal{T}(B) = 7$ olur. Buna göre, $B = \{1, 6\}$; $B = \{2, 5\}$; $B = \{3, 4\}$; $B = \{1, 2, 4\}$ kümeleri olabilir.

Prob. 7.21 $A = \{T, \ddot{U}, R, K, \dot{I}, Y, E\}$ kümesinin alt kümelerinden kaçında T ve Y bulunur ama sesli harf bulunmaz?

Çözüm : İstenen alt küme $B = \{T, Y\}$ 'yi kapsayan ve geri kalan $\{R, K\}$ elemanlarından seçilerek oluşturulabilir. Buna göre,

$$\{T, Y\}, \{T, Y, R\}; \{T, Y, K\}; \{T, Y, R, K\}$$

olmak üzere dört tanedir.

Prob. 7.22 $A \subset \{a, b, c, d, e\}$ olmak üzere

$$A \cup \{c, d\}$$

kümesinin eleman sayısı 4 olacak şekilde kaç farklı A kümesi bulunabilir.

Çözüm : $A \cup \{c, d\}$ kümesinin eleman sayısı 4 ise, A kümesinde c, d elemanlarından farklı en fazla iki eleman olabilir. Buna göre, A kümesinde c, d elemanları yoksa

$$\{a, b\}; \{a, e\}; \{b, e\}$$

kümeleri olabilir. Bu kümelerin herbirine c veya d veya her ikisi eklenirse de birleşim kümesi 4 elemanlı olur. Böylece,

$$\{a, b, c\}; \{a, e, c\}; \{b, e, c\}$$

$$\{a, b, d\}; \{a, e, d\}; \{b, e, d\}$$

$$\{a, b, c, d\}; \{a, e, c, d\}; \{b, e, c, d\}$$

kümeleri de koşulu sağlarlar. Yani 12 farklı A kümesi bulunabilir.

Prob. 7.23 $A \subset \{a, b, c, d, e\}$ olmak üzere

$$A \cap \{c, d, e, f\}$$

kümesinin eleman sayısı 2 olacak şekilde kaç farklı A kümesi bulunabilir?

Çözüm : Kesişimin eleman sayısı 2 ise A kümesinin elemanlarından en fazla 2 tanesi $\{c, d, e\}$ kümesinden seçilmelidir. Buna göre, A kümesi en az elemanlı olarak

$$\{c, d\}; \{c, e\}; \{e, d\}$$

kümeleri olabilir. Bu kümeler c, d, e dışındaki a ve b elemanlarını eklemek kesişimi bozmaz. Buna göre,

$$\{a, c, d\}; \{a, c, e\}; \{a, e, d\};$$

$$\{b, c, d\}; \{b, c, e\}; \{b, e, d\};$$

$$\{a, b, c, d\}; \{a, b, c, e\}; \{a, b, e, d\};$$

kümeleri de koşulu sağlar.

Prob. 7.24

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ ve } B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

olmak üzere $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ kümesini bulunuz.

Çözüm :

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$A \cap B = \{1, 3, 5\}$$

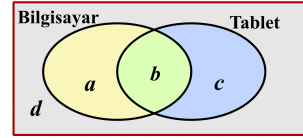
olduğundan,

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = \{2, 4, 7, 9\}$$

elde edilir.

Prob. 7.25 Pandemi döneminde bir sınıfta öğrenciler bilgisayardan veya tablettten derse bağlanabilmektedir. Bilgisayar veya tablettten en az birine sahip olanların sayısı 17, en çok birine sahip olanların sayısı ise 20'dir. Sınıftaki öğrencilerin %20'si her ikisine de sahipse, bu sınıfta bilgisayarı ve tableti olmayan kaç kişi vardır?

Çözüm : Aşağıdaki şemayı çizelim.



Verilenlerden

$$a + b + c = 17, \quad (1)$$

$$a + c + d = 20 \quad (2)$$

olur. Ayrıca,

$$\frac{20}{100} (a + b + c + d) = b \Rightarrow a + b + c + d = 5b \quad (3)$$

olur. (2) eşitliğini (3)'te yerine yazarsak

$$20 + b = 5b \Rightarrow b = 5$$

bulunur. O halde, sınıfta $a + b + c + d = 25$ kişi vardır. $a + b + c = 17$ ise bu sınıfta bilgisayarı ve tableti olmayan

$$d = 25 - 17 = 8$$

kişi vardır.

Tam sayılar

Alıştırma 8.1.

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) En büyük negatif tam sayı kaçtır?

Çözüm : En büyük negatif tam sayı -1 'dir.

b) $-3 \leq A \leq 4$ olacak şekilde kaç A tam sayısı vardır?

Çözüm : $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ olmak üzere, **8** tam sayı vardır.

c) -10 tam sayısı hangi tam sayıdan **5** büyüktür?

Çözüm : -15 sayısından **5** büyüktür.

d) -113 'ten büyük olan en küçük tam sayı kaçtır?

Çözüm : -112 'dir.

e) $-3, 2$ ondalık sayısından büyük olan en küçük tam sayı kaçtır?

Çözüm : -3 'tür.

f) Hava -5 derece iken kaç derece ısınır $+10$ derece olur?

Çözüm : **15** derece ısınmalıdır.

g) Bir alışveriş merkezinde asansör -4 ile $+6$ arasında çalışmaktadır. Bu alışveriş merkezinde kaç kat vardır?

Çözüm : **0** ile birlikte **11** kat vardır.

Alıştırma 8.2.

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) $(-6) \times (+2) = \dots\dots$ **Çözüm : -12**

b) $(-6) \div (-2) = \dots\dots$ **Çözüm : 3**

c) $(-6) \times (-2) = \dots\dots$ **Çözüm : 12**

d) $-(-6) \times (-2) = \dots\dots$ **Çözüm : -12**

Alıştırma 8.3.

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) $- (+2) = \dots\dots$ **Çözüm : -2**

b) $- (-2) = \dots\dots$ **Çözüm : $+2$**

c) $- (+2) = \dots\dots$ **Çözüm : -2**

d) $- (- (-2)) = \dots\dots$ **Çözüm : -2**

Alıştırma 8.4.

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) $(-3) \cdot (-7) \cdot (-2) = ?$

Çözüm : -42

b) $(-3) \cdot (-7) + (-2) = ?$

Çözüm : 19

c) $(-3) \cdot (-7) - (-2) = ?$

Çözüm : 23

d) $(-3) + (-7) + (-2) = ?$

Çözüm : -12

e) $(-3) - (-7) - (+2) = ?$

Çözüm : 2

f) $(-3) \cdot (-4) \div (-2) = ?$

Çözüm : -6

g) $(-14) \div (+7) \cdot (-2) = ?$

Çözüm : 4

Alıştırma 8.5.

Çarpımı -1 olan **100** tam sayının toplamı kaç farklı değer olabilir?

Çözüm : Çarpımın -1 olması için, tek sayıda (-1) çarpanı olmalıdır. Yani, (-1) çarpanı **1, 3, 5, ..., 99** tane olabilir. Bu durumlarda da toplam

$$99, 97, 95, \dots, 3, 1$$

değerleri olabilir. Yani

$$\frac{99 - 1}{2} + 1 = 50$$

farklı değer olabilir.

Alıştırma 8.6. AMC8-2000

$\{-8, -6, -4, 0, 3, 5, 7\}$ kümesinden seçilecek üç sayının çarpımı en küçük kaç olabilir?

Çözüm : En küçük çarpım için negatif çarpan sayısı tek sayıda alınmalıdır. **3** tane negatif çarpan alınırsa,

$$(-8) \cdot (-6) \cdot (-4) = -192$$

olur. **1** tane negatif çarpan alınırsa

$$(-8) \cdot 5 \cdot 7 = -280$$

olur ki daha da küçük bir değer elde etmiş oluruz. Yanıt : -280 .

Alıştırma 8.7.

Rakamları birbirinden farklı iki basamaklı en büyük **pozitif tam sayı**, rakamları birbirinden farklı üç basamaklı en büyük **negatif tam sayıdan** ne kadar büyüktür?

Çözüm : Rakamları birbirinden farklı iki basamaklı en büyük **pozitif tam sayı 98**, rakamları birbirinden farklı üç basamaklı en büyük **negatif tam sayı -102** olduğundan,

$$98 - (-102) = 200$$

elde edilir.

Alıştırma 8.8.

Çarpımları **12** olan iki tam sayının toplamı en küçük kaç olabilir?

Çözüm : $12 = (-1)(-12)$ için $(-1) + (-12) = -13$ olur.

Alıştırma 8.9.

Çarpımları **12** olan üç tam sayının toplamı en küçük kaç olabilir.

Çözüm : $12 = (-1)(-12) \cdot 1$ alınırsa

$$(-1) + (-12) + 1 = -12$$

olur.

Alıştırma 8.10.

-7 'den büyük ve 6 'dan küçük iki tam sayının çarpımının olabileceği en büyük değer, en küçük değerden kaç fazladır?

Çözüm : En büyük değer

$$(-6) \cdot (-5) = 30,$$

en küçük değer ise $(-6) \cdot 5 = -30$ olduğundan,
 $30 - (-30) = 60$ elde edilir.

Alıştırma 8.11.

$\{-24, -3, -2, 1, 2, 8\}$ kümesinden seçilecek iki sayının bölümü en fazla kaç olabilir?

Çözüm :

$$\frac{-24}{-2} = 12$$

olabilir.

Alıştırma 8.12.

Aşağıdaki eşitliklere göre $x - y - z$ kaçtır?

$$3 \cdot (-x) = -18,$$

$$x \cdot (-y) = 12,$$

$$y \cdot (-5) = z$$

Çözüm :

$$3 \cdot (-x) = -18 \Rightarrow x = 6,$$

$$x \cdot (-y) = 12 \Rightarrow 6 \cdot (-y) = 12 \text{ ise } y = -2,$$

$$y \cdot (-5) = z \Rightarrow (-2) \cdot (-5) = z \text{ ise } z = 10$$

olur.

$$x - y - z = 6 - (-2) + 10 = 18$$

bulunur.

Alıştırma 8.13.

Aşağıdaki sayı tablosunda, her satır, sütun ve köşegendeki sayıların toplamı eşittir. Buna göre, **A** sayısı kaçtır?

-5		-11
	-4	2
	A	

Çözüm : 3×3 türünden sihirli karelerde sabit toplamın üçte biri ortadaki sayıdır. O halde, sabit toplam

$$3 \cdot (-4) = -12$$

olur. Buna göre,

-5	4	-11
-10	-4	2
3	-12	-3

elde edilir. **A** = -12 bulunur.

★ Parantezin önündeki işarete DİKKAT! ★

Bir parantezin önündeki işaret o parantezin içindeki tüm sayılara ve ifadelere aittir. Yani, o işarete parantez içindeki herkesin hakkı olduğunu unutma. Bu nedenle parantez önündeki işaret, parantez açılırken dağıtılarak parantezin içindeki her bir sayıyla çarpılmalıdır. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

$$-(2^4 - 3^4 + 5^{10}) = -2^4 + 3^4 - 5^{10},$$

$$-(x - 3) = -x + 3$$

$$-(a - b + 2c) = -a + b - 2c$$

gibi. Parantezin önünde işaretli bir tam sayı varsa, parantezin içindeki ifade tam sayının işareti de göz önüne alınarak çapılır.

$$(-3)(a - 4) = -3a + 12,$$

$$(-2)(-3a + 4) = 6a - 8$$

gibi.

Alıştırma 8.14.

Aşağıdaki ifadelerde parantezi açınız.

a) $-(2x - 3y - 5)$

b) $-3(5x - 4y - 6)$

Çözüm : a) $-2x + 3y + 5$

b) $-15x + 12y + 18$

Alıştırma 8.15.

$-(5 - 3x) = -(-4)$ ise x kaçtır?

Çözüm : Verilen eşitlik $-5 + 3x = 4$ yazılabilir. Buradan, $3x = 9$ ve $x = 3$ elde edilir.

Alıştırma 8.16.

$S = 10^3 \cdot 71 - 999 \cdot 62 + 998 \cdot 31$ sayısının sonunda kaç sıfır vardır?

Çözüm : $999 \cdot 62$ yerine $(1000 \cdot 62 - 62)$ ve $998 \cdot 31$ yerine $(1000 \cdot 31 - 2 \cdot 31)$ yazalım.

$$\begin{aligned} S &= 10^3 \cdot 71 - 999 \cdot 62 + 998 \cdot 31 \\ &= 10^3 \cdot 71 - (10^3 \cdot 62 - 62) + (10^3 \cdot 31 - 2 \cdot 31) \\ &= 10^3 \cdot 71 - 10^3 \cdot 62 + 62 + 10^3 \cdot 31 - 62 \\ &= 10^3 \cdot 71 - 10^3 \cdot 62 + 10^3 \cdot 31 \\ &= 10^3 \cdot (71 - 62 + 31) \\ &= 40 \cdot 10^3 = 40000 \end{aligned}$$

elde edilir.

★ Üslü Tam sayıların Hesaplanması ★

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tane } a}$ olduğunu hatırlayınız.

$$(-a)^n \quad \text{ve} \quad (-a^n)$$

ifadelerini inceleyiniz. Ne gibi bir fark gördünüz? İlkinde, üs parantezin dışında, ikincisinde ise üs parantezin içinde sadece sayının üstündedir. **Bu iki ifadenin birbirine eşit olmayabileceğini unutmayınız.**

Üslü bir ifadede, eğer üs parantez dışındaysa, çarpılan ifadeler parantezli olmalıdır. Yani,

$$(-a)^n = \underbrace{(-a) \cdot (-a) \cdot (-a) \cdots (-a)}_{n \text{ tane } (-a)}$$

olur. Eğer üs parantez dışında değilse, sadece sayının üstündeyse, çarpılan ifade parantezsiz olur. Buna göre,

$$(-a^n) = -\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ tane } a}$$

şeklinde hesaplanır. Örneğin,

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+4} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+4} = (+4) \cdot (+4) = 16,$$

$$(-2^4) = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16,$$

$$(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot 9 = 81$$

bulunur.

Alıştırma 8.17.

Aşağıdaki sayıları hesaplayınız.

a) $(-2)^6 =$

Çözüm : $(-2)^6 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = 64$

b) $(-2^6) =$

Çözüm : $(-2^6) = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -64$

c) $(-2)^3 =$

Çözüm : $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = 4 \cdot (-2) = -8$

d) $(-1)^2 =$

Çözüm : $(-1)^2 = (-1)(-1) = 1$

e) $-(-2)^3 =$

Çözüm : $-(-2)^3 = -(-2)(-2)(-2) = 8$

f) $(-(-2)^2) =$

Çözüm : $(-(-2)^2) = -(-2)(-2) = -4$

Alıştırma 8.18.

Aşağıdaki ifadeyi sadeleştiriniz.

$$\frac{(-2)^4 - (-2)^3 + 2^2 - 2^3 + 20}{(-2)^3}$$

Çözüm : $(-2)^4 = 16, (-2)^3 = -8$ yazılırsa,

$$\frac{16 - (-8) + 4 - 8 + 20}{-8} = \frac{16 + 8 + 4 - 8 + 20}{-8} = \frac{40}{-8} = -5$$

olur.

Alıştırma 8.19.

$(-2) - (0) \times (-2)^2 - (-3) = ?$

Çözüm :

$$(-2) - (0) \times (-2)^2 - (-3) = (-2) - 0 + 3 = -2 + 3 = 1$$

olur.

Alıştırma 8.20.

10000 sayısının tüm tam sayı bölenlerinin sayısı nedir? Bunları toplarsak kaç elde edilir?

Çözüm : $1000 = 10^4 = 2^4 5^4$ sayısının

$$(4 + 1)(4 + 1) = 25$$

pozitif böleni vardır. O halde $2 \cdot 25 = 50$ tam sayı bölenir vardır. 25 tanesi pozitif, 25 tanesi de negatif olduğundan toplarsak birbirlerini götürürler ve toplamı 0 elde edilir.

Alıştırma 8.21.

5 ile tam bölünemeyen bir n sayısının 28 tane doğal sayı böleni varsa, $5 \cdot n$ sayısının kaç tam sayı böleni vardır?

Çözüm : 5 ile tam bölünemeyen bir n sayısının 28 tane doğal sayı böleni varsa, $5 \cdot n$ sayısının

$$2 \cdot 28 = 56$$

pozitif böleni,

$$2 \cdot 56 = 112$$

tam sayı böleni vardır.

Alıştırma 8.22.

-72 ile 101 arasında 7'nin tam katı olan kaç sayı vardır?

Çözüm :

$$-70, -63, -56, \dots, 91, 98$$

örüntüsündeki eleman sayısını bulmalıyız. Buna göre,

$$\frac{98 - (-70)}{7} + 1 = 25$$

elde edilir.

Mutlak Değer

★ Mutlak Değer ★

Bir tam sayının sıfır noktasına, yani başlangıç noktasına uzaklığına, o tam sayının **mutlak değeri** denir. Bir **A** sayısının mutlak değeri

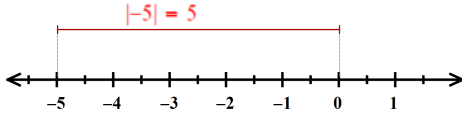
$$|A|$$

biçiminde gösterilir. Bu sayı uzaklık ifade ettiği için ASLA negatif olamaz. $|\dots|$ sembolü mutlak değer sembolüdür.

Örneğin -5 sayısının 0 'a olan uzaklığı 5 birimdir. Yani, -5 tam sayısının mutlak değeri 5 'tir. Bunu matematiksel sembolle

$$|-5| = 5$$

biçiminde gösterebiliriz.



Alıştırma 8.23.

Aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) $|-7| = ?$

Çözüm : $|-7| = 7$

b) $|(-7) \cdot (-3)| = ?$

Çözüm : $|(-7) \cdot (-3)| = 21$

c) $|(-7) - (-5)| = ?$

Çözüm : $|(-7) - (-5)| = |-2| = 2.$

d) $|0| = ?$

Çözüm : $|0| = 0$

e) $|-3 - |-5|| = ?$

Çözüm : $|-3 - |-5|| = |-3 - 5| = 8.$

f) $||2^5 - 3^5| - 3^5| = ?$

Çözüm : $||2^5 - 3^5| - 3^5| = |-2^5 + 3^5 - 3^5| = 2^5.$

g) $|-3 - |-5 - |-7 - |-9||| = ?$

Çözüm : $|-3 - |-5 - |-7 - |-9||| = |-3 - |-5 - |-7 - 9||| =$

$= |-3 - |-5 - 16|| = |-3 - 21| = 24.$

Alıştırma 8.24.

$|\star - |-3 - |-5 - |-7||| = 6$ olduğuna göre $\star$ sayıları hangi sayılar olabilir?

Çözüm : $|\star - |-3 - |-5 - |-7||| = 6$ ifadesi düzenlenirse,

$$|\star - 15| = 6$$

olur. Buradan, $\star - 15 = 6$ ise $\star = 21$, $\star - 15 = -6$ ise $\star = 9$ bulunur.

Problemler (Tam sayılar)

Prob. 8.1 AJHSME-1991

$\{-3, -2, -1, 4, 5\}$ kümesindeki sayılardan üçü alınıp çarpılıyor. Elde edilecek en büyük ve en küçük çarpım arasındaki fark kaçtır?

Çözüm : En küçük çarpım :

$$4 \cdot 5 \cdot (-3) = -60,$$

en büyük çarpım

$$(-3)(-2)5 = 30$$

olduğundan farkları $30 - (-60) = 30 + 60 = 90$ olur.

Prob. 8.2 AMC8-1999

Aşağıdaki üçlülerden hangisinin toplamı 1 değildir?

(A) $(1/2; 1/3; 1/6)$

(B) $(2; -2; 1)$

(C) $(0, 1; 0, 3; 0, 6)$

(D) $(1, 1; -2, 1; 1, 0)$

(E) $(-3/2; -5/2; 5)$

Çözüm :

$$(A) (1/2, 1/3, 1/6) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1,$$

$$(B) (2, -2, 1) \Rightarrow 2 + (-2) + 1 = 1,$$

$$(C) (0, 1, 0, 3, 0, 6) \Rightarrow 0, 1 + 0, 3 + 0, 6 = 1,$$

$$(D) (1, 1, -2, 1, 1, 0) \Rightarrow 1, 1 + (-2, 1) + 1, 0 = 0,$$

$$(E) (-3/2, -5/2, 5) \Rightarrow \frac{-3}{2} + \frac{-5}{2} + 5 = 1$$

Prob. 8.3 AMC8-2000

Aşağıdakilerden hangisi çarpmaya göre tersinden küçüktür?

(Not : Bir a sayısının çarpmaya göre tersi $\frac{1}{a}$ 'dır)

$$(A) -2 \quad (B) -1 \quad (C) 1 \quad (D) 2$$

$$\text{Çözüm : (A) } -2 < \frac{1}{-2}$$

$$(B) -1 = \frac{1}{-1} = -1$$

$$(C) 1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$(D) 2 > \frac{1}{2}.$$

Prob. 8.4 a ve b tam sayıları için

$$-11 < a < -2 < b < 9$$

ise,

$$\frac{|a| + b}{|b|}$$

ifadesinin en büyük değeri kaçtır?

Çözüm : Kesrin payını en fazla, paydasını en küçük yapmak için $a = -10$ ve $b = 1$ alınabilir. Böylece,

$$\frac{|a| + b}{|b|} = \frac{|-10| + (1)}{|1|} = \frac{10 + 1}{1} = 11$$

elde edilir.

Prob. 8.5 a ve b tam sayıları için

$$-11 < a < b < 9$$

ise, $|a| - |b|$ ifadesi en fazla kaç olabilir.

Çözüm : $a = -10$ ve $b = 0$ alınır,

$$|a| - |b| = 10$$

olur.

Prob. 8.6 FMO-1990

n bir pozitif doğal sayı olmak üzere,

$$S(n) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \dots + (-1)^{n-1} n$$

ise $S(1989) + S(1990) = ?$

Çözüm : Tek sayıların işareti pozitif, çift sayıların işareti negatif olduğundan

$$S(1989) = 1 - 2 + 3 - \dots - 1988 + 1989$$

$$S(1990) = 1 - 2 + 3 - \dots - 1988 + 1989 - 1990$$

yazılabilir. $1 - 2 + 3 - \dots - 1988 + 1989$ ifadesi

$$(1 - 2) + (3 - 4) + \dots + (1997 - 1988) + 1989$$

$$1988 \div 2 = 994 \text{ tane } -1$$

eşitliğinden $-994 + 1989 = 995$ bulunur.

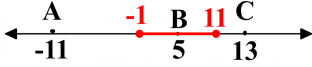
$$S(1989) = 995 \text{ ve } S(1990) = 995 - 1990 = -995$$

olur. Bu ikisinin toplamı da 0 bulunur.

Prob. 8.7 ♣ Aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde B noktasına en fazla 6 birim uzaklığında olan bütün tam sayı noktaların toplamı $[AC]$ doğru parçası üzerinde olup $[AC]$ doğru parçasının orta noktasının solunda yer alan tam sayı noktaların toplamından kaç birim büyüktür?



Çözüm : $B = 5$ noktasına en fazla 6 birim uzaklığındaki tam sayı noktalar -1 'den 11 'e kadar olan tam sayı noktalarıdır.



Bunların toplamı da :

$$S = -1 + 0 + 1 + 2 + \dots + 11 = -1 + \frac{11 \cdot 12}{2} = 65$$

bulunur. $[AC]$ doğru parçasının orta noktası $\frac{-11 + 13}{2} = 1$ olduğundan, 1 'in solunda yer alan noktaların toplamı da

$$K = (-11) + (-10) + \dots + (-1) + 0 = -66$$

olduğundan, S sayısı K 'dan $S - K = 65 - (-66) = 131$ daha büyüktür.

Prob. 8.8 $|x - 4| + |4 - x| = 25$ ise x hangi sayılar olabilir?

Çözüm : $|x - 4| = a$ ise $|4 - x| = a$ olur. Buradan $a^2 = 25$ eşitliğinden $a = 5$ olması gerektiği görülür.

$$|x - 4| = 5$$

ise $x - 4 = 5$ veya $x - 4 = -5$ için sırasıyla $x = 9$ ve $x = -1$ bulunur.

Prob. 8.9 ♣ a ve b tam sayıları için

$$-3 \leq a \leq 3,$$

$$-4 \leq b \leq 4$$

ise aşağıdakileri yanıtlayınız.

a) $a \cdot b$ çarpımlarından kaç tane **farklı** pozitif tam sayı elde edilebilir?

b) Kaç (a, b) ikilisi için $a + b$ toplamı pozitifdir?

c) Elde edilecek tüm $a \cdot b$ çarpımlarının toplamı nedir?

d) Elde edilecek tüm $a \cdot b$ farklı pozitif çarpımlarının toplamı nedir?

Çözüm : a) $a \cdot b$ çarpımının pozitif olması için hem a hem de b aynı işaretli olmalıdır. $a \in \{-3, -2, -1\}$ alınırsa, $b \in \{-4, -3, -2, -1\}$ alınabilir. Bunların sayısı $3 \cdot 4 = 12$ olur. $a \in \{3, 2, 1\}$ alınırsa, $b \in \{4, 3, 2, 1\}$ olmalıdır ki, bunların çarpımından yine aynı pozitif tam sayılar elde edilir. Yanıt : 12.

b) $b = 4$ ise $a \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ alınabilir. 7 farklı toplam elde edilir.

$b = 3$ ise $a \in \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ alınabilir. 6 farklı toplam elde edilir.

$b = 2$ ise $a \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ alınabilir. 5 farklı toplam elde edilir.

$b = 1$ ise $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ alınabilir. 4 farklı toplam elde edilir.

$b = 0$ ise $a \in \{1, 2, 3\}$ alınabilir. 3 farklı toplam elde edilir.

$b = -1$ ise $a \in \{2, 3\}$ alınabilir. 2 farklı toplam elde edilir.

$b = -2$ ise $a \in \{3\}$ alınabilir. 1 farklı toplam elde edilir.

Sonuç olarak $1 + 2 + 3 + \dots + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ tane (a, b) ikilisi bulunabilir.

c) Elde edilebilecek her pozitif çarpım için aynı çarpımın negatifi de vardır. Örneğin, $(-3) \cdot (-4) = -12$, $3 \cdot 4 = 12$ için $(-3) \cdot (4) = -12$ ve $(3) \cdot (-4) = -12$ vardır. Topamları da 0 olur.

d) Farklı pozitif çarpanların toplamı

$$(3 + 2 + 1)(4 + 3 + 2 + 1)$$

çarpımıyla ifade edilebilir ve yanıt $6 \cdot 10 = 60$ bulunur.

Prob. 8.10 UAMO-2023

Alp aşağıdaki sayı tablosunun her satırından ve her sütunundan sadece bir sayı alarak bu sayıları çarpıyor. Bulabileceği tüm çarpımları toplarsa kaç elde eder? Yan tarafta bir tane örnek verilmiştir. İkinci tabloda seçilen sayılar kırmızı olarak gösterilmiştir.

2	0	-3	0
6	0	5	4
-5	0	-2	0
2	-3	1	0

2	0	-3	0
6	0	5	4
-5	0	-2	0
2	-3	1	0

$2 \cdot 4 \cdot 0 \cdot 1 = 0$

Çözüm : İkinci sütundan 3 sayısını ve dördüncü sütundan 4 sayısını almazsa çarpım her zaman sıfır olur. O halde bu ikisini aldığı durumları hesaplamak yeterlidir.

2	0	-3	0
6	0	5	4
-5	0	-2	0
2	-3	1	0

$\Rightarrow 48,$

2	0	-3	0
6	0	5	4
-5	0	-2	0
2	-3	1	0

$\Rightarrow -180$

Durumları dışındaki tüm çarpımlar sıfır olacaktır. Yanıt : $-180 + 48 = -132$ olur.

Prob. 8.11 $-31, -27, -23, \dots, 109, 113$ sayı örüntüsünde kaç sayı vardır? Bu örüntüdeki ilk pozitif terim kaçtır?

Çözüm : Örüntü dörder dörder arttığı için

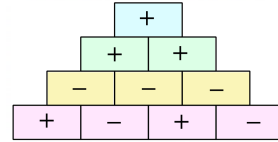
$$\frac{\text{Son terim} - \text{İlk terim}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{113 - (-31)}{4} + 1$$

$$= \frac{113 + 31}{4} + 1 = 37$$

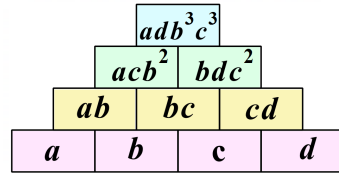
sayı vardır. Bu örüntüdeki ilk pozitif terim için -31 sayısına artış miktarının uygun bir katını ekleyerek bulabiliriz. Artış miktarı 4 olduğundan $4 \cdot 8 = 32$ eklersek örüntüdeki ilk pozitif terimin $+1$ olduğunu buluruz.

Prob. 8.12 AMC8-2018

Bir işaret piramidine bir hücre, altındaki iki hücre aynı işarete sahipse "+", altındaki iki hücre farklı işaretlere sahipse "-" oluyor. Örneğin, aşağıda dört katlı bir işaret piramidi verilmiştir. Bu dört katlı piramidin tepesinde bir "+" işareti oluşturmak için en alt sıradaki dört hücreyi kaç farklı şekilde doldurabiliriz?



Çözüm : En alttaki kutulara a, b, c, d yazalım ve en üstteki kutudaki çarpımı hesaplayalım. Her harfin $+1$ veya -1 olabileceğini unutmayınız.



En üstteki kutudaki adb^3c^3 çarpımının $+1$ olmasını istiyoruz. Bu çarpımdaki tüm üsler tek sayıdır. Yani, c^3 ile c 'nin, b^3 ile b 'nin işaretleri de aynıdır. 4 tane sayının çarpımının $+1$ olması için, ya tamamı $+1$, ya tamamı -1 , ya da yarısı -1 , yarısı $+1$ olması gerekir. Buna göre, (a, b, c, d) dördüsü

$$(1, 1, 1, 1), (-1, -1, -1, -1), (1, 1, -1, -1),$$

$$(1, -1, 1, -1), (-1, 1, 1, -1), (1, -1, -1, 1),$$

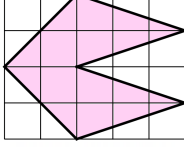
$$(-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1)$$

dördülerinden biri olabilir. Yani, tabloyu 8 farklı şekilde doldurabiliriz.

Rasyonel Sayılar

Alıştırma 9.1.

Aşağıdaki 4×5 biçiminde tablonun taralı kısmının alanının tablonun kaçta kaçını ifade ettiğini bulunuz.



Çözüm : a) $20 - 2 - 2 - 2 - \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 3}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} = 10$ olduğundan

$$\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

olur.

Alıştırma 9.2.

Aşağıdaki rasyonel sayıları pay ve paydanın çarpanlarını yazarak sadeleştiriniz.

a) $\frac{1000}{1080}$

Çözüm : a) $\frac{1000}{1080} = \frac{2^3 5^3}{2^3 3^3 5} = \frac{5^2}{3^3} = \frac{25}{27}$.

b) $\frac{7!}{5!}$ (Not : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)

Çözüm : b) $\frac{7!}{5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{7 \cdot 6}{1} = 42$

c) $\frac{2^3}{6^2} =$

Çözüm : c) $\frac{2^3}{6^2} = \frac{2^3}{(2 \cdot 3)^2} = \frac{2^3}{2^2 3^2} = \frac{2^1}{3^2} = \frac{2}{9}$

Alıştırma 9.3.

$\frac{a-3}{5-a}$ ifadesini 4 ile genişletirseniz pay ve paydanın toplamı kaç olur?

Çözüm :

$$\frac{a-3}{5-a} = \frac{4a-12}{20-4a}$$

olduğundan,

$$4a - 12 + 20 - 4a = 8$$

elde edilir.

Alıştırma 9.4.

Aşağıdaki rasyonel sayıyı ortak paranteze alarak sadeleştiriniz.

$$\frac{5 \cdot 2^{17} - 3 \cdot 2^{15}}{2^{15}}$$

Çözüm :

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 2^{15} - 3 \cdot 2^{15}}{2^{15}} = \frac{2^{15} (20 - 3)}{2^{15}} = 17$$

elde edilir.

Alıştırma 9.5.

Aşağıdaki rasyonel sayıları sadeleştiriniz. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ olduğunu kullanınız.)

a) $\frac{5! + 6!}{5!}$

Çözüm : a)

$$\frac{5! + 6!}{5!} = \frac{5! + 6 \cdot 5!}{5!} = \frac{7 \cdot 5!}{5!} = 7$$

b) $\frac{5! \cdot 7!}{7! + 8!}$

Çözüm : b)

$$\frac{5! \cdot 7!}{7! + 8!} = \frac{5! \cdot 7!}{7! + 8 \cdot 7!} = \frac{5! \cdot 7!}{9 \cdot 7!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{40}{3}$$

olur.

Alıştırma 9.6.

Aşağıdaki ifadede hata nerededir?

$$-\frac{251-101}{11} = \frac{-251-101}{11}$$

Çözüm : Kesir çizgisinin önündeki işaret kesirin payındaki tüm sayıların işaretleriyle çarpılması gerekirdi. Doğrusu

$$-\frac{251-101}{11} = \frac{-251+101}{11}$$

olması gerekirdi.

Alıştırma 9.7.

a) $\frac{25}{27} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = ?$

Çözüm : a)

$$\frac{25}{27} + \frac{4}{9} - \frac{2}{3} = \frac{25 + 12 - 18}{27} = \frac{19}{27}.$$

olur.

Alıştırma 9.8.

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ ise

$$\frac{5!}{7!} \cdot \frac{8!}{6!}$$

çarpımının en sade halini bulunuz.

Çözüm :

$$\frac{5!}{7!} \cdot \frac{8!}{6!} = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{7!}} \cdot \frac{8 \cdot \cancel{7!}}{6 \cdot \cancel{5!}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

Alıştırma 9.9. AJHSME-1989

$$(2 \cdot 3 \cdot 4) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = ?$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} (2 \cdot 3 \cdot 4) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{4} \\ &= 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 26 \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 9.10.

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $\frac{25}{27} \div \frac{4}{9} - \frac{2}{3}$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{25}{27} \times \frac{9}{4} - \frac{2}{3} &= \frac{25}{\cancel{3} \cdot \cancel{9}} \times \frac{\cancel{9}}{4} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{25}{12} - \frac{2}{3} = \frac{25 - 8}{12} = \frac{17}{12} \end{aligned}$$

b) $\frac{2^3}{6^2} \div \frac{4^3}{3^2}$

Çözüm : b) $6^2 = 2^2 3^2$ ve $4^3 = 2^6$ yazılırsa

$$\frac{2^3}{6^2} \div \frac{4^3}{3^2} = \frac{2^3}{2^2 3^2} \times \frac{3^2}{2^6} = \frac{2^3 \cdot \cancel{3^2}}{2^2 \cancel{3^2} \cdot 2^6} = \frac{2^3}{2^8} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

elde edilir.

Alıştırma 9.11. AJHSME-1990

Aşağıdaki sayıların hangisi en büyüktür?

(A) $13579 + \frac{1}{2468}$ (B) $13579 - \frac{1}{2468}$

(C) $13579 \times \frac{1}{2468}$ (D) $13579 \div \frac{1}{2468}$

(E) 13579, 2468

Çözüm : (D) seçeneğindeki ifade

$$13579 \div \frac{1}{2468} = 13579 \cdot 2468$$

çarpımı en büyüktür.

Alıştırma 9.12.

Aşağıdakileri hızlı şekilde nasıl hesaplayacağımızı görünüz.

a) $\frac{1}{\frac{3}{4}}$ b) $\frac{\frac{3}{4}}{2}$ c) $\frac{\frac{4}{3}}{5}$ d) $\frac{2}{\frac{3}{4}}$

Çözüm : a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{\frac{3}{4}}{2} = \frac{3}{4 \cdot 2} = \frac{3}{8}$

c) $\frac{\frac{4}{3}}{5} = \frac{4}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$ d) $\frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{2 \cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$

Alıştırma 9.13.

Aşağıdaki sayı doğrusu üzerinde -11 ile 9 arası 7 eşit parçaya bölünmüş ve **A**, **B** noktaları işaretlenmiştir. **B** noktasına karşılık gelen sayı, **A** noktasına karşılık gelen sayının kaç katıdır?



Çözüm : -11 ile 9 arasında $9 - (-11) = 20$ birim vardır. O halde,

$$A \rightarrow -11 + 3 \cdot \frac{20}{7} = -\frac{17}{7}, \quad B \rightarrow -11 + 5 \cdot \frac{20}{7} = \frac{23}{7},$$

$$B \div A = \frac{23}{7} \div \left(-\frac{17}{7}\right) = \frac{23}{7} \cdot \frac{7}{-17} = -\frac{23}{17}.$$

İç İçe Kesir Çizgisi İçeren İfadeler**Alıştırma 9.14.**

$$5 - \frac{2}{3 - \frac{4}{4}} \text{ ifadesini tek satırda yazınız.}$$

Çözüm :

$$5 - \frac{2}{3 - \frac{4}{4}} = 5 - 2 \div \left(3 - \frac{3}{4}\right)$$

$$\frac{20}{7} = \frac{23}{7},$$

biçiminde yazılabilir.

Alıştırma 9.15.

$$5 - \frac{2}{3 - \frac{4}{4}} \text{ rasyonel sayısının en sade şeklini bulunuz.}$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5 - \frac{2}{3 - \frac{4}{4}} &= 5 - \frac{2}{\frac{9}{4}} = 5 - \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{9} \\ &= \frac{5}{1} - \frac{8}{9} = \frac{45 - 8}{9} = \frac{37}{9} \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 9.16.

$$1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{3}}} = ?$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}} &= 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{3}{6} + \frac{4}{6}}} = 1 + \frac{2}{1 + \frac{1}{\frac{7}{6}}} \\ &= 1 + \frac{2}{1 + \frac{6}{7}} = 1 + \frac{16}{13} \\ &= \frac{29}{13} \end{aligned}$$

: elde edilir.

Alıştırma 9.17.

$$\frac{3 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{2}{1 + \frac{2}{4}} = ?$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{3 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{2}{3}} &= \frac{3 + \frac{3}{5}}{\frac{6}{4}} = \frac{3 + \frac{3}{1} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{6}{4}} \\ &= \frac{3 + \frac{9}{5}}{\frac{6}{4}} = \frac{\frac{24}{5}}{\frac{6}{4}} = \frac{6 \cdot 4}{5 \cdot 6} = \frac{16}{5} \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 9.18.

$$\frac{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{4} \div \frac{1 + \frac{1}{4}}{2 - \frac{1}{4}} = ?$$

Çözüm : Bölme işaretinden önceki ve sonraki kesirleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \frac{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{4} &= \frac{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}{4} = \frac{3 + \frac{2}{3}}{4} \\ &= \frac{\frac{11}{3}}{4} = \frac{11}{12} \frac{1 + \frac{1}{4}}{2 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

olduğundan $\frac{11}{12} \div \frac{5}{7} = \frac{11}{12} \cdot \frac{7}{5} = \frac{77}{60}$ elde edilir.**Alıştırma 9.19.**

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}} = ?$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{3}}}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{4}{7}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11}} \\ &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{11}} = 1 + \frac{1}{18} = 1 + \frac{11}{18} = \frac{29}{18} \end{aligned}$$

elde edilir.

Kesirlerde Sıralama

Alıştırma 9.20.

Aşağıdaki kesirleri sıralayınız.

a) $\frac{7}{3}, \frac{11}{4}, \frac{31}{12}, 3$

Çözüm : Paydaları eşitlersek

$$\begin{aligned} \frac{7}{3}, \frac{11}{4}, \frac{31}{12}, 3 &\Rightarrow \frac{28}{12}, \frac{33}{12}, \frac{31}{12}, \frac{36}{12} \\ &\Rightarrow \frac{7}{3} < \frac{31}{12} < \frac{11}{4} < 3 \end{aligned}$$

olur.

b) $\frac{10}{9}, \frac{12}{11}, \frac{15}{13}, \frac{4}{3}$

Çözüm : Payı 60'da eşitlersek

$$\begin{aligned} \frac{10}{9}, \frac{12}{11}, \frac{15}{13}, \frac{4}{3} &\Rightarrow \frac{60}{54}, \frac{60}{55}, \frac{60}{52}, \frac{60}{45} \\ &\Rightarrow \frac{4}{3} > \frac{15}{13} > \frac{10}{9} > \frac{12}{11} \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 9.21.

$\frac{-5}{4} \leq \frac{5n}{12} < \frac{3}{10}$ eşitsizliğini sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

Çözüm : Tüm paydaları aynı sayıda eşitleyelim.
EKOK(4, 12, 10) = 60 olduğundan,

$$\frac{-5}{4} \leq \frac{5n}{12} < \frac{3}{10} \Rightarrow \frac{-75}{60} \leq \frac{25n}{60} < \frac{18}{60}$$

ve buradan

$$-75 \leq 25n < 18$$

yazılabilir. O halde $n \in \{-3, -2, -1, 0\}$ olmak üzere 4 sayı olabilir.

★ Kesirlerin Ters Çevrilmesinde Sıralama ★

Küçükten büyüğe sıralanmış **aynı işaretli** rasyonel sayıların her biri ters çevrilirse sayıların sıralaması da değişir ve büyüktan küçüğe sıralanmış olur.

$$\begin{aligned} \frac{-3}{5} < \frac{-2}{5} &\Rightarrow \frac{-5}{3} > \frac{-5}{2} \\ \frac{3}{5} > \frac{2}{5} &\Rightarrow \frac{5}{3} < \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Küçükten büyüğe sıralanmış **zıt işaretli** iki rasyonel sayının her biri ters çevrilirse sayıların sıralaması değişmez. Pozitif olan yine büyük olur.

$$\frac{-3}{5} < \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{-5}{3} < \frac{5}{2}$$

Yani ters çevirme de işaret değişmediği için sadece aynı işaretli olanlarda sıralama değişir.

Alıştırma 9.22.

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0 < \frac{1}{c} < \frac{1}{d}$$

ise, a, b, c, d tam sayılarını küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm :

$$b < a < 0 < d < c$$

olur.

Alıştırma 9.23.

$\frac{-4}{3} < \frac{12}{n} < \frac{-3}{11}$ eşitsizliğini sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

Çözüm : Tüm kesirleri ters çevirirsek, küçükten büyüğe olan eşitsizlik büyüktan küçüğe doğru olur.
EKOK(4, 12, 3) = 12 olduğundan,

$$\frac{-3}{4} > \frac{n}{12} > \frac{-11}{3} \Rightarrow \frac{-9}{12} > \frac{n}{12} > \frac{-44}{12}$$

yazılabilir.

$$-44 < n < -9$$

olur. $n \in \{-43, -42, \dots, -11, -10\}$ olacağından
 $-10 - (-43) + 1 = 34$ sayı vardır.

Bir bütünün bir kesir kadarı

Aıştırma 9.24.

- a) 126'nın $\frac{4}{9}$ 'u kaçtır?
- b) $\frac{6}{7}$ 'si 12 olan sayı kaçtır?
- c) 144'ün $\frac{4}{3}$ 'ünün $\frac{5}{8}$ 'i kaçtır?
- d) $\frac{4}{3}$ 'ünün $\frac{5}{8}$ 'i 15 olan sayı kaçtır?
- e) Hangi sayının $\frac{3}{4}$ 'ünün $\frac{5}{3}$ 'ünün yarısı 30'dur.

Çözüm :

- a) $\frac{4}{9} \cdot 126 = 56.$
- b) $\frac{7}{6} \cdot 12 = 14.$
- c) $\frac{5}{8} \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot 144\right) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 144}{8 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 72}{3} = 120.$
- d) $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{5} \cdot 15 = 18$
- e) $\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{1} \cdot 30 = 48$

Aıştırma 9.25. AMC8-2004

600 mL kapasitesindeki iki sürahide portakal suyu vardır. Birinci sürahinin $\frac{1}{3}$ 'ü dolu ve diğer sürahinin de $\frac{2}{5}$ 'i doludur. Her sürahiyi tamamen dolduracak kadar su eklendikten sonra, her iki sürahi de büyük bir sürahiye boşaltılıyor. Büyük sürahideki karışımın kaçta kaç portakal suyudur?

Çözüm : Birinci sürahide $\frac{1}{3} \cdot 600 = 200$ mL portakal suyu, ikinci sürahi $\frac{2}{5} \cdot 600 = 240$ mL portakal suyu vardır. Böylece büyük sürahide toplam

$$200 + 240 = 440 \text{ mL}$$

portakal suyu ve $600 + 600 = 1200$ mL sulandırılmış portakal suyu vardır. Büyük sürahideki portakal suyu oranı $\frac{440}{1200} = \frac{11}{30}$ elde edilir.

Aıştırma 9.26. AMC8-2004 ♣

Bir odadaki insanların üçte ikisi sandalyelerin dörtte üçünde oturuyor. İnsanların geri kalanı ayakta. 6 boş sandalye varsa, odada kaç kişi vardır?

Çözüm : Geriden başa doğru hareket edelim. Sandalyelerin $\frac{3}{4}$ 'ü kullanılıyorsa $\frac{1}{4}$ 'ü boş demektir. Bunların sayısı da 6 olarak verilmiş. O halde, tüm sandalye sayısı

$$6 \cdot 4 = 24$$

ve dolu sandalye sayısı da $3 \cdot 6 = 18$ olur. Odada x kişi olduğunu kabul edelim. Odadaki insanların üçte ikisi 18 sandalyede oturuyorsa,

$$\frac{2 \cdot x}{3} = 18 \Rightarrow x = 27$$

elde edilir.

Aıştırma 9.27. ♣

Aşağıdakilerden hangisi hatalıdır?

a) $\left[\frac{-13}{7}\right] = -3$ **Çözüm :** $\left[\frac{-13}{7}\right] = -2$ olmalıydı.

b) $\left[\frac{-13}{7}\right] = -1$ **Çözüm :** $\left[\frac{-13}{7}\right] = -1$ 'dir.

c) $\left[\frac{n}{7}\right] = -1$ ise $-7 \leq n < 0$ olur. **Çözüm :** Doğrudur.

d) $\left[\frac{n}{7}\right] = -1$ ise $-14 < n \leq -7$ olur. **Çözüm :** Doğrudur.

Ondalık Gösterim

Alıştırma 9.28.

Aşağıdaki ondalık kesirlere karşılık gelen ondalık sayıları yazınız.

a) $\frac{23}{10000} = \dots\dots\dots$

Çözüm : 0, 0023.

b) $\frac{-301}{10000} = \dots\dots\dots$

Çözüm : -0, 0301.

c) $0, 52 \times 1000 = \dots\dots\dots$

Çözüm : 520.

d) $2, 03 \times 10^4 = \dots\dots\dots$

Çözüm : 20300

e) $\frac{0, 23}{10000} = \dots\dots\dots$

Çözüm : 0, 000023.

Alıştırma 9.29.

$$\frac{11}{400}$$

sayısını ondalık olarak yazınız.

Çözüm :

$$\frac{11}{400} = \frac{11}{4 \cdot 100} = \frac{11 \cdot 25}{4 \cdot 25 \cdot 100} = \frac{275}{10000} = 0, 0275$$

elde edilir.

Alıştırma 9.30.

14a, b5 ondalık sayısında a rakamının basamak değeri, b rakamının basamak değerinin 40 katı ise 14a, b5 hangi sayılar olabilir?

Çözüm : a birler basamağında, b ise $\frac{1}{10}$ 'lar basamağındadır. O halde, basamak değerleri sırasıyla :

$$a \text{ ve } b \cdot \frac{1}{10}$$

olacaktır.

$$a \div \frac{b}{10} = a \times \frac{10}{b} = 10 \cdot \frac{a}{b} = 40$$

ise $\frac{a}{b} = \frac{40}{10} = \frac{4}{1} = \frac{8}{2}$ olacağından 144, 15 veya 148, 23 olabilir.

Alıştırma 9.31.

Aşağıdaki işlemleri yapınız.

a) $1, 13 - (-0, 18) = ?$

Çözüm : $1, 13 - (-0, 18) = 1, 13 + 0, 18$ olduğundan,

$$1, 13 - (-0, 18) = 1, 13 + 0, 18 \\ = \frac{113}{100} + \frac{18}{100} = \frac{131}{100} = 1, 31$$

bulunur.

b) $-1, 13 + 0, 18$

Çözüm : $113 - 18 = 95$ olduğundan,

$$-1, 13 + 0, 18 = \frac{-113}{100} + \frac{18}{100} \\ = \frac{-113 + 18}{100} = \frac{-95}{100} = -0, 95$$

olur.

Alıştırma 9.32.

$(-1, 13) \cdot (-0, 14) = ?$

Çözüm :

$$(-1, 13) \cdot (-0, 14) = \frac{113 \cdot 14}{10000} \\ = \frac{1582}{10000} \\ = 0, 1582$$

olur.

Alıştırma 9.33.

$(-0, 182) \div (-0, 14) = ?$

Çözüm : İki sayının işareti de - olduğundan bölüm + olacaktır.

$$(-0, 182) \div (-0, 14) = \frac{182}{1000} \div \frac{14}{100} \\ = \frac{182}{1000} \cdot \frac{100}{14} \\ = \frac{182}{14} \cdot \frac{1}{10} = 1, 3$$

olur.

Alıştırma 9.34.

$$\frac{0, 6}{0, 02} + \frac{20, 2}{1, 01} - \frac{10, 4}{0, 2} \div \frac{2}{0, 1} = ?$$

Çözüm :

$$\frac{60}{2} + \frac{2020}{101} - \frac{104}{2} \cdot \frac{1}{20} = 30 + 20 - \frac{13}{5} \\ = 50 - 2, 6 = 47, 4$$

Devirli Ondalık Sayı Kavramı

Alıştırma 9.35.

Aşağıdaki rasyonel sayıların hangilerinin ondalık gösterimi devirlidir?

$$\frac{7}{28}, \frac{31}{80}, \frac{2}{117}, \frac{100}{101}$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{7}{28} &= \frac{1}{4} \rightarrow \text{payda } 2^2 \rightarrow \text{Devirli değil} \\ \frac{31}{80} &\rightarrow \text{payda } 2^4 \cdot 5 \rightarrow \text{Devirli değil} \\ \frac{2}{117} &\rightarrow \text{Paydada } 2 \text{ ve } 5 \text{ ten farklı asal var. Devirlidir.} \\ \frac{100}{101} &\rightarrow \text{Paydada } 2 \text{ ve } 5 \text{ ten farklı asal var. Devirlidir.} \end{aligned}$$

★ Devirli sayıyı kesir olarak yazma ★

Devirli bir sayı kesir olarak yazılmak istenirse, virgöl ve devreden kısım dikkate alınmadan oluşan **tüm sayıdan, devretmeyen kısmı** yine virgülsüz olarak düşünüp **çıkartırız**. Böylece kesrin **payını** bulmuş olur. Paydaya ise, virgülden sonraki devreden rakam kadar 9 ve devretmeyen rakam kadar da 0 yazılır. Kısaca,

$$A,BCDEF = \frac{ABCDEF - ABC}{99900}$$

biçiminde ifade edebiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned} 3, \bar{7} &= \frac{37 - 3}{9} = \frac{34}{9}, \\ 0, \bar{6} &= \frac{06 - 0}{9} = \frac{6}{9}, \\ 2, 34\bar{6} &= \frac{2346 - 234}{900} = \frac{2112}{900} \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 9.36.

Aşağıdaki ondalık sayıları kesir olarak yazınız.

a) $2, \bar{7} =$

Çözüm : $2, \bar{7} = \frac{27 - 2}{9} = \frac{25}{9}$

b) $0, 0\bar{13} =$

Çözüm : $0, 0\bar{13} = \frac{13 - 00}{990} = \frac{13}{990}$

c) $1, 0\bar{5} =$

Çözüm : $1, 0\bar{5} = \frac{105 - 10}{90} = \frac{95}{90} = \frac{19}{18}$

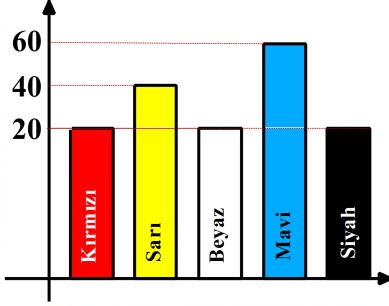
d) $0, 05\bar{3} =$

Çözüm : $0, 05\bar{3} = \frac{53 - 05}{900} = \frac{48}{900} = \frac{4}{75}$

Yüzdelere

Alıştırma 9.37.

Tuğra evinin duvar boyasının rengini aşağıdaki tabloda verilen renkler ve alınan ölçülere uygun olarak karıştırıyor. Ortaya çıkan boyanın yüzde kaç sarı renktedir?



Çözüm : Sarı rengin yüzdesi :

$$\frac{40}{20 + 40 + 20 + 60 + 20} = \frac{40}{160} = \frac{1}{4} = \%25$$

elde edilir.

Alıştırma 9.38. AMC8-2010

Rüya 25 soruluk bir sınavın %80'ini, 40 soruluk bir sınavın da %90'ını, 10 soruluk bir sınavın da %70'ini doğru yanıtlamıştır. Rüya tüm soruların yüzde kaçını doğru yanıtlamıştır?

Çözüm : Rüya, sınavlarda sırasıyla

$$\frac{80}{100} \cdot 25 = 20, \quad \frac{90}{100} \cdot 40 = 36, \quad \frac{70}{100} \cdot 10 = 7$$

doğru yapmıştır. Yani, toplam $25 + 40 + 10 = 75$ sorunun

$$20 + 36 + 7 = 63$$

tanecini doğru yapmıştır. Bunun yüzdesi de

$$\frac{63}{75} = \frac{21}{25} = \frac{84}{100} = \%84$$

bulunur.

Alıştırma 9.39. AMC8-2019

Gül'ün bir torba bilyesi vardır. %20'sini arkadaşı Pelin'e, sonra kalanın %10'unu da başka bir arkadaşı olan Ege'ye veriyor. Sonunda Gül, torbada kalan bilyelerin %25'ini kardeşi Can'a veriyor. Gül ilk baştaki bilyelerin yüzde kaçını kendisine bırakmıştır?

Çözüm : Gül bilyelerin %20'sini Pelin'e verdikten sonra elinde bilyelerin %80'i kalmıştır. Daha sonra Ege'ye kalanın %10'unu verirse geriye %90'ı kalacağından,

$$\%90 \cdot \%80 = \%72$$

'si kalır. Son olarak, %25'ini kardeşi Can'a verirse, %75'i kalacağından geriye

$$\%75 \cdot \%72 = \frac{75}{100} \cdot \frac{72}{100} = \frac{3}{4} \cdot \frac{18}{25} = \frac{54}{100} = \%54$$

'ü kalacaktır.

Oran Kavramı

Alıştırma 9.40.

Bir torbada sarı, mavi ve beyaz toplam 141 top vardır.

Mavi topların beyaz toplara oranı $\frac{5}{4}$, beyaz topların

sarı toplara oranı $\frac{3}{5}$ ise kaç sarı top vardır?

Çözüm : Verilenlerden

$$\frac{M}{B} = \frac{5}{4} \quad \text{ve} \quad \frac{B}{S} = \frac{3}{5}$$

yazılabilir. Her iki eşitlikte de **B** oranlanmıştır. Her iki eşitlikte de **B** oranını aynı sayı ile burada 12 ile ifade edebilmek için oranları genişletelim. Bunun için ilk kesiri 3 ile, ikinci kesiri 4 ile genişletebiliriz.

$$\frac{M}{B} = \frac{5}{4} = \frac{15}{12} \quad \text{ve} \quad \frac{B}{S} = \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$$

oranlarına göre,

$$M = 15k, \quad B = 12k \quad \text{ve} \quad S = 20k$$

yazılabilir. Toplam 141 top varsa,

$$M + B + S = 15k + 12k + 20k = 47k = 141$$

ise $k = 3$ alınması gerekir. $S = 20 \cdot 3 = 60$ sarı top vardır.

Alıştırma 9.41. AMC8-2008

Naz öğretmenin sınıfındaki öğrenciler bir hattatlık sınavına giriyorlar. Sınıftaki erkek öğrencilerin üçte ikisi ve kız öğrencilerin dörtte üçü sınavı geçiyorlar. Sınavı eşit sayıda erkek ve kız öğrenci geçtiğine göre, sınıftaki mümkün olan öğrenci sayısı en az kaçtır?

Çözüm : Erkek öğrencilerin sayısı E , kız öğrencilerin sayısı K olsun. Sınavı eşit sayıda erkek ve kız öğrenci geçtiğinden

$$\frac{2}{3}E = \frac{3}{4}K$$

yazılabilir. Buradan $E : K$ oranı

$$\frac{E}{K} = \frac{9}{8}$$

bulunur. En az öğrenci sayısı için 9 erkek ve 8 kız öğrenci alınır ve öğrenci sayısı da en az $9 + 8 = 17$ bulunur.

Alıştırma 9.42. ♣

Kenar uzunlukları 1 br olan 30 sarı, 30 mavi ve 30 beyaz küpün bir kısmını kullanarak bir kenarı 4 br olan daha büyük bir küp oluşturuluyor. Kullanılan mavi küp sayısının, sarı küp sayısına oranı $\frac{2}{5}$ ise, kullanılabilecek beyaz küp sayısı hangi değerler olabilir?

Çözüm : Bir kenarı 4 br olan bir küp oluşturmak için 64 küp kullanılmalıdır.

$$\frac{M}{S} = \frac{2}{5} \text{ ve toplam 64 küp var.}$$

Buna göre, her bir toptan en fazla 30 tane olduğu da göz önüne alınırsa,

Mavi küp sayısı	2	4	6	8	10	12
Sarı küp sayısı	5	10	15	20	25	30
Beyaz küp sayısı	57	50	43	36	29	22

olduğundan, beyaz küp sayısı 29 veya 22 olabilir.

Problemler (Rasyonel Sayılar)

Prob. 9.1 $\frac{10 + 2 \times 30 + 4}{1 \times 20 + 3 \times 40}$ kesrinin en sadeleşmiş değeri kaçtır?

Çözüm : Pay ve paydada toplama işlemleri var. Önce onlardan kurtulalım.

$$\frac{10 + 2 \times 30 + 4}{1 \times 20 + 3 \times 40} = \frac{10 + 60 + 4}{20 + 120} = \frac{74}{140} = \frac{37}{70}$$

Prob. 9.2 $\frac{1919^2 + 1919 \times 919 - 38 \cdot 1919}{1919^2 + 1919 \times 191 - 10 \cdot 1919}$ rasyonel sayısının en sadeleşmiş değeri kaçtır?

Çözüm : 1919 parantezine alırsak,

$$\frac{1919 \cdot (1919 + 919 - 38)}{1919 \cdot (1919 + 191 - 10)} = \frac{2800}{2100} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}$$

olur.

Prob. 9.3 $-\frac{91}{23}$ rasyonel sayısı hangi ardışık iki tam sayı arasında yer alır?

Çözüm :

$$-4 = \frac{-92}{23} < \frac{-91}{23} < \frac{-69}{23} = -3$$

olduğundan -4 ile -3 arasında yer alır.

Prob. 9.4 $-\frac{21}{10}$ ve $\frac{41}{4}$ rasyonel sayıları arasında kaç tam sayı vardır?

Çözüm : $-\frac{21}{10}$ sayısı sayı doğrusunda -2 'nin solunda yer alır, $\frac{41}{4}$ sayısı ise 10 'un sağında yer alır. Yani, bu iki sayı arasındaki tam sayılar :

$$-2, -1, 0, 1, \dots, 9, 10$$

olacaktır. Bunların sayısı da

$$10 - (-2) + 1 = 13$$

bulunur.

Prob. 9.5 Bir n sayısı önce $\frac{3}{5}$ ile bölünüyor sonra, $\frac{7}{6}$ ile çarpılıyor. Bu n sayısı hangi kesirle bölünürse aynı sonuç elde edilir?

Çözüm : Verilen işlemler

$$\left(n \div \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{7}{6}$$

biçimindedir. Düzenlersek,

$$\left(n \cdot \frac{5}{3}\right) \cdot \frac{7}{6} = n \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{6} = n \cdot \frac{35}{18} = n \div \frac{18}{35}$$

olduğundan, yanıt $\frac{18}{35}$ bulunur.

Prob. 9.6 $\frac{13}{5} \div \frac{\left(\frac{5}{3} - 1\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right)}{\frac{2}{3}}$ değerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{13}{5} \div \frac{\left(\frac{5}{3} - 1\right) + \left(1 - \frac{3}{5}\right)}{\frac{2}{3}} &= \frac{13}{5} \div \frac{\frac{2}{3} + \frac{2}{5}}{\frac{2}{3}} \\ &= \frac{13}{5} \div \frac{\frac{16}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{13}{5} \div \left(\frac{16}{15} \cdot \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{13}{5} \div \frac{8}{5} = \frac{13}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{13}{8} \end{aligned}$$

olur.

Prob. 9.7 $\frac{7}{6}$ sayısının sayı doğrusu üzerinde $\frac{4}{3}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{5}{4}$, $-\frac{1}{6}$ sayılarına uzaklıkları sırasıyla a , b , c ve d 'dir. Bu sayıları büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

Çözüm : $\frac{7}{6}$ sayısının verilen sayılara uzaklıklarını bulalım.

$$\begin{aligned} a &= \left| \frac{7}{6} - \frac{4}{3} \right| = \left| \frac{-1}{6} \right| = \frac{1}{6}, \\ b &= \left| \frac{7}{6} - \frac{6}{5} \right| = \left| \frac{-1}{30} \right| = \frac{1}{30}, \\ c &= \left| \frac{7}{6} - \frac{5}{4} \right| = \left| \frac{-1}{12} \right| = \frac{1}{12}, \\ d &= \left| \frac{7}{6} - \left(-\frac{1}{6}\right) \right| = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

olduğundan $d > a > c > b$ elde edilir.

Prob. 9.8 Bir sayının 3,2 katı 120 ise bu sayının 2,3 katı kaçtır?

Çözüm : Önce sayıyı bulalım. Sayı

$$120 \div 3,2 = \frac{120}{3,2} = \frac{1200}{32} = \frac{75}{2}$$

olur. O halde, bu sayının 2,3 katı

$$2,3 \cdot \frac{75}{2} = \frac{23}{10} \cdot \frac{75}{2} = \frac{23}{5 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 15}{2} = \frac{345}{4}$$

veya $\frac{345}{4} = 86,25$ bulunur.

Prob. 9.9

$$\frac{1}{n} < \frac{2}{3} < \frac{4}{n}$$

eşitsizliğini sağlayan kaç n tam sayısı vardır?

Çözüm : n sayısının negatif olamayacağı açıktır. O halde, tamamını ters çevirip eşitsizliklerin yönünü değiştirebiliriz.

$$\begin{aligned} \frac{n}{1} > \frac{3}{2} > \frac{n}{4} &\Rightarrow \frac{4n}{4} > \frac{6}{4} > \frac{n}{4} \\ &\Rightarrow 4n > 6 > n \end{aligned}$$

olur. Buradan, $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ olabilir.

Prob. 9.10

$$\frac{1121}{0,002} \div \left(\frac{111}{0,05} + \frac{11}{0,5} \right)$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} &\frac{1121000}{2} \div \left(\frac{11100}{5} + \frac{110}{5} \right) \\ &= \frac{1121 \cdot 1000}{2} \div \frac{1121 \cdot 10}{5} \\ &= \frac{1121 \cdot 1000}{2} \cdot \frac{5}{1121 \cdot 10} \\ &= 250 \end{aligned}$$

elde edilir.

Prob. 9.11 Aşağıdaki ifadeyi hesaplayınız.

$$\frac{1,5}{18} \div \left(\frac{1}{1,5} - \frac{2}{0,5} \right)$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{15}{180} \div \left(\frac{10}{15} - \frac{20}{5} \right) &= \frac{15}{180} \div \frac{-50}{15} \\ &= \frac{15}{180} \cdot \frac{15}{-50} \\ &= \frac{-1}{40} = \frac{-25}{1000} \\ &= -0,025 \end{aligned}$$

olur.

Prob. 9.12 A, B ve C sayıları için

$$A \cdot B < 0,$$

$$A + C = 0,$$

$$B + C < 0$$

olduğuna göre A, B ve C sayılarının işaretlerini bulunuz?

Çözüm : $A \cdot B < 0$ ise A veya C 'den biri negatif olmalıdır. Kabul edelim ki, $A < 0$ ve $B > 0$ olsun.

$$A + C = 0 \Rightarrow C > 0 \Rightarrow B + C > 0$$

olur. Halbuki, $B + C < 0$ verilmiş. Yani, $A < 0, B > 0$ olamaz.

O halde, $A > 0$ ve $B < 0$ için bakalım.

$$A + C = 0 \Rightarrow C < 0 \Rightarrow B + C < 0$$

olur ve istenen sağlanır.

Prob. 9.13 AMC8-2012

Polat'ın ailesi akşam yemeği için 12 dilim pizza sipariş etti. Polat bir dilim yedi ve diğer dilimi kardeşi Pelin ile eşit olarak paylaştı. Polat pizzanın ne kadarını yemiştir?

Çözüm : Polat

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

dilim pizza yemiştir. Pizzada toplam 12 dilim var. O halde, Polat'ın yediği dilim miktarının pizzadaki dilim miktarına oranı

$$\frac{\frac{3}{2}}{12} = \frac{3}{2} \div \frac{12}{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

olur.

Prob. 9.14 a, b ve c sıfırdan farklı tam sayılar olmak üzere,

$$c < 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

ise a, b ve c sayılarını büyükten küçüğe doğru sıralayınız.

Çözüm : c negatif ve $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ olduğundan b pozitiftir.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c}$$

olduğundan a sayısının da negatif olması gerekir. Hem a hem c negatif olduğundan

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{c} \xrightarrow{\text{yön değişir}} a > c$$

olur. Böylece, $b > a > c$ elde edilir.

Prob. 9.15

$$\frac{0,3}{0,15 + \frac{0,12}{-5,3 + \frac{1}{0,2}}} = ?$$

Çözüm : $\frac{1}{0,2} = 5$ ve $-5,3 + 5 = -0,3$ olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{0,3}{0,15 + \frac{0,12}{-0,3}} &= \frac{0,3}{0,15 - \frac{12}{30}} = \frac{0,3}{\frac{15}{100} - \frac{12}{30}} \\ &= \frac{0,3}{\frac{3}{20} - \frac{4}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{20} - \frac{4}{10}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{3-8}{20}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{-5}{20}} = \frac{3}{10} \times \frac{-4}{1} = \frac{-6}{5} = -1,2 \end{aligned}$$

Prob. 9.16

$$\frac{0,1\overline{3} + 0,1\overline{5}}{0,1\overline{5} + 1,1\overline{3}} = ?$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{0,1\overline{3} + 0,1\overline{5}}{0,1\overline{5} + 1,1\overline{3}} &= \frac{\frac{13-1}{90} + \frac{15}{99}}{\frac{15-1}{90} + \frac{13}{99}} = \frac{\frac{12 \cdot 11}{90 \cdot 11} + \frac{15 \cdot 10}{99 \cdot 10}}{\frac{14 \cdot 11}{90 \cdot 11} + \frac{13 \cdot 10}{99 \cdot 10}} \\ &= \frac{\frac{12 \cdot 11 + 15 \cdot 10}{990}}{\frac{14 \cdot 11 + 13 \cdot 10}{990}} = \frac{282}{284} = \frac{141}{142} \end{aligned}$$

bulunur.

Prob. 9.17 $\frac{4}{7}$ bir devirli sayıdır. Bu devirli sayının virgülden sonraki 99 rakamının toplamı kaçtır?

Çözüm : $\frac{4}{7} = 0,5\overline{71428}$ olduğundan virgülden sonra $5 + 7 + 1 + 4 + 2 + 8 = 27$ toplamı 16 kez olur ve $99 - 16 \cdot 6 = 3$ olduğundan en son 571 olacaktır. Böylece, virgülden sonraki ilk 99 rakamın toplamı : $27 \cdot 16 + 5 + 7 + 1 = 445$ elde edilir.

$$\begin{array}{r} 40 \overline{) 7} \\ - 35 \overline{) 0,571428} \\ \underline{50} \\ - 49 \\ \underline{10} \\ - 07 \\ \underline{30} \\ - 28 \\ \underline{20} \\ - 14 \\ \underline{60} \\ - 56 \\ \underline{40} \end{array}$$

Prob. 9.18 AJHSME-1989

Ela'nın okulunda her 3 basketbol oyuncusu için 2 voleybol oyuncusu vardır. Basketbol ve voleybol oyuncusu toplam 30 öğrenci varsa, yüzde kaç voleybol oynamaktadır?

Çözüm : Basketbol veya voleybolcu her 5 öğrencinin 3 tanesi basketbolcudur. O halde,

$$\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = \%40$$

kadarı voleybol oynar. Buradaki 30 öğrenci bu yüzdeyi etkilemeyen gereksiz bir bilgidir.

Prob. 9.19 $-1 < n < 0$ ve $n \in \mathbb{Q}$ olmak üzere

$$a = \frac{1}{n}, \quad b = n^2, \quad c = n, \quad d = -n^2$$

ifadelerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm : Belirtilen aralıkta bir n sayısı alarak kontrol edelim.

$$n = \frac{-1}{2} \text{ olsun.}$$

$$a = \frac{1}{n} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{-1} = -2,$$

$$b = n^2 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{(-1)}{2} \frac{(-1)}{2} = \frac{1}{4},$$

$$c = n = \frac{-1}{2},$$

$$d = -n^2 = -\frac{1}{4}$$

ise $a < c < d < b$ olur.

Prob. 9.20 AMC8-2008

2005'de Altay iki yıl için 100 dolarlık yatırım yapıyor. İlk yıl boyunca yatırımı %15 zarar ediyor. Fakat, ikinci yılda kalan yatırımı %20 kazanç getiriyor. İki yıllık süre sonunda Altay'ın yatırımındaki değişim yüzde kaçtır?

Çözüm : İlk yıl %15 kaybindan sonra, Altay'ın yatırımı

$$\frac{85}{100} \cdot 100 = 85$$

dolar olacaktır. İkinci yıl %20 kazanç sağladığına göre,

$$\frac{120}{100} \cdot 85 = 102$$

doları olur. Böylece 100 doları 102 dolar olur ki, yatırımı %2 artmıştır.

Prob. 9.21 AJHSME-1989

Can'ın 128 elması vardır. Bunların %25'ini Ece'ye sattı. Daha sonra kalanlarının da %25'ini de Ada'ya satıyor. Can, son olarak çantasında kalan elmaların en parlak olanını öğretmene verdi. Buna göre, Can'ın geriye kaç elması kalır?

Çözüm : Can ilk satışında

$$\frac{25}{100} \cdot 128 = \frac{1}{4} \cdot 128 = 32$$

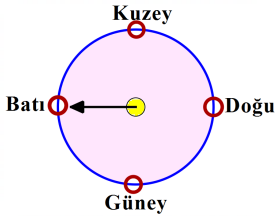
elma satar. Geriye $128 - 32 = 96$ elması kalır. İkinci satışında da

$$\frac{25}{100} \cdot 96 = \frac{1}{4} \cdot 96 = 24$$

elma satar ve geriye $96 - 24 = 72$ elma kalır. 1 tanesini de öğretmene verirse $72 - 1 = 71$ elması kalır.

Prob. 9.22 AMC8-2006

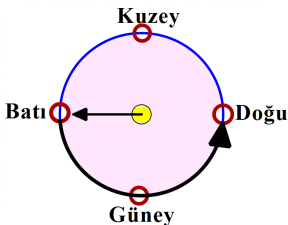
Bir ok başlangıçta batıyı göstermektedir. Ok önce saat yönünde $2\frac{1}{4}$ devir ve ardından saat yönünün tersine $3\frac{3}{4}$ devir hareket ettirilirse hangi yönü gösterir?



Çözüm : 1 Ok saat yönünde $2\frac{1}{4}$ devir ve ardından saat yönünün tersine $3\frac{3}{4}$ devir giderse, sonuçta

$$3\frac{3}{4} - 2\frac{1}{4} = 1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$$

devir saat yönünün tersine gider. Yani 1 kez tam devir yapıp tekrar Batı'yı gösterdikten sonra yarım devir daha giderek doğuyu gösterir.

**Prob. 9.23 AMC8-2006**

Alp 10 soruluk testte %70, 20 soruluk testte %80 ve 30 soruluk testte %90 oranında soruları doğru olarak yanıtlamıştır. Üç testin tamamına göre, doğrularının yaklaşık yüzdesi kaçtır?

Çözüm : Her bir testteki doğru sayıları

$$\%70 \cdot 10 = 7, \quad \%80 \cdot 20 = 16, \quad \%90 \cdot 30 = 27$$

olduğundan, üç testteki doğru yüzdesi

$$\frac{7 + 16 + 27}{10 + 20 + 30} = \frac{5}{6} = \% \frac{500}{6} = \%83, \bar{3} \simeq \%83$$

Prob. 9.24 AMC8-2006

Aşağıdaki tabloda bir radyo istasyonu tarafından yapılan anketin sonuçları vardır.

	Dinliyorum	Dinlemiyorum	Toplam
Erkek	?	26	?
Kadın	58	?	96
Toplam	136	64	200

Buna göre, erkeklerin yüzde kaç bu radyoyu dinlemektedir?

Çözüm : Önce tablonun gerei kalanını dolduralım.

	Dinliyorum	Dinlemiyorum	Toplam
Erkek	78	26	104
Kadın	58	38	96
Toplam	136	64	200

Buna göre, radyoyu dinleyen erkeklerin yüzdesi

$$\frac{78}{104} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 13} = \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = \%75$$

bulunur.

Prob. 9.25 AMC8-2002

Bir satıcı, bir ürünü önce %30 indirimle satmaktadır. Daha sonra, satıcı satış fiyatı üzerinden %20 daha ek indirim yapıyor. Satıcı toplam % kaç indirim yapmıştır?

Çözüm : Ürünün fiyatı 100 lira olsun. Önce %30 indirim yaparsa ürün 70 liraya düşer. 70 lirada %20 daha indirim yapıyor. Yani, $\frac{20}{100} \cdot 70 = 14$ lira daha indirim yapılırsa, son fiyat $70 - 14 = 56$ lira olur. Yani, üründe 44 lira indirim yapılmıştır. O halde, toplam indirim yüzdesi %44 olur.

Prob. 9.26 AJHSME-1991

Tamamı boyalı bir eşkenar üçgenin dörtte birlik ortadaki kısmı kesip çıkarılıyor. Her adımda tamamı koyu renk olan üçgenlerin dörtte birlik ortadaki kısımları çıkarılıyor. Beşinci adımda kalan alan başta verilen tüm üçgenin kaçta kaçtır?



Çözüm : Birinci adımda üçgenin $\frac{3}{4}$ 'ü kalmıştır.

İkinci adımda, kalan her üçgen parçasının $\frac{3}{4}$ 'ü kalır. Yani $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ 'sı kalır.

Üçüncü adımda geri kalan her üçgen parçasının $\frac{3}{4}$ 'ü kalır.

Yani $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}$ 'ü kalır.

Bu düşünceyle 4. adımda $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ ve beşinci adımda

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$$

'lük kısmı kalacaktır.

Prob. 9.27 $\lfloor a \rfloor$ ve $\lceil a \rceil$ gösterimleri sırasıyla a sayısının taban ve tavan tam değerlerini göstermektedir. Buna göre,

$$S = \left\lfloor -\frac{40}{13} \right\rfloor + \lceil -3,025 \rceil + \lfloor 6, \overline{12} \rfloor + \left\lceil \frac{17}{13} \right\rceil$$

değerini hesaplayınız. ($\lfloor a \rfloor$: a sayısından büyük olmayan en büyük tam sayı, $\lceil a \rceil$: a sayısından küçük olmayan en küçük tam sayı biçiminde tanımlanır.)

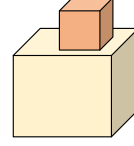
Çözüm :

$$\begin{aligned} S &= \left\lfloor -\frac{40}{13} \right\rfloor + \lceil -3,025 \rceil + \lfloor 6, \overline{12} \rfloor + \left\lceil \frac{17}{13} \right\rceil \\ &= -4 + (-3) + 6 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olur.

Prob. 9.28 AMC8-2000

Bir küpün kenar uzunluğu 2 birimdir. Kenar uzunluğu 1 olan bir küçük küpü büyük küpün üzerine şekildeki gibi yapıştırdığımızda, yeni oluşan cismin dış yüzey alanı, orjinal $2 \times 2 \times 2$ küpün alanından yaklaşık % kaç fazladır?



Çözüm : Orijinal küpün yüzey alanlarının toplamı 6 tane 2×2 'den

$$6 \cdot (2 \cdot 2) = 24$$

olur. Yeni cismin yüzey alanı ise, orjinal küpün alanına 4 tane $1 \times 1 = 1$ alanın eklenmesiyle elde edilir ve

$$24 + 4 \cdot 1 = 28$$

bulunur. Buna göre, yüzey alanındaki artış 4'tür ve bu artışın yüzdesi

$$\%100 \cdot \frac{4}{24} = \% \frac{50}{3} = \%16,66... = \%16,7$$

elde edilir.

Prob. 9.29 AMC8-2013

Antalya ürün fuarında bir satıcı sandaletlerde "fuar indirimi" yapmaya karar veriyor. Normal fiyatı olan 50 dolardan bir çift sandalet alana, ikinci bir çifti %40 indirimle ve üçüncü bir çifti de normal fiyatın yarısına satılıyor. Ceylan, üç çift sandalet satın almak için "fuar indirimi" fırsatından yararlandığına göre, 150 dolarlık normal fiyattan % kaç tasarruf etmiştir?

Çözüm : İndirimsiz üç sandalet için ödenmesi gereken para $50 \cdot 3 = 150$ dolar iken, fuar kampanyası ile

$$50 + \frac{60}{100} \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot 50 = 105.$$

dolar oluyor. Yani, 150 dolardan 45 dolar tasarruf etmiştir. Bu ise,

$$\frac{45}{150} = \frac{15}{50} = \frac{30}{100}$$

olduğundan %30 tasarruf demektir.

Prob. 9.30 AMC8-2002

Mine'nin aynı boyda bir düzine portakalı ve aynı boyda bir düzine armutu vardır. Mine, meyve sıkacağına kullanarak 3 armuttan 80 gr armut suyu ve 2 portakaldan 80 gr portakal suyu çıkarıyor. Eşit sayıda armut ve portakaldan armut-portakal suyu karışımı yapıyor. Karışımın yüzde kaç armut suyudur?

Çözüm : Bir armut, armut başına $\frac{80}{3}$ gr meyve suyu verir.

Bir portakal, portakal başına $\frac{80}{2} = 40$ gr meyve suyu verir. Armut-portakal suyu karışımında bir armut ve bir portakal kullanılmışsa, armut suyunun yüzdesi

$$\frac{\frac{80}{3}}{\frac{80}{3} + 40} = \frac{\frac{80}{3}}{\frac{80 + 120}{3}} = \frac{\frac{80}{3}}{\frac{200}{3}} = \frac{80}{200} = \frac{40}{100}$$

olur.

Prob. 9.31 Keloğlan kim milyoner olsun yarışmasında aşağıdaki soru için, telefon jokeri kullanarak sizi arıyor.

Kim milyoner olsun yarışmasında artış yüzdesi hangisinde en fazladır?

A: 2000'den 3000'e

B: 5000'den 7500'e

C: 3000'den 5000'e

D: 500'den 1000'e

Bu sorunun yanıtını bulunuz.



Çözüm :

$$2000 \rightarrow 3000\text{'e artış } 1000 \Rightarrow \frac{1000}{2000} = \%50 \text{ artış.}$$

$$5000 \rightarrow 7500\text{'e artış } 2500 \Rightarrow \frac{2500}{5000} = \%50 \text{ artış.}$$

$$3000 \rightarrow 5000\text{'e artış } 2000 \Rightarrow \frac{2000}{3000} = \%66 \text{ artış.}$$

$$500 \rightarrow 1000\text{'e artış } 500 \Rightarrow \frac{500}{500} = \%100 \text{ artış.}$$

olduğundan artış yüzdesinin en fazla olduğu durum 500'den 1000'e artışıdır.

Prob. 9.32 AMC8-2007

30 litre boya karışımı, %25 kırmızı renk tonu, %30 sarı renk tonu ve %45 sudur. Orijinal karışıma beş litre sarı renk tonu eklenir. Yeni karışımındaki sarı renk tonunun yüzdesi kaçtır?

Çözüm : Orijinal 30 litre boyanın %30'u sarı ise 9 litresi sarı boyadır. Yeni karışıma 5 litre sarı boya eklendiğinden, yeni karışım $9 + 5 = 14$ litre sarı ton vardır. Böylece yeni karışım 35 litre ve bunun 14 litresi sarı boyadır.

Yani, 35 litre nin yüzde kaçının 14 olduğunu bulmalıyız.

$$\frac{14}{35} = \frac{14 \div 7}{35 \div 7} = \frac{2}{5} = \frac{40}{100}$$

olduğundan %40'ı sarı boyadır.

Prob. 9.33 AMC8-2000

Alp ve Suna bir zamanlar aynı boydaydı. O zaman beri Suna %20 uzarken; Alp, Suna'nın yarısı kadar uzamıştır. Suna şimdi 60 inch boyunda olduğuna göre Alp'in uzunluğu şimdi kaç inch olur? (**Not :** Inch ABD ve İngiltere gibi ülkelerde kullanılan 2,54 cm uzunluğuna karşılık gelen bir uzunluk ölçüsüdür.)

Çözüm : Suna %20 uzamış. Yani, başta x inch ise, şimdi $\frac{120}{100}x$ inch olur. Buradan,

$$\frac{120}{100}x = 60 \Rightarrow \frac{12}{10}x = 60 \Rightarrow x = 50$$

olur. Yani, $60 - 50 = 10$ inch uzamış. Alp ise $10 \div 2 = 5$ inch uzamış olur. O halde, Alp

$$50 + 5 = 55$$

inch uzunluğundadır.

Prob. 9.34 AMC8-2011

Erkeklerin kızlara oranının 5 : 4 olduğu Atatürk Ortaokulu'nda 270 öğrenci bulunmaktadır. Erkeklerin kızlara oranının 4 : 5 olduğu Cumhuriyet Ortaokulunda ise 180 öğrenci bulunmaktadır. İki okul tarafından düzenlenen bir dans gecesine her iki okuldaki tüm öğrenciler katılmıştır. Danstaki kız öğrencilerin tüm öğrencilere oranı kaçtır?

Çözüm : Atatürk Ortaokulunda

$$\frac{4}{9} \times 270 = 120$$

kız, Cumhuriyet Ortaokulu'nda ise

$$\frac{5}{9} \times 180 = 100$$

kız vardır. Buna göre, kız öğrencilerin toplam öğrenci sayısına oranı

$$\frac{120 + 100}{270 + 180} = \frac{220}{450} = \frac{22}{45}$$

bulunur.

Prob. 9.35 Sevgi'nin yaşının Can'ın yaşına oranı $\frac{3}{7}$, Can'ın yaşının Ela'nın yaşına oranı ise $\frac{7}{3}$ olduğu biliniyor. 5 yıl sonraki yaşları toplamı 41 ise Can'ın bugünkü yaşı kaçtır?

Çözüm : Verilen oranlardan

$$\frac{\text{Sevgi}}{\text{Can}} = \frac{3}{7} \quad \text{ve} \quad \frac{\text{Can}}{\text{Ela}} = \frac{7}{3}$$

yazılabilir. Her iki oranda da Can aynı sayı ile (7 ile) oranlandığı için, bugünkü yaşlarına

$$\text{Sevgi} = 3k, \text{ Can} = 7k, \text{ Ela} = 3k$$

diyebiliriz. 5 yıl sonraki yaşları ise, sırasıyla

$$3k + 5, \quad 7k + 5, \quad 3k + 5$$

olur. Bunları toplarsak,

$$13k + 15 = 41 \Rightarrow 13k = 41 - 15 = 26 \Rightarrow k = 2$$

elde edilir. Yani, Can'ın bugünkü yaşı $7k = 7 \cdot 2 = 14$ bulunur.

Prob. 9.36 Ela, Alp ve Can kitap okuma yarışması düzenliyorlar. Ela'nın okuduğu kitap sayısı, Can'ın okuduğu kitap sayısının $\frac{3}{7}$ 'sidir. Can'ın okuduğu kitap sayısının, Alp'in okuduğu kitap sayısına oranıysa $\frac{5}{7}$ 'dir. Toplam 198 kitap okuduklarına göre Ela kaç kitap okumuştur?

Çözüm : Verilen oranlardan

$$\frac{\text{Ela}}{\text{Can}} = \frac{3}{7} \quad \text{ve} \quad \frac{\text{Can}}{\text{Alp}} = \frac{5}{7}$$

yazılabilir. Her iki oranda da Can var, fakat farklı sayılarla (birinde 7, diğerinde 5) oranlandıkları için öncelikle bu sayıları eşit olacak şekilde iki oranı da genişletelim. 7 ve 5'i 35'e genişleteceğiz.

$$\frac{\text{Ela}}{\text{Can}} = \frac{3}{7} = \frac{15}{35} \quad \text{ve} \quad \frac{\text{Can}}{\text{Alp}} = \frac{5}{7} = \frac{35}{49}$$

olduğundan, Ela = $15k$, Can = $35k$, Alp = $49k$ diyebiliriz. Bunları toplamı 198 ise,

$$15k + 35k + 49k = 198 \Rightarrow 99k = 198$$

denklemi elde edilir. Buradan, $k = 198 \div 99 = 2$ olur. O halde, Ela $15k = 30$ kitap okumuştur.

Prob. 9.37 Tuz oranı %12 olan 10 kg tuzlu su karışımına 1 kg daha tuz ekleniyor. Son durumda karışımın tuz oranı yüzde kaçtır?

Çözüm : 10 kg'lık karışımın tuz oranı %12 ise

$$\frac{12}{100} \cdot 10 = \frac{120}{100} = 1,2 \text{ kg}$$

tuz vardır. Buna göre, 1 kg daha tuz eklenirse

$$\begin{aligned} \frac{\text{Tuz}}{\text{Karışım}} &= \frac{1,2 + 1}{10 + 1} = \frac{2,2}{11} = \frac{22}{110} \\ &= \frac{2 \cdot 11}{10 \cdot 11} = \frac{2}{10} = \frac{20}{100} = \%20 \end{aligned}$$

olur.

Cebirsel İfadeler

Alıştırma 10.1.

Aşağıdaki cebirsel ifadeleri sadeleştiriniz.

a) $5x + 4 + 3y + 7x + 3x - 2 =$

Çözüm : a) $5x + 4 + 3y + 7x + 3x - 2 = 15x + 3y + 2$

b) $5a + 7 + 7a^2 + 6a + a^2 - 2 =$

Çözüm : b) $5a + 7 + 7a^2 + 6a + a^2 - 2 = 8a^2 + 11a + 5$

c) $x^2 - 3xy + 7xy + 2y^2 =$

Çözüm : c) $x^2 + 4xy + 2y^2$

Alıştırma 10.2.

Aşağıdaki ifadeleri parantezlerden kurtularak sadeleştiriniz.

a) $3x - 5y - 12y - (-3y) - (-3x) =$

Çözüm : a) $3x - 5y - 12y + 3y + 3x = 6x - 14y$

b) $(-3a) \cdot (5a) =$

Çözüm : b) $(-3a) \cdot (5a) = -15a^2$

c) $5 - (-2x) - (+4x) - (-7x) =$

Çözüm : c) $5 + 2x - 4x + 7x = 5x + 5$

d) $(-3x) - (-5x) - (-7x) - (3y) =$

Çözüm : d) $-3x + 5x + 7x - 3y = 9x - 3y$

e) $-2(x - 3) =$

Çözüm : b) $-2(x - 3) = -2x + 6$

f) $3 - (-3)(5 - 2x) =$

Çözüm : b) $3 + 3(5 - 2x) = 3 + 15 - 6x = 18 - 6x$

g) $-2(3x - 5y + 2) =$

Çözüm : b) $-2(3x - 5y + 2) = -6x + 10y - 4$

h) $10y - (-2)(3x - 5y + 1) =$

Çözüm : b) $10y + 2(3x - 5y + 1) =$

$10y + 6x - 10y + 2 = 6x + 2$

i) $(2x - 3y - 1) - (2 - 3x - 4y) =$

Çözüm : b) $2x - 3y - 1 - 2 + 3x + 4y = 5x + y - 3$

Alıştırma 10.3.

Aşağıdaki çarpımları açınız.

a) $(3x - 5y)(x + 2y) =$

Çözüm : a) $3x^2 + 6xy - 5xy - 10y^2 = 3x^2 + xy - 10y^2$

b) $(x - 3)(x - 4) =$

Çözüm : b) $x^2 - 4x - 3x + 12 = x^2 - 7x + 12$

c) $(x - 2)(x + 2) =$

Çözüm : c) $x^2 + 2x - 2x - 4 = x^2 - 4$

d) $(x^2 - 3)(x^2 - 4) =$

Çözüm : d) $x^4 - 4x^2 - 3x^2 + 12 = x^4 - 7x^2 + 12$

e) $(a - 3b)(a - 4b) =$

Çözüm : e) $a^2 - 4ab - 3ab + 12b^2 = a^2 - 7ab + 12b^2$

f) $(a - 3b)(a - 4b + 3) =$

Çözüm : f) $a^2 - 4ab + 3a - 3ab + 12b^2 - 9b = a^2 - 7ab + 3a + 12b^2 - 9b$

g) $(2a)^3 - (-b)^3 =$

Çözüm : g) $(2a)^3 = (2a)(2a)(2a) = 8a^3$ ve $(-b)^3 = (-b)(-b)(-b) = -b^3$ olduğundan, $(2a)^3 - (-b)^3 = 8a^3 - (-b^3) = 8a^3 + b^3$ olur.

Alıştırma 10.4.

Aşağıdaki rasyonel ifadeleri sadeleştiriniz.

$$a) \frac{4-3x}{6} - \frac{4-5x}{6} + \frac{-3x+2}{6} =$$

$$\text{Çözüm : a) } \frac{4-3x}{6} + \frac{-4+5x}{6} + \frac{-3x+2}{6} \\ = \frac{4-3x-4+5x-3x+2}{6} = \frac{2-x}{6}$$

$$b) \frac{-2+4x}{7} - \frac{4-3x}{7} - \frac{10x+2}{7} =$$

$$\text{Çözüm : b) } \frac{-2+4x}{7} + \frac{-4+3x}{7} + \frac{-10x-2}{7} \\ = \frac{-2+4x-4+3x-10x-2}{7} = \frac{-3x-8}{7}$$

Alıştırma 10.5.

Aşağıdaki rasyonel ifadeleri sadeleştiriniz.

$$a) \frac{3x-4}{5} - \frac{4-7x}{2}$$

$$\text{Çözüm : a) } \frac{3x-4}{5} - \frac{4-7x}{2} = \frac{6x-8}{10} - \frac{20-35x}{10} \\ = \frac{6x-8}{10} + \frac{-20+35x}{10} = \frac{41x-28}{10}$$

$$b) \frac{2x-1}{2} - \frac{4-x}{3} - \frac{x-2}{4} =$$

$$\text{Çözüm : b) } \frac{2x-1}{2} - \frac{4-x}{3} - \frac{x-2}{4} \\ = \frac{12x-6}{12} - \frac{16-4x}{12} - \frac{3x-6}{12} \\ = \frac{12x-6-16+4x-3x+6}{12} = \frac{13x-16}{12} :$$

Alıştırma 10.6.

Aşağıdaki rasyonel ifadeleri pay ve paydada ortak paranteze alarak sadeleştiriniz.

$$a) \frac{3x-12}{3}$$

$$\text{Çözüm : a) } \frac{3x-12}{3} = \frac{\cancel{3}(x-4)}{\cancel{3}} = x-4$$

$$b) \frac{3x-12}{4x-16}$$

$$\text{Çözüm : b) } \frac{3x-12}{4x-16} = \frac{\cancel{3}(x-4)}{\cancel{4}(x-4)} = \frac{3}{4}$$

$$c) \frac{a^2+3a}{2a^2+6a}$$

$$\text{Çözüm : c) } \frac{a^2+3a}{2a^2+6a} = \frac{\cancel{a}(a+3)}{\cancel{2a}(a+3)} = \frac{1}{2}$$

$$d) \frac{(x+3)+a(x+3)}{(x+3)+b(x+3)}$$

$$\text{Çözüm : d) } \frac{(x+3)+a(x+3)}{(x+3)+b(x+3)} = \\ \frac{\cancel{(x+3)}(1+a)}{\cancel{(x+3)}(1+b)} = \frac{1+a}{1+b}$$

Cebirsel Kesirleri Parçalama**★ Cebirsel Bir Kesiri Kesirlere Ayırma ★**

Bazen kesirleri, birden fazla kesire ayırmak gerekebilir. Bu ayırma işleminde toplama ve çıkarmada olduğu gibi payda değişmez.

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

şeklinde parçalanır. Örneğin,

$$\frac{15}{4} = \frac{12+3}{4} = \frac{12}{4} + \frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu parçalama cebirsel ifadeler için de geçerlidir. Örneğin,

$$\frac{5x+3}{x} = \frac{\cancel{5x}+3}{\cancel{x}} = 5 + \frac{3}{x}$$

gibi.

Aliřtırma 10.7.

Kaç tane n tam sayısı için,

$$\frac{18n + 15}{3n}$$

kesiri bir tam sayı olur?

Çözüm : Kesiri parçalarsak

$$\frac{18n + 15}{3n} = \frac{18n}{3n} + \frac{15}{3n} = 6 + \frac{5}{n}$$

elde ederiz. Bu ifadenin tam sayı olması için,

$$\frac{5}{n}$$

tam sayı olmalıdır. Buradan $n \in \{1, 5, -1, -5\}$ olabilir.

Aliřtırma 10.8.

Kaç tane n pozitif tam sayısı için,

$$\frac{3n + 16}{3n + 5}$$

kesiri bir pozitif tam sayı olur?

Çözüm : Kesiri parçalarsak

$$\begin{aligned} \frac{3n + 16}{3n + 5} &= \frac{(3n + 5) + 11}{3n + 5} \\ &= \frac{3n + 5}{3n + 5} + \frac{11}{3n + 5} = 1 + \frac{11}{3n + 5} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadenin pozitif tam sayı olması için,

$$\frac{11}{3n + 5}$$

pozitif tam sayı olmalıdır. Buradan

$$3n + 5 \in \{1, 11\}$$

olabilir. O halde, $3n + 5 = 1$ olamaz. Fakat, $n = 2$ için

$$3n + 5 = 11 \text{ ve } \frac{3n + 16}{3n + 5} = 2 \text{ olur.}$$

Aliřtırma 10.9.

$$\frac{n + 2}{2} = \frac{n}{2} + 1$$

eşitliği kaç tane n doğal sayısı için sağlanır?

Çözüm :

$$\frac{n + 2}{2} = \frac{n}{2} + \frac{2}{2} = \frac{n}{2} + 1$$

olduğundan verilen eşitlik her n için doğrudur.

Aliřtırma 10.10.

a , b ve c sıfırdan farklı sayılar olmak üzere,

$$\frac{y}{a} + \frac{x}{c} + \frac{z}{b} = 12$$

ise

$$\frac{abx + bcy + acz}{abc}$$

ifadesi kaçtır?

Çözüm : Kesiri parçalayalım.

$$\begin{aligned} \frac{abx + bcy + acz}{abc} &= \frac{abx}{abc} + \frac{bcy}{abc} + \frac{acz}{abc} \\ &= \frac{x}{c} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 12 \end{aligned}$$

bulunur.

Aliřtırma 10.11.

$$\frac{4a + 2b + 3c}{b} = 9 \text{ ve } \frac{b}{a} = 2$$

olduğuna göre, $\frac{b}{c}$ kaçtır?

Çözüm : $\frac{b}{a} = 2$ ise $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ olur. $\frac{b}{c} = x$ diyelim.

$$\begin{aligned} \frac{4a + 2b + 3c}{b} = 9 &\Rightarrow 4 \cdot \frac{a}{b} + 2 + 3 \cdot \frac{c}{b} = 9 \\ &\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 + 3 \cdot \frac{1}{x} = 9 \\ &\Rightarrow 4 + \frac{3}{x} = 9 \\ &\Rightarrow \frac{3}{x} = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

bulunur.

★ Cebirsel Toplamın ve Farkın Karesi ★

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

biçiminde yazılabilir.

İspat. $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ ifadesini açarsak,

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) \\ &= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b \\ &= a^2 + 2ab + b^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Siz de

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

olduğunu görünüz.

Alıştırma 10.12.

Aşağıdaki ifadeleri yukarıdaki formülü kullanarak açınız.

a) $(2a + 5b)^2 =$

Çözüm : a) $(2a + 5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$.

b) $(3x - 7y)^2 =$

Çözüm : b) $(3x - 7y)^2 = 9x^2 - 42xy + 49y^2$.

Alıştırma 10.13.

Aşağıdaki ifadeleri $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ olduğunu kullanarak açınız.

a) $(2a + b)(2a - b) =$

Çözüm : a) $(2a + b)(2a - b) = 4a^2 - b^2$.

b) $(2x + 3y)(2x - 3y) =$

Çözüm : b) $(2x + 3y)(2x - 3y) = 4x^2 - 9y^2$.

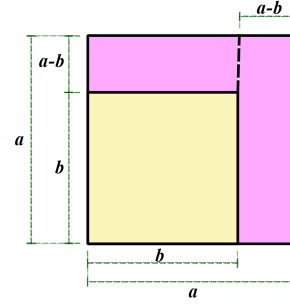
İki Tam karenin Farkı**★ İki Karenin Farkı ★**

İki sayının karelerinin farkını, bu sayıların farkı ile toplamını çarparak bulabiliriz. Yani,

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

biçiminde yazılabilir.

İspat. $a^2 - b^2$ ifadesi kenarları a ve b olan iki karenin alanları farkıdır. Aşağıdaki şekilde pembe renkle gösterilmiştir.



Pembe kısmın alanı :

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot a + (a - b) \cdot b$$

değerine eşittir. Burada $(a - b)$ ortak parantezine alırsak

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

elde edilir.

Alıştırma 10.14.

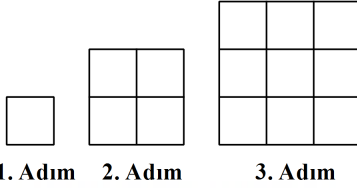
$151^2 - 149^2$ ifadesini sayıların karelerini bulmadan hesaplayınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 151^2 - 149^2 &= (151 - 149)(151 + 149) \\ &= 2 \cdot 300 \\ &= 600 \end{aligned}$$

Alıştırma 10.15.

Aşağıda verilen şekil örüntüsünün ilk üç adımı gösterilmiştir. Buna göre, 101'inci adımdaki birim kare sayısı 99'uncu adımdaki birim kare sayısından ne kadar fazladır?



Çözüm : 101-inci adımdaki birim kare sayısı 101^2 ve 99-uncu adımdaki birim kare sayısı 99^2 olduğundan

$$\begin{aligned} 101^2 - 99^2 &= (101 - 99)(101 + 99) \\ &= 2 \cdot 200 \\ &= 400 \end{aligned}$$

Alıştırma 10.16.

$5^4 - 3^4$ ifadesinin asal çarpanlarından kaç tanesi tek sayıdır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5^4 - 3^4 &= (5^2)^2 - (3^2)^2 \\ &= \underbrace{(5^2 - 3^2)}_{(5-3)(5+3)} (5^2 + 3^2) \\ &= (5 - 3)(5 + 3)(5^2 + 3^2) \\ &= 2 \cdot 8 \cdot 34 = 2^5 \cdot 17 \end{aligned}$$

Paydasında Harf Bulunan Cebirsel İfadeler

Alıştırma 10.17.

Aşağıdaki ifadeyi daha sade olarak yazınız.

$$\frac{1+n}{n} + \frac{n-3}{3n} + \frac{1}{3}$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{1+n}{n} + \frac{n-3}{3n} + \frac{1}{3} &= \frac{3+3n}{3n} + \frac{n-3}{3n} + \frac{n}{3n} \\ &= \frac{3+3n+n-3+n}{3n} = \frac{5n}{3n} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Alıştırma 10.18. ♣

$$\blacktriangle(n) = \frac{1+2n}{n+3} + \frac{2-n}{n+3} + 1$$

olduğuna göre, $\blacktriangle(149)$ değerini hesaplayınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \blacktriangle(n) &= \frac{1+2n}{n+3} + \frac{2-n}{n+3} + n \\ &= \frac{1+2n+2-n}{n+3} + n = \frac{n+3}{n+3} + n = 1+n \end{aligned}$$

ise $\blacktriangle(149) = 1 + 149 = 150$ olur.

Alıştırma 10.19.

Hangi n tam sayıları için

$$\frac{4}{n+1} + \frac{3}{n} + \frac{3n+7}{n(n+1)}$$

ifadesi bir tam sayıdır?

Çözüm : Payda sıfır olamayacağından $n = 0$ ve $n = -1$ olamaz.

$$\begin{aligned} \frac{4}{n+1} + \frac{3}{n} + \frac{3n+7}{n(n+1)} &= \frac{4n}{n(n+1)} + \frac{3n+3}{n(n+1)} + \frac{3n+7}{n(n+1)} \\ &= \frac{4n+3n+3+3n+7}{n(n+1)} = \frac{10n+10}{n(n+1)} \\ &= \frac{10(n+1)}{n(n+1)} = \frac{10}{n} \end{aligned}$$

olduğundan $n \in \{1, 2, 5, 10, -2, -5, -10\}$ olur.

Alıştırma 10.20.

Hangi n tam sayıları için

$$\frac{12n+20}{n^2-4} - \frac{1}{n+2}$$

ifadesi bir tam sayıdır?

Çözüm : $(n-2)(n+2) = n^2 - 4$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{12n+20}{n^2-4} - \frac{1}{n+2} &= \frac{12n+20}{n^2-4} - \frac{n-2}{(n-2)(n+2)} \\ &= \frac{12n+20}{n^2-4} + \frac{-n+2}{n^2-4} = \frac{12n+20-n+2}{n^2-4} \\ &= \frac{11n+22}{(n-2)(n+2)} = \frac{11(n+2)}{(n-2)(n+2)} \\ &= \frac{11\cancel{(n+2)}}{(n-2)\cancel{(n+2)}} = \frac{11}{n-2} \end{aligned}$$

olduğundan $n-2 \in \{1, 11, -1, -11\}$ ve $n \in \{3, 13, 1, -9\}$ olur.

Problemler (Cebirsel İfadeler)

Prob. 10.1 Aşağıdaki ifadeleri sadeleştiriniz.

a) $\frac{3x-5}{3} - \frac{2x-3}{2} =$

Çözüm :

$$\frac{3x-5}{3} - \frac{2x-3}{2} = \frac{6x-10-6x+9}{6} = -\frac{1}{6}$$

b) $\frac{3-x}{x} - \frac{2-x}{x} - \frac{1}{2x} =$

Çözüm :

$$\frac{6-2x-4+2x-1}{2x} = \frac{1}{2x}$$

c) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2-1} =$

Çözüm :

$$\begin{aligned} &= \frac{3x+3}{x^2-1} - \frac{2x-2}{x^2-1} - \frac{x}{x^2-1} \\ &= \frac{3x+3-2x+2-x}{x^2-1} \\ &= \frac{5}{x^2-1} \end{aligned}$$

d) $(3x-2y+2) - (2x-3y+2) - (x-y) =$

Çözüm :

$$3x-2y+2-2x+3y-2-x+y=2y$$

Prob. 10.2 Bir kesrin paydasında sıfır olamaz. Paydayı sıfır yapan değerlerde kesir tanımsızdır. Örneğin,

$$\frac{3}{n-2}$$

kesri için $n = 2$ değeri bu kesiri tanımsız yapar. Buna göre,

$$2 - \frac{2}{1 - \frac{3}{n}}$$

kesirinin tanımlı olmadığı n değerlerini bulunuz.

Çözüm : Payda da sıfır olamayacağından $n = 0$ olamaz. Bunu not edip, payda eşitleyelim.

$$2 - \frac{2}{\frac{1}{(n)} - \frac{3}{n}} = 2 - \frac{2}{\frac{1-3}{n}} = 2 - \frac{2}{1} \cdot \frac{n}{n-3} = 2 - \frac{2n}{n-3}$$

olur ki, $n-3 = 0$ olamaz. Yani, $n = 3$ olamaz. Bunu da not edelim ve payda eşitlemeye devam edelim. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{2}{\frac{1}{(n-3)} - \frac{2n}{n-3}} &= \frac{2(n-3) - 2n}{n-3} \\ &= \frac{2n-6-2n}{n-3} = \frac{-6}{n-3} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, verilen ilk ifade için $n = 0$ ve $n = 3$ değerleri tanımsızdır.

Prob. 10.3 Bir n sayısının 15 ile bölümünden kalan 8, bir m sayısının 20 ile bölümünden kalan ise 6'dır. Buna göre,

$$2n + m$$

sayısının 5 ile bölümünden kalan kaçtır?

Çözüm : Bölünen, bölüm ile bölenin çarpımının kalan kadar fazlasıdır.

$$n = 15 \cdot a + 8 \text{ ve } m = 20 \cdot b + 6$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 2n + m &= 2(15 \cdot a + 8) + 20 \cdot b + 6 \\ &= 30 \cdot a + 16 + 20 \cdot b + 6 \\ &= 30a + 20b + 22 \end{aligned}$$

olur ki $30a$ ve $20b$ sayıları zaten 5 ile bölünür, 22 'nin 5 ile bölümünden kalan da 2 olur.

Prob. 10.4 137^2 ile bir doğal sayının toplamı 141^2 olduğuna göre bu doğal sayı kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 137^2 + x &= 141^2 \Rightarrow x = 141^2 - 137^2 \\ &\Rightarrow x = (141 - 137)(141 + 137) \\ &\Rightarrow x = 4 \cdot 278 \\ &\Rightarrow x = 1112 \end{aligned}$$

bulunur.

Prob. 10.5 Aşağıdaki ifadenin tam sayı olmasını sağlayan kaç x tam sayısı vardır?

$$\frac{x + 25}{x + 18}$$

Çözüm :

$$\frac{x + 15}{x + 18} = \frac{x + 18 + 7}{x + 18} = 1 + \frac{7}{x + 18}$$

ise $x + 18$ ifadesi 1, -1, 7 veya -7 olabilir. Yani,

$$x = -17, x = -19, x = -11 \text{ ve } x = -25$$

olur.

Prob. 10.6 $A = \left\{ x : x \in \mathbb{N} \text{ ve } \frac{x + 6}{x + 1} \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin en büyük elemanı kaçtır?

Çözüm :

$$\frac{x + 6}{x + 1} = \frac{x + 1 + 5}{x + 1} = 1 + \frac{5}{x + 1}$$

ise x en fazla 4 olabilir.

Prob. 10.7 $2a - 3b = 5$ ve $a^2 = 4$ ve $b^2 = 12$ ise $a \cdot b$ kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} (2a - 3b)^2 &= 4a^2 - 12ab + 9b^2 = 25 \\ 4 \cdot 4 - 12ab + 9 \cdot 12 &= 25 \\ 124 - 12ab &= 25 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$12ab = 124 - 25 = 99,$$

$$ab = 99/12 = \frac{33}{4}$$

bulunur.

Prob. 10.8 $a - b = 5$ ve $a^2 - b^2 = 12$ ise $a + b$ kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ 12 &= 5 \cdot (a + b) \end{aligned}$$

eşitliğinden $a + b = 12/5$ bulunur.

Prob. 10.9

$$\star(m, n) = \frac{3n + m}{5m - 4n}$$

olduğuna göre, a) $\star(m, m)$ kaçtır?

b) $\star(2n, n)$ kaçtır?

Çözüm : a)

$$\star(m, m) = \frac{3m + m}{5m - 4m} = \frac{4m}{m} = 4$$

bulunur.

b)

$$\star(2n, n) = \frac{3n + 2n}{5(2n) - 4n} = \frac{5n}{6n} = \frac{5}{6}$$

bulunur.

Prob. 10.10 $x \cdot y - x^2 + 2y = 12$ ve $x = 5$ ise y kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5 \cdot y - 5^2 + 2y &= 12 \Rightarrow 7y = 12 + 25 \\ &\Rightarrow 7y = 37 \\ &\Rightarrow y = 37/7 \end{aligned}$$

bulunur.

Denklem ve Denklem Çözümü

Bir Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

Alıştırma 11.1.

Aşağıdaki denklemlerde her iki tarafı da aynı sayı ile çarparak veya bölerek denklemi basitleştiriniz.

a) $\frac{x-2}{3} = \frac{x-1}{6}$

Çözüm : Her tarafı 6 ile çarparsak $2(x-2) = x-1$ olur.

b) $2x = 4x - 6$

Çözüm : Her tarafı 2 ile bölersek $x = 2x - 3$ olur.

Alıştırma 11.2.

Aşağıdaki denklemlerin kökünü bulunuz.

a) $3x - 12 = 19$

Çözüm :

$$3x = 19 + 12 \Rightarrow 3x = 31 \Rightarrow x = \frac{31}{3}.$$

b) $\frac{x}{4} = \frac{5}{7}$

Çözüm :

$$\frac{x}{4} = \frac{5}{7} \Rightarrow x = 4 \cdot \frac{5}{7} = \frac{20}{7}.$$

c) $4x + 5 = x$

Çözüm :

$$4x + 5 = x \Rightarrow 4x - x = -5 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$$

Alıştırma 11.3.

Aşağıdaki denklemi çözünüz.

$$-(12 - x) - 2(x - 5) = -(3 - 2x)$$

Çözüm : Önce parantezleri açıp $-12 + x - 2x + 10 = -3 + 2x$ yazalım. Buradan,

$$-x - 2 = -3 + 2x \Rightarrow 3 - 2 = 2x + x \Rightarrow 3x = 1$$

eşitliğinden $x = \frac{1}{3}$ elde edilir.

Alıştırma 11.4.

Aşağıdaki denklemleri çözünüz.

a) $\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$

Çözüm : $5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$ olur.

b) $\frac{3}{x} = \frac{4}{5}$

Çözüm : $4x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{4}$ olur.

c) $\frac{4}{3} = \frac{x}{5}$

Çözüm : $3x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$ olur.

d) $\frac{5}{3} = \frac{4}{x}$

Çözüm : $5x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$ olur.

Alıştırma 11.5.

Aşağıdaki denklemi çözünüz.

$$\frac{4x-7}{10} = \frac{3x-2}{9}$$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{4x-7}{10} &= \frac{3x-2}{9} \Rightarrow 9(4x-7) = 10(3x-2) \\ &\Rightarrow 36x - 63 = 30x - 20 \\ &\Rightarrow 36x - 30x = 63 - 20 \\ &\Rightarrow 6x = 43 \Rightarrow x = \frac{43}{6} \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 11.6.

Aşağıdaki denklemi çözünüz.

$$\frac{4x - 7}{10} + \frac{-5x + 5}{10} = \frac{3x - 2}{9}$$

(İpucu : Önce sol taraftaki kesirin paydasını eşitlemeniz gerekir.)

$$\begin{aligned} \text{Çözüm : } \frac{4x - 7}{10} + \frac{-5x + 5}{10} &= \frac{3x - 2}{9} \text{ eşitliğinden} \\ \frac{-2 - x}{10} &= \frac{3x - 2}{9} \Rightarrow -18 - 9x = 30x - 20 \\ &\Rightarrow 30x + 9x = 20 - 18 \\ &\Rightarrow 39x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{39} \end{aligned}$$

olur.

Matematiksel Denklem Dönüştürme**Alıştırma 11.7.**

Alp'in yaşının 5 katının 4 eksiğinin yarısı, Alp'in yaşının 12 eksiğinin 3 katıysa, Alp'in yaşı kaçtır?

Çözüm : Alp'in yaşı x olsun.

$$\begin{aligned} \frac{5x - 4}{2} &= 3(x - 12) \Rightarrow 5x - 4 = 6(x - 12) \\ &\Rightarrow 5x - 4 = 6x - 72 \\ &\Rightarrow 72 - 4 = 6x - 5x \\ &\Rightarrow x = 68 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 11.8.

Berke aklında bir sayı tutuyor. Bu sayının yarısının 5 eksiği, aynı sayının 4 fazlasının 3'te biriye, Berke'nin tuttuğu sayıyı bulunuz.

Çözüm : Berke'nin tuttuğu sayı x olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} - 5 &= \frac{x + 4}{3} \Rightarrow \frac{x - 10}{2} = \frac{x + 4}{3} \\ &\Rightarrow 3x - 30 = 2x + 8 \\ &\Rightarrow x = 38 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 11.9.

İki sayıdan birincisinin 2 katı ile ikincisinin toplamı 10'dur. İkinci birinci sayının 2 katından 1 fazla ise, bu sayıların toplamı nedir?

Çözüm : Verilenlerden $2x + y = 10$ ve $y = 2x + 1$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 10 \Rightarrow 2x + 2x + 1 = 10 \\ &\Rightarrow 4x = 9 \\ &\Rightarrow x = \frac{9}{4} \\ &\Rightarrow y = 2 \cdot \frac{9}{4} + 1 = \frac{22}{4} \end{aligned}$$

ve toplamı da

$$\frac{9}{4} + \frac{22}{4} = \frac{31}{4}$$

olur.

Alıştırma 11.10.

Paydası payının 3 katının 1 eksiği olan bir kesrin payına 2, paydasına da 10 eklenince değeri $\frac{1}{4}$ oluyor. Buna göre bu kesiri bulunuz.

Çözüm : Kesrin payına x diyelim. Buna göre, paydası $3x - 1$ olur. Yani, kesirimiz

$$\frac{x}{3x - 1}$$

olacaktır. Payına 2, paydasına da 10 eklersek kesir $\frac{1}{4}$ oluyorsa,

$$\begin{aligned} \frac{x + 2}{3x - 1 + 10} &= \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{x + 2}{3x + 9} = \frac{1}{4} \text{ (içler dışlar çarp)} \\ &\Rightarrow 4(x + 2) = 3x + 9 \\ &\Rightarrow 4x + 8 = 3x + 9 \\ &\Rightarrow 4x - 3x = 9 - 8 \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, kesrimiz

$$\frac{x}{3x - 1} = \frac{1}{2}$$

olur.

Alıştırma 11.11.

Bir su deposunun $\frac{2}{3}$ 'si doludur. Mevcut suyun $\frac{1}{5}$ 'i kulanıldıktan sonra depoya **32** ton su daha eklenince deponun $\frac{4}{3}$ 'ü doluyor. Deponun tamamı kaç ton su alır?

Çözüm : Su deposunun tamamı x ton olsun. Buna göre, $\frac{2x}{3}$ doludur. Verilenlerden

$$\frac{2x}{3} - \frac{1}{5} \cdot \frac{2x}{3} + 32 = \frac{4x}{3} \Rightarrow \frac{2x}{3} - \frac{2x}{15} + 32 = \frac{4x}{3}$$

denklemini elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 32 &= \frac{4x}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{2x}{15} \Rightarrow \frac{20x}{15} - \frac{10x}{15} + \frac{2x}{15} = 32 \\ &\Rightarrow \frac{20x - 10x + 2x}{15} = 32 \\ &\Rightarrow \frac{12x}{15} = 32 \\ &\Rightarrow x = \frac{32 \cdot 15}{12} = 40 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 11.12. AMC8-2002

On problemlik bir matematik yarışmasında, bir öğrenci doğru cevap için **5** puan kazanır ve yanlış cevap için **2** puan kaybeder. Olivia her soruyu cevapladıysa ve puanı **29** ise, kaç tane doğru cevabı vardır?

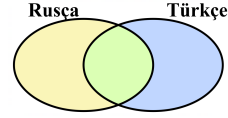
Çözüm : Olivia'nın doğru cevaplarının sayısı x ise yanlış cevaplarının sayısı $10 - x$ olur.

$$\begin{aligned} 5x - 2(10 - x) &= 29 \Rightarrow 5x - 20 + 2x = 29 \\ &\Rightarrow 7x = 49 \\ &\Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 11.13. ♣

37 kişilik bir sınıftaki öğrenciler Türkçe veya Rusça dillerinden en az birini konuşabilmektedir. Rusça konuşabilenlerin sayısı her iki dili de konuşabilen öğrenci sayısının **3** katından **5** fazladır. Öğrencilerin **en az** kaç Türkçe konuşabilmektedir?



Çözüm : Her iki dili de konuşabilen öğrencilerin sayısı x olsun. Rusça konuşan öğrenci sayısı $3x + 5$ ise, sadece Rusça konuşan öğrenci sayısı $(3x + 5) - x = 2x + 5$ olur. Böylece, sadece Türkçe konuşan

$$37 - (3x + 5) = 32 - 3x$$

kişi vardır. Türkçe konuşan en az kişi için x en fazla $x = 10$ alınabilir. Yani sadece Türkçe konuşan **2** kişi olur.

Böylece, Türkçe konuşan en az $10 + 2 = 12$ kişi olur.

Alıştırma 11.14. AMC8-2017

Elimdeki altınları boş hazine sandıklarına **9**'ar koyarsam **2** tane hazine sandığı boş kalıyor. Eğer, her sandığa **6**'şar altın koyarsam elimde **3** altın kalıyor. Buna göre, kaç altınım vardır?

Çözüm : Altın miktarını A ile, sandık miktarını B ile gösterelim. Buna göre,

$$9(B - 2) = A, \quad 6B + 3 = A$$

eşitlikleri elde edilir. Madem eşitliklerin sağ tarafı eşit, sol tarafları da eşit olmalı. $9(B - 2) = 6B + 3$ eşitliğinde soldaki parantezi dağıtırsak,

$$9B - 18 = 6B + 3 \Rightarrow 3B = 21 \Rightarrow B = 7$$

elde edilir. Yani **7** sandık ve $A = 6 \cdot 7 + 3 = 45$ altın vardır.

Alıştırma 11.15.

Yeşim kardeşi Eymen'den 5 yaş büyüktür. Yeşim doğduğunda annesi 23 yaşındaydı. Yeşim Eymen'in yaşındayken annesi 45 yaşındaydı. Yeşim bugün kaç yaşındadır?

Çözüm : Yeşim'in bugünkü yaşı x olsun. Buna göre verilenlerden

Eymen	Yeşim	Anne
$x - 5$	x	$x + 23$

yazılabilir. Yeşim 5 yıl önce Eymen'in yaşındaydı. Yeşim Eymen'in yaşındayken annesi 45 yaşındaysa, annesi bugün 50 yaşındadır. Yani,

$$x + 23 = 50 \Rightarrow x = 27$$

elde edilir.

Alıştırma 11.16.

Bir çay ve 3 kahvenin fiyatı 85 liradır. Kahvenin fiyatının $\frac{1}{3}$ 'ü çayın fiyatından 5 lira fazla ise, çay kaç liradır?

Çözüm : Çayın fiyatına x diyelim. O halde, 3 kahvenin fiyatı $85 - x$ ve 1 kahvenin fiyatı da

$$\frac{85 - x}{3}$$

olur. Kahvenin fiyatının $\frac{1}{3}$ 'ü çayın fiyatının yarısından 5 lira fazla ise,

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{85 - x}{3} = x + 5 \Rightarrow \frac{85 - x}{9} = x + 5$$

denklemini elde edilir. İçler dışlar çarpımı yapılsa,

$$\begin{aligned} 85 - x &= 9x + 45 \Rightarrow 85 - 45 = 9x + x \\ &\Rightarrow 10x = 40 \end{aligned}$$

eşitliğinden $x = 4$ bulunur.

Alıştırma 11.17.

Bir yarışmadaki öğrencilerin $\frac{3}{7}$ 'sinin 4 fazlasının, yarısının 7 eksiği erkektir.

- a) Bu yarışmada öğrencilerin en az kaç kız olabilir?
b) Kız öğrencilerin sayısı iki basamaklı ise en fazla kaç olabilir?
c) Yarışmacı sayısı iki basamaklı ise en fazla kaç olabilir? Bu durumda kız öğrenci sayısı kaçtır?

Çözüm : Yarışmadaki öğrenci sayısı x olsun. Buna göre, verilenlerden öğrencilerin

$$\left(\frac{3x}{7} + 4\right) \div 2 - 2$$

kadarının erkek olduğunu biliyoruz. Düzenleyelim, işlem sırasına dikkat ediniz.

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x}{7} + \frac{4}{1}\right) \div \frac{2}{1} - \frac{2}{1} &= \frac{3x + 28}{7} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2}{1} \\ &= \frac{3x + 28}{14} - \frac{2}{1} \\ &= \frac{3x + 28 - 28}{14} = \frac{3x}{14} \end{aligned}$$

O halde, kız öğrencilerin sayısı : $x - \frac{3x}{14} = \frac{11x}{14}$ bulunur. Buna göre, öğrenci sayısının 14'ün katı olması gerektiği görülür. Şimdi soruları yanıtlayalım.

- a) Yarışmacı sayısı en az $x = 14$ olursa, kız öğrenci sayısı en az $\frac{11 \cdot 14}{14} = 11$ olur.
b) $x = 9 \cdot 14$ olursa, kız öğrenci sayısı $\frac{11 \cdot 9 \cdot 14}{14} = 99$ olur.
c) Öğrenci sayısı 14'ün katıysa ve iki basamaklı ise en fazla $7 \cdot 14 = 98$ olabilir. Bu durumda, kız öğrenci sayısı

$$\frac{11 \cdot 7 \cdot 14}{14} = 77$$

olur.

Mutlak Değerli Denklemler

★ Mutlak Değerli Denklemler ★

★ $|x| = a$ ise $x = a$ veya $x = -a$ olabileceğini kullanacağız.

★ $|a| \geq 0$ olduğunu unutmayınız.

Alıştırma 11.18.

$\left| \frac{2x - 11}{4} \right| = 5$ denklemini sağlayan x değerlerini bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{2x - 11}{4} = 5 &\Rightarrow 2x - 11 = 20 \Rightarrow x = \frac{31}{2} \\ \frac{2x - 11}{4} = -5 &\Rightarrow 2x - 11 = -20 \Rightarrow x = \frac{-9}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Üslü Denklemler

★ Üslü Denklemler ★

★ $a \neq 0$, $a \neq 1$ ve $a \neq -1$ olmak üzere $a^x = a^y$ ise $x = y$ olmalıdır.

★ a bir tek sayı ve $x^a = y^a$ ise $x = y$ olmalıdır.

★ a bir çift sayı ve $x^a = y^a$ ise $x = y$ veya $x = -y$ olmalıdır.

★ Üslü bir sayının 1 olabilmesi için üç durum vardır.

- $a^0 = 1$; $a \neq 0$.
- $1^{\text{sayı}} = 1$
- $(-1)^{\text{çift tam sayı}} = 1$

Alıştırma 11.19. ♣

$$3^{\frac{9x+14}{5}} = 9^{(x+1)} \text{ ise } x \text{ tam sayısı kaçtır?}$$

$$\text{Çözüm : } 3^{\frac{9x+14}{5}} = 3^{2(x+1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{9x+14}{5} &= 2(x+1) \Rightarrow 9x+14 = 10x+10 \\ &\Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Yüksek Dereceden Denklemler

Alıştırma 11.20.

$(x-3)(x-2) = 6$ ise x tam sayısı hangi sayılar olabilir?

$$\text{Çözüm : } (x-3)(x-2) = 6$$

$$\begin{aligned} (x-3)(x-2) &= 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 6 \\ &\Rightarrow x^2 - 5x = 0 \\ &\Rightarrow x(x-5) = 0 \end{aligned}$$

ise $x = 0$ veya $x = 5$ elde edilir.

Çok Bilinmeyenli Denklemlerin Çözümü

★ Çok Bilinmeyenli Denklemler ★

Birden fazla bilinmeyen içeren denklemlere **çok bilinmeyenli denklemler** denir. Örneğin,

$$3x + 2y = 7$$

iki bilinmeyenli bir doğrusal denklemdir. Bu denklemin sağlayan (x, y) ikililerine de, bu denklemin çözümleri denir. Örneğin, $(1, 2)$ ikilisi bu denklemin bir çözümüdür. $x = 1$ ve $y = 2$ yazarsak,

$$3 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$$

eşitliği sağlanır.

Bir denklemden, bilinmeyen sayısı daha fazla da olabilir. Örneğin,

$$2a + 3b + 4c + 5d = 20$$

denklemin 4 bilinmeyenli bir denklemdir.

Alıştırma 11.21.

$4a + 3b = 15$ denkleminin kaç pozitif tam sayı çözümü vardır?

Çözüm : a en fazla 3 olabilir.

$$a = 3 \Rightarrow 3b = 15 - 12 \Rightarrow b = 1,$$

$$a = 2 \Rightarrow 3b = 15 - 8 = 7 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}^+,$$

$$a = 1 \Rightarrow 3b = 15 - 4 = 11 \Rightarrow b \notin \mathbb{Z}^+$$

olur.

Aıştırma 11.22.

$4a + 2b = 15$ denkleminin kaç pozitif tam sayı çözümü vardır?

Çözüm : Denklemin sol tarafı daima çift sayı iken sol taraf tek sayıdır. O halde bu eşitliğin sağlanması mümkün değildir.

Aıştırma 11.23.

ab iki basamaklı sayısı için, $4a + 7b = 12$ ise ab kaçtır?

Çözüm : $b \in \{0, 1\}$ olabilir.

$$b = 0 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow ab = 30 \text{ olur.}$$

$$b = 1 \Rightarrow 4a = 5 \Rightarrow a \text{ rakam olamaz.}$$

Yanıt : $ab = 30$.

Aıştırma 11.24.

abc üç basamaklı bir sayıdır.

$$5a + b + 7c = 19$$

olduğuna göre, abc sayısı kaç olabilir?

Çözüm : Sağ taraf 19 olduğundan dolayı $c = 1$ veya $c = 2$ olabilir. $c = 1$ iken

$$c = 1 \Rightarrow 5a + b = 12,$$

elde edilir. abc üç basamaklı bir sayı olduğundan $a = 0$ olamayacağını unutmayın.

$$5a + b = 12 \Rightarrow a = 1 \text{ veya } a = 2$$

olacağından, $a = 1$ ise $b = 7$ ve $a = 2$ ise $b = 2$ elde edilir. Böylece, abc sayısı 171 veya 221 olur. $c = 2$ iken,

$$5a + b = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0$$

olur ki, buradan da abc sayısı 102 bulunur. Sonuç olarak, abc sayısı sadece 171, 221 veya 102 olabilir.

Soruda, rakamları farklı deseydi tek çözüm 102 olarak bulunurdu.

Aıştırma 11.25.

abc üç basamaklı sayısı için, $4a + 7b + c = 12$ ise abc kaçtır?

Çözüm : $b \in \{0, 1\}$ olabilir.

$$b = 0 \Rightarrow 4a + c = 12 \Rightarrow a = 3, c = 0 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow a = 2, c = 4 \text{ olur.}$$

$$b = 1 \Rightarrow 4a + c = 5 \Rightarrow a = 1, c = 1 \text{ olur.}$$

O halde, abc sayısı 300, 204 veya 111 olabilir.

Aıştırma 11.26.

Bir çiftlikte tavuk, at ve inekler bulunmaktadır.

Tavukların sayısının 5 katı, atların sayısının 7 katı ve ineklerin sayısının 2 katı toplanırsa 23 bulunuyor. Tavuk sayısı, at sayısından fazla olduğuna göre, bu çiftlikte kaç hayvan vardır?

Çözüm : $5T + 7A + 2İ = 23$ ise $A \in \{1, 2, 3\}$ olabilir.

$$A = 3 \Rightarrow 5T + 2İ = 2 \text{ olamaz.}$$

$$A = 2 \Rightarrow 5T + 2İ = 9 \text{ ise } T = 1, İ = 2 \text{ olur.}$$

$$A = 1 \Rightarrow 5T + 2İ = 16 \text{ ise } T = 2, İ = 3, \text{ olur.}$$

Tavuk sayısı, at sayısından fazla olduğuna göre, $T > A$ koşulunu sağlayan tek durum $A = 1, T = 2$ ve $İ = 3$ durumudur.

★ Orantı ★

Birden fazla oranın eşitliğine **orantı** denir.

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7} = \frac{C}{8}$$

ifadesi A, B ve C sayıları 5, 7 ve 8 ile **orantılıdır veya doğru orantılıdır** şeklinde okunur. Orantı içeren denklemlerde tüm oranlar bir k sayısına eşitlenerek çözüme ulaşmaya çalışılır :

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7} = \frac{C}{8} = k \text{ için } A = 5k, B = 7k, C = 8k \text{ yazılır.}$$

$$5A = 7B = 8C$$

eşitliği de, A, B ve C sayıları 5, 7 ve 8 ile **ters orantılıdır** şeklinde ifade edilir.

Aıştırma 11.27.

A, B ve C pozitif tam sayıları için,

$$2A = 3B = 4C$$

olduğuna göre, $A + B + C$ toplamı en az kaçtır?

Çözüm : Her tarafı 12 ile bölersek,

$$\frac{A}{6} = \frac{B}{4} = \frac{C}{3} = k$$

olur. Buradan, $A = 6k, B = 4k$ ve $C = 3k$ denilirse,

$$A + B + C = 6k + 4k + 3k = 13k$$

olur ve $k = 1$ için en küçük değeri 13 bulunur.

Taraf Tarafa Toplama ve Çıkarma

Alıştırma 11.28.

Aşağıdaki eşitliklere göre A ve B değerlerini bulunuz.

$$3A + 2B = 14$$

$$5A - 2B = 2$$

Çözüm : Tümünü taraf tarafa toplarsak $8A = 16 \Rightarrow A = 2$ elde edilir.

Alıştırma 11.29.

$A7B2$ ve $A2B7$ dört basamaklı sayılardır. Buna göre bu sayılar arasındaki fark kaçtır?

Çözüm :

$$A7B2 = 1000A + 700 + 10B + 2$$

$$A2B7 = 1000A + 200 + 10B + 7$$

taraf tarafa çıkarılırsa

$$A7B2 - A2B7 = 500 - 5 = 495$$

olur.

Alıştırma 11.30.

Aşağıdaki eşitliklere göre A sayısı kaçtır?

$$A + B = E + 1$$

$$2A + C = B + 2$$

$$3A + D = C + 3$$

$$4A + E = D + 4$$

Çözüm : Tümünü taraf tarafa toplarsak

$$10A + B + C + D + E = E + B + C + D + 10$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafındaki aynı toplananları atabiliriz. Buradan,

$$10A = 10$$

olduğundan $A = 1$ bulunur.

Alıştırma 11.31.

Aşağıdaki eşitliklere göre B doğal sayısı kaçtır?

$$A - B = 2$$

$$B - C = 3$$

$$C + A = 7$$

Çözüm : Tümünü taraf tarafa toplarsak

$$2A = 12 \Rightarrow A = 6$$

elde edilir. $A - B = 2$ ise $6 - B = 2$ eşitliğinden $B = 4$ olur.

Alıştırma 11.32. ♣

Bir sınıfta gözlüklü öğrencilerin ve kız öğrencilerin sayılarının toplamı 17'dir. Gözlüksüz öğrencilerin ve erkek öğrencilerin sayılarının toplamı ise 33'tür. Buna göre, sınıf mevcudu kaçtır?

Çözüm : Aşağıdaki gibi şema çizelim.

Gözlüklü öğrencilerin sayısı $b + c$, kız öğrencilerin sayısı $a + b$, erkek öğrencilerin sayısı $c + d$ ve gözlüksüz öğrencilerin sayısı $a + d$ olduğundan, verilenlerden

$$b + c + a + b = 17,$$

$$a + d + c + d = 33$$

olur. Taraf tarafa toplarsak,

$$2a + 2b + 2c + 2d = 50$$

olduğundan $a + b + c + d = 25$ elde edilir.

Alıştırma 11.33. ♣

Bir sınıftaki öğrencilerden bazıları basketbol veya futbol oynamaktadır.

i) Basketbol oynayanların sayısı ile futbol oynamayanların sayısının toplamı **32**'dir.

ii) Basketbol oynamayanların sayısı ile futbol oynayanların sayısının toplamı **26**'dır.

Buna göre bu sınıfta toplam kaç kişi vardır?

Çözüm : Soruya göre küme şemasını çizelim.

Basketbol oynayan $a + b$ kişi, basketbol oynamayan $c + d$, futbol oynayan $b + c$ ve futbol oynamayan $a + d$ kişi vardır. Verilenlerden

$$(a + b) + (a + d) = 32,$$

$$(c + d) + (b + c) = 26$$

olur. Taraf tarafa toplarsak

$$2a + 2b + 2c + 2d = 58$$

ve $a + b + c + d = 29$ bulunur.

Taraf Tarafa Çarpma ve Bölme**Alıştırma 11.34.**

Aşağıdaki eşitliklerde harflerin tamamı sıfırdan farklı sayılardır. Buna göre a sayısı kaçtır?

$$a \cdot b = c \cdot d,$$

$$d \cdot e = 2 \cdot b \cdot g,$$

$$h \cdot g = 3 \cdot e \cdot f,$$

$$f \cdot a \cdot c = 6 \cdot h$$

Çözüm : Tümünü taraf tarafa çarparsak

$$a \cdot b \cdot d \cdot e \cdot h \cdot g \cdot f \cdot a \cdot c = c \cdot d \cdot 2 \cdot b \cdot g \cdot 3 \cdot e \cdot f \cdot 6 \cdot h$$

elde edilir. İki taraftaki aynı olan çarpanları atabiliriz.

$$a \cdot a = 2 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \text{ olur.}$$

Alıştırma 11.35.

Aşağıdaki eşitliklerden yararlanarak $\frac{x}{z}$ değerini bulunuz.

$$x(y + 2) = 5$$

$$z(y + 2) = 11$$

Çözüm : $y = -2$ olamaz. Taraf tarafa bölersek

$$\frac{x}{z} = \frac{5}{11} \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{11}{5} \text{ olur.}$$

Denklem Sistemlerinin Çözümü

Alıştırma 11.36.

Aşağıdaki eşitliklere göre A, B ve C değerlerini bulunuz.

$$A + 2B + 3C = 18$$

$$A - B + C = 0$$

$$C - 3A = 0$$

Çözüm : İkinci denklemde $C = 3A$ yazarsak,

$$A - B + 3A = 0 \Rightarrow B = 4A$$

olur. İlk denklemde $C = 3A$ ve $B = 4A$ yazarsak,

$$\begin{aligned} A + 2B + 3C = 18 &\Rightarrow A + 8A + 9A = 18 \\ &\Rightarrow 18A = 18 \end{aligned}$$

eşitliğinden $A = 1$, $B = 4$ ve $C = 3$ bulunur.

Alıştırma 11.37. ♣

Bir sınıfta 7 kişi gözlüklüdür. Gözlüksüz kızların sayısı, gözlüklü erkek öğrencilerin sayısının 2 katıdır. Gözlüksüz erkek öğrenciler ise gözlüklü kız öğrencilerin 2 katıdır. Bu sınıfta kaç öğrenci vardır?

Çözüm : Aşağıdaki gibi şema çizelim.

Verilenlerden $b + c = 7$, $a = 2c$, $d = 2b$ yazılabilir. Buradan sınıftaki öğrenci sayısı $a = 2c$ ve $d = 2b$ yazarak

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2c + b + c + 2b \\ &= 3c + 3b \\ &= 3(b + c) \\ &= 3 \cdot 7 = 21 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 11.38.

Aşağıdaki eşitliklere göre A ve B değerlerini bulunuz.

$$3A + 2B = 43$$

$$A - 3B = 7$$

Çözüm : İlk denklem 3, ikinci denklem 2 ile çarpılırsa,

$$9A + 6B = 129$$

$$2A - 6B = 14$$

olur. Taraf tarafa toplarsak,

$$11A = 143 \Rightarrow A = 13$$

elde edilir. $13 - 3B = 7$ ise $B = 2$ olur.

Alıştırma 11.39.

Aşağıdaki eşitliklere göre x ve y değerlerini bulunuz.

$$5x + 2y = 27$$

$$3x - 5y = 41$$

Çözüm : İlk denklem 5, ikinci denklem 2 ile çarpılırsa,

$$25x + 10y = 135$$

$$6x - 10y = 82,$$

olur. Taraf tarafa toplarsak, $135 + 82 = 217$

$$31x = 217 \Rightarrow x = 217 \div 3 = 7$$

elde edilir. $3 \cdot 7 - 5y = 41$ ise $y = -4$ olur.

Alıştırma 11.40. AMC8-2012 ♣

Kırmızı, yeşil ve mavi bilyelerin bulunduğu bir kavanozda 6 tanesi dışındakilerin hepsi kırmızı, 8 tanesi dışındakilerin hepsi yeşil ve 4 tanesi dışındakilerin hepsi mavi bilyelerdir. Kavanozda kaç bilye vardır?

Çözüm : Her bilyenin sayısını rengin baş harfiyle gösterelim.

$$6 \text{ tanesi dışındakilerin hepsi kırmızıysa } Y + M = 6,$$

$$8 \text{ tanesi dışındakilerin hepsi yeşilse } K + M = 8,$$

$$4 \text{ tanesi dışındakilerin hepsi maviyse } Y + K = 4,$$

eşitlikleri elde edilir. Bu üç eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$2Y + 2M + 2K = 18 \Rightarrow 2(Y + M + K) = 18$$

eşitliğinden, $Y + M + K = 9$ elde edilir.

Harfli Eşitsizlikler

Alıştırma 11.41.

$2x - 3 \leq 12 + 5x$ eşitsizliğini sağlayan kaç negatif tam sayı vardır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 2x - 3 \leq 12 + 5x &\Rightarrow -15 \leq 5x - 2x \\ &\Rightarrow -15 \leq 3x \Rightarrow -5 \leq x \\ &\Rightarrow x \in \{-5, -4, -3, -2, -1\} \end{aligned}$$

Alıştırma 11.42.

$1 < \frac{3 - 2x}{3} \leq 5$ eşitsizliğini sağlayan kaç tam sayı vardır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 1 < \frac{3 - 2x}{3} \leq 5 &\Rightarrow 3 < 3 - 2x \leq 15 \\ &\Rightarrow 0 < -2x \leq 12 \\ &\Rightarrow 0 > x \geq -6 \end{aligned}$$

Alıştırma 11.43. ♣

$1 \geq \frac{2x + 1}{3} < 5$ eşitsizliğini sağlayan kaç rakam vardır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{2x + 1}{3} &\Rightarrow 3 \geq 2x + 1 \Rightarrow 2 \geq 2x \Rightarrow 1 \geq x \\ \frac{2x + 1}{3} < 5 &\Rightarrow 2x + 1 < 15 \Rightarrow x < 7 \end{aligned}$$

olduğundan, her iki eşitsizliği de sağlayan rakamlar sadece 0 ve 1'dir.

Alıştırma 11.44.

Bir okulda her sınıfta en az 20 öğrenci vardır. 6A sınıfındaki kız öğrencilerin sayısı ile erkek öğrencilerin sayısının 2 katının toplamı 32'den büyükse, 6A sınıfında en az kaç erkek öğrenci vardır?

Çözüm : Kız ve erkek öğrenci sayısını K ve E ile gösterelim.

$$\begin{aligned} K + E &\geq 20 \Rightarrow K + E > 21 \\ K + 2E &> 32 \Rightarrow K + 2E > 32 \end{aligned}$$

yazılabilir. İkinci denklemden birinci denkleme taraf tarafa çıkarırsak

$$E > 32 - 21 = 11$$

elde edilir. O halde, 6A sınıfındaki erkek öğrenci sayısı da en az 12 olur.

Alıştırma 11.45. ♣

Bir futbol liginde galibiyete 3, beraberliğe 1 ve mağlubiyete 0 puan verilmektedir. En az 3 mağlubiyetinin olduğu bilinen Antalyaspor'un 20'den az sayıda oynadığı maçlardaki puanı 42'den fazla ise en az kaç galibiyeti vardır?

Çözüm : Galibiyet, beraberlik ve mağlubiyet sayılarını G , B ve M ile gösterelim. Antalyaspor'un en az 3 mağlubiyeti varsa, $M \geq 3$ veya $M > 2$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} M &> 2 \\ 20 &> G + B + M \\ 3G + B &> 42 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} M + 20 + 3G + B &> 2 + G + B + M + 42 \\ &\Rightarrow 2G > 24 \\ &\Rightarrow G > 12 \end{aligned}$$

eşitsizliğinden galibiyet sayısının en az $G = 13$ olduğu görülür.

Alıştırma 11.46.

$-3 \leq x \leq 8$ ve $-5 \leq y \leq 7$ ise $x \cdot y$ çarpımı hangi aralıkta değerler alabilir?

Çözüm : $x \cdot y$ çarpımı en küçük

$$8 \cdot (-5) = -40$$

olabilir. En büyük ise $7 \cdot 8 = 56$ olabilir. Buna göre,

$$-40 \leq x \cdot y \leq 56$$

olacaktır.

Çözümleme Denklemleri

Alıştırma 11.47. AMC8-2016

İki basamaklı bir sayı, rakamları yer değiştirilip orjinal sayıya eklenirse toplam 132 elde ediliyor. Bu koşulu sağlayan kaç sayı vardır?

Çözüm : $AB = 10A + B$, $BA = 10B + A$ için

$$AB + BA = 11A + 11B = 132 \Rightarrow A + B = 12$$

olur. Böylece AB sayısı

$$39, 48, 57, 66, 75, 84, 93$$

olabilir.

Alıştırma 11.48. AJHSME-1994

Üç basamaklı XXX , iki basamaklı YX ve bir basamaklı X sayılarının toplamı üç basamaklı bir sayıdır. Bu toplam en fazla kaç olabilir?

Çözüm :

$$XXX = 100X + 10X + X = 111X,$$

$$YX = 10Y + X,$$

olduğundan, istenen toplam

$$\begin{aligned} XXX + YX + X &= 111X + 10Y + X + X \\ &= 113X + 10Y \end{aligned}$$

olur. En büyük toplamı elde etmek için, $X = 8$ ve $Y = 9$ alınmalıdır. $X = 9$ alınırsa toplam sayı dört basamaklı olacaktır. Fakat, soruda üç basamaklı denilmiş. O halde, toplam en fazla :

$$113 \cdot 8 + 10 \cdot 9 = 994$$

bulunur.

Alıştırma 11.49. AMC8-2010

Üç basamaklı bir sayının yüzler basamağı, birler basamağından 2 fazladır. Üç basamaklı bu sayının rakamları ters sırada yazılıp ilk halinden çıkarılırsa sonucun birler basamağı kaç olur?

Çözüm : Üç basamaklı sayı ABC olsun. $A = 2 + C$ verilmiş. Bizden istenen

$$ABC - CBA$$

farkının birler basamağıdır. Çözümlersek,

$$(100A + 10B + C) - (100C + 10B + A)$$

farkı $99A - 99C$ olur. $A = 2 + C$ olduğundan

$$99A - 99C = 99(A - C) = 99 \cdot 2 = 198$$

elde edilir. Yanıt : 8.

Alıştırma 11.50.

İki basamaklı bir sayı rakamları toplamının 7 katına eşitse bu sayıya yeşil sayı diyelim. Kaç tane yeşil sayı vardır?

Çözüm :

$$AB = 7(A + B) \Rightarrow 10A + B = 7A + 7B$$

$$\Rightarrow 3A = 6B$$

$$\Rightarrow A = 2B$$

olmalıdır. $AB = 21, 42, 63, 84$ olabilir.

Aritmetik Ortalama

Alıştırma 11.51. AMC8-2000

Yedi sayıdan oluşan bir listedeki ilk dört sayının ortalaması 5, son dört sayının ortalaması ise 8'dir.

Yedi sayının hepsinin ortalaması $6\frac{4}{7}$ olduğuna göre, her iki dört sayı kümesinde de ortak olan sayı kaçtır?

Çözüm : İlk 4 sayının ortalaması 5 ise, ilk dört sayının toplamı $4 \cdot 5 = 20$ olur.

Son 4 sayının ortalaması 8 ise, son dört sayının toplamı $4 \cdot 8 = 32$ olur.

Tüm 7 sayının ortalaması $6\frac{4}{7}$ ise, yedi sayının tümünün toplamı $7 \cdot 6\frac{4}{7} = 46$ olur.

İlk dört sayıyla son dört sayının toplamı $20 + 32 = 52$ olduğundan,

$$52 - 46 = 6$$

sayısı iki kez toplanmıştır.

Alıştırma 11.52. AMC8-2001

Küçükten büyüğe sıralanmış beş farklı pozitif tam sayının ortalaması 15'tir. Ortanca sayı 18'dir. Bu beş tam sayıdan en büyüğünün maksimum değeri kaçtır?

Çözüm : Beş sayının ortalaması 15 ise toplamı $15 \cdot 5 = 75$ olur. Ortadaki 18 ise geriye kalan 4 sayının toplamı

$$75 - 18 = 57$$

olmalıdır. En büyüğünün maksimum değeri için diğer üç sayıyı en küçük almalıyız. Birini 18'den büyük almamız gerektiği için üç sayı 1, 2 ve 19 alınabilir. Böylece, en büyük sayı en fazla

$$57 - 1 - 2 - 19 = 35$$

olur.

Alıştırma 11.53. AJHSME-1988

Bir sınıftaki 6 erkek öğrencinin boy ortalaması 150 cm, 4 kız öğrencinin ortalama boyu ise 140 cm'dir. Bu sınıftaki 10 öğrencinin boy ortalaması kaçtır?

Çözüm : Erkek öğrencilerin boylarının toplamı S_E ve kız öğrencilerin boylarının toplamı da S_K olsun. Bu durumda,

$$\frac{S_E}{6} = 150, \quad \frac{S_K}{4} = 120$$

yazılabilir. Buradan, $S_E = 900$ cm ve $S_K = 480$ cm olur. Şimdi 10 öğrencinin boy ortalamasını bulacağız. Bu 10 öğrencinin boylarının toplamı :

$$S_B + S_G = 900 + 480 = 1380$$

olur. Ortalamaları ise

$$\frac{1380}{10} = 138$$

bulunur.

Alıştırma 11.54. AMC8-2015 ♣

Kalan sayıların ortalaması 6 olacak şekilde $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinden iki elemanlı bir alt küme çıkarılacaktır. Bu alt küme kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm : 2 eleman çıkarılınca geriye 9 eleman kalır ve ortalaması 6 ise toplamı

$$6 \cdot 9 = 54$$

olur. Diğer yandan, verilen kümedeki elemanların toplamı

$$1 + 2 + 3 + \dots + 11 = \frac{11 \cdot 12}{2} = 66$$

olduğundan, çıkarılan iki elemanın toplamı $66 - 54 = 12$ elde edilir. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ kümesinden toplamı 12 olan 2 elemanlı alt kümeler $\{1, 11\}$, $\{2, 10\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$, $\{5, 7\}$ seçilebilir. Yanıt 5.

Problemler (Denklemler)

Prob. 11.1 Bir sayının $\frac{3}{7}$ 'si $\frac{6}{11}$ ise bu sayı kaçtır?

Çözüm : Sayı x olsun.

$$\frac{3x}{7} = \frac{6}{11} \Rightarrow 33x = 42 \Rightarrow x = \frac{42}{33} = \frac{14}{11}$$

bulunur.

Prob. 11.2 Öğretmen tahtaya dört sayı yazıyor. Bu dört sayının herbirinin 4 fazlasının toplamlarının 4 katı 128 ise, öğretmenin tahtaya yazdığı ilk dört sayının toplamı kaçtır?

Çözüm : Tahtaya yazılan ilk 4 sayının toplamı x olsun. Her bir sayı 4 artırılırsa toplam $4 \times 4 = 16$ artar. Yani, toplam $x + 16$ olur. Bu toplamın 4 katı ise,

$$4(x + 16) = 128 \Rightarrow x = 16$$

bulunur.

Prob. 11.3 Bir sınıftaki erkek öğrencilerin sayısı kız öğrencilerin sayısının 4 katından 7 eksiktir. Sınıftaki öğrenci sayısı sınıftaki sıra sayısının 5 katından 13 fazlaysa, kızların sayısı sıra sayısından kaç fazladır?

Çözüm : Kızların sayısını x ile gösterelim. Buna göre,

$$K = x, E = 4x - 7 \text{ ise } K + E = 5x - 7$$

olacaktır. Sıra sayısı farklı bir çokluk olduğundan sıra sayısına da y diyelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 5x - 7 &= 5y + 13 \Rightarrow 5x - 5y = 20 \\ &\Rightarrow 5(x - y) = 20 \\ &\Rightarrow x - y = 4 \end{aligned}$$

olur.

Prob. 11.4 $\frac{3x - 2}{3} = \frac{x - 1}{2}$ ise x kaçtır?

Çözüm : İçler dışlar çarpımından

$$\begin{aligned} 6x - 4 &= 3x - 3 \Rightarrow 6x - 3x = 4 - 3 \\ &\Rightarrow 3x = 1 \\ &\Rightarrow x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

olur.

Prob. 11.5 Bir sayı 12 ile çarpılıp 12 eklendikten sonra 15'e bölünüyor. Elde edilen sayı, ilk sayının %20 fazlasıysa bu sayı kaçtır?

Çözüm : Sayı x olsun.

$$\begin{aligned} \frac{12x + 12}{15} &= \frac{120x}{100} \Rightarrow \frac{x + 1}{3} = \frac{x}{2} \\ &\Rightarrow 2x + 2 = 3x \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

bulunur.

Prob. 11.6 $\frac{x - y}{3} = 3y$ ifadesinde y değerini x cinsinden bulunuz.

Çözüm :

$$\frac{x - y}{3} = 3y \Rightarrow x - y = 9y \Rightarrow x = 10y \Rightarrow y = \frac{x}{10}$$

olur.

Prob. 11.7 $\frac{x - y}{3} = 3y + \frac{x}{4}$ ifadesinde x değerini y cinsinden bulunuz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{x - y}{3} &= 3y + \frac{x}{4} \Rightarrow \frac{x - y}{3} = \frac{12y + x}{4} \\ &\Rightarrow 4x - 4y = 36y + 3x \\ &\Rightarrow x = 40y \end{aligned}$$

olur.

Prob. 11.8 Toplamları 50 olan iki sayıdan birinin $\frac{2}{3}$ 'ü ile diğerinin $\frac{3}{5}$ 'inin toplamı 36'dır. Buna göre, büyük sayı küçük olanda kaç fazladır?

Çözüm : Sayılardan birine x diyelim. Madem toplamları 50, diğer sayı $50 - x$ olur. Problemde verilenlerden,

$$\begin{aligned} \frac{2x}{3} + \frac{3(50 - x)}{5} &= 36 \Rightarrow \frac{10x + 9(50 - x)}{15} = 36 \\ &\Rightarrow \frac{x + 450}{15} = 36 \\ &\Rightarrow x + 450 = 540 \\ &\Rightarrow x = 90 \end{aligned}$$

olur. Diğer sayı $50 - 90 = -40$ olduğundan farkları

$$90 - (-40) = 90 + 40 = 130$$

bulunur.

Prob. 11.9 En sadeleşmiş değeri $\frac{3}{5}$ olan bir kesrin payından 3 çıkartılıp, paydasına 7 eklenirse kesrin yeni değeri $\frac{3}{7}$ oluyor. İlk kesrin pay ve paydasının toplamı kaçtır?

Çözüm : Bir kesrin en sade değeri $\frac{3}{5}$ ise, kesir $x \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\frac{3x}{5x}$ formunda olmalıdır. Şimdi payından 3 çıkarıp ve paydasına 6 ekleyelim. Problemden verilenlerden

$$\begin{aligned} \frac{3x-3}{5x+7} &= \frac{3}{7} \Rightarrow 7(3x-3) = 3(5x+7) \\ &\Rightarrow 21x-21 = 15x+21 \\ &\Rightarrow 21x-15x = 21+21 \\ &\Rightarrow 6x = 42 \Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

O halde, ilk kesir

$$\frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 7} = \frac{21}{35}$$

bulunur. Pay ve paydasının toplamı da $21 + 35 = 56$ olur.

Prob. 11.10 26 yaşındaki Ezgi'nin 4 yaşında Özge adında bir kızı vardır. Kaç yıl sonra yaşlarının oranı $\frac{5}{3}$ olur?

Çözüm : x yıl sonra yaşları oranı $\frac{5}{3}$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{26+x}{4+x} &= \frac{5}{3} \Rightarrow 78+3x = 20+5x \\ &\Rightarrow 58 = 5x-3x \\ &\Rightarrow 2x = 58 \Rightarrow x = 29 \end{aligned}$$

Prob. 11.11 Mete 18 yaşındayken, Masal Mete'den Mete'nin $\frac{1}{3}$ 'ü kadar daha büyüktür. Kaç yıl önce Masal'ın yaşı Mete'nin yaşının 2 katıydı?

Çözüm : Mete 18 yaşındayken,

Masal : $18 + \frac{1}{3} \cdot 18 = 24$ yaşındaymış. x yıl önce Masal'ın yaşı Mete'nin yaşının 2 katı olsun. x yıl önce, Mete'nin yaşı : $18 - x$; Masal'ın yaşı : $24 - x$ olur. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{24-x}{18-x} &= 2 \Rightarrow 24-x = 36-2x \\ &\Rightarrow 2x-x = 36-24 \\ &\Rightarrow x = 12 \end{aligned}$$

Prob. 11.12 Payı paydasından 3 eksik olan bir kesrin pay ve paydasına 1 eklenince, kesrin değeri $\frac{2}{3}$ oluyor. Bu kesri bulunuz.

Çözüm : Kesrin paydası x olsun. Kesir $\frac{x-3}{x}$ olur.

$$\begin{aligned} \frac{(x-3)+1}{x+1} &= \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x-2}{x+1} = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow 3x-6 = 2x+2 \\ &\Rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

ise kesir $\frac{5}{8}$ 'dir.

Prob. 11.13 Bumin her gün kumbarasına 20 veya 50 liralık bir tane kağıt para atıyor. 30 gün sonunda kumbaradaki para 1200 lira olduğuna göre, kumbarasına kaç kez 50 lira atmıştır?

Çözüm : Kumbarasına x kez 50 lira atsın. $(30-x)$ kez 20 lira atar. Buna göre,

$$\begin{aligned} 50x + 20(30-x) &= 1200 \\ &\Rightarrow 50x + 600 - 20x = 1200 \\ &\Rightarrow 30x = 600 \Rightarrow x = 20 \end{aligned}$$

bulunur.

Prob. 11.14 51 yaşındaki Tuğrul'un iki çocuğunun yaşları toplamı 12'dir. Kaç yıl sonra Tuğrul'un yaşı çocuklarının yaşları toplamının 3 katı olur?

Çözüm : x yıl sonra Tuğrul'un yaşı yani $51+x$, çocuklarının yaşları toplamının yani $12+2x$ 'in 3 katı ise

$$\begin{aligned} 51+x &= 3(12+2x) \Rightarrow 51+x = 36+6x \\ &\Rightarrow 51-36 = 5x \\ &\Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

elde edilir.

Prob. 11.15 Aşağıdaki sayı örüntüsünde, her sayı kendinden önceki iki sayının çarpımıdır. Buna göre, bu örüntünün ilk terimi, yani ★ hangi kesrin karesidir?

$$\star, \frac{8}{5}, \frac{5}{2}, 4, 10, 40, 400$$

Çözüm : Her sayı kendinden önceki iki sayının çarpımıysa,

$$\begin{aligned} \star \cdot \frac{8}{5} &= \frac{5}{2} \Rightarrow \star = \frac{5}{2} \div \frac{8}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{8} = \frac{25}{16} \\ &\Rightarrow \star = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Prob. 11.16 Farkları 6 olan iki sayının toplamlarının $\frac{1}{4}$ 'ü, bu sayılardan küçük olanın 4 eksiğidir.

Buna göre bu sayıların büyük olanı kaçtır?

Çözüm : Sayılardan küçük olanı x olsun. Büyük olanı $x + 6$ olur.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(x + x + 6) &= x - 4 \Rightarrow \frac{2x + 6}{4} = x - 4 \\ &\Rightarrow 2x + 6 = 4x - 16 \\ &\Rightarrow 22 = 2x \\ &\Rightarrow x = 11\end{aligned}$$

O halde, büyük olanı $x + 6 = 11 + 6 = 17$ olur.

Prob. 11.17 $3|x| - x = 20$ ise x 'in alabileceği değerlerin toplamı kaçtır?

Çözüm : $x > 0$ ise

$$3x - x = 20 \Rightarrow 2x = 20 \Rightarrow x = 10$$

bulunur. $x < 0$ ise

$$-3x - x = 20 \Rightarrow -4x = 20 \Rightarrow x = -5$$

olur. Yanıt : $10 + (-5) = 5$ bulunur.

Prob. 11.18

$$A = \{(x, y) : 2x + 3y = 11, x, y \in \mathbb{Z}^+\}$$

kümesinin eleman sayısı kaçtır?

Çözüm : x, y pozitif tam sayı olduğundan, y en fazla 3 olabilir.

$$y = 3 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 3 = 11 \Rightarrow x = 1,$$

$$y = 2 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 2 = 11 \Rightarrow 2x = 5 \text{ ise } x \in \mathbb{Z} \text{ olamaz,}$$

$$y = 1 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 1 = 11 \Rightarrow x = 4,$$

olduğundan $A = \{(x, y) : (1, 3), (4, 1)\}$ ve $s(A) = 2$ bulunur.

Prob. 11.19 $a, b, c < n$ olmak üzere,

$$(abcd)_n = a \cdot n^3 + b \cdot n^2 + c \cdot n + d$$

biçiminde tanımlanıyor. Buna göre, $(23x4)_5 = 539$ ise x kaçtır?

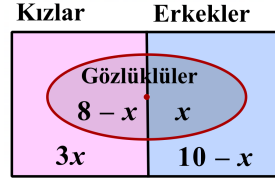
Çözüm :

$$\begin{aligned}(23x4)_5 &= 2 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + x \cdot 5 + 4 \\ 539 &= 5 \cdot x + 329\end{aligned}$$

eşitliğinden $x = 2$ bulunur.

Prob. 11.20 30 kişilik bir sınıfta 8 kişi gözlüklüdür. Gözlüksüz kızların sayısı, gözlüklü erkek öğrencilerin sayısının 3 katıdır. Gözlüksüz erkek öğrenciler ise, gözlüklü kız öğrencilerden 2 fazladır. Buna göre, bu sınıfta kaç kız öğrenci gözlüklüdür?

Çözüm : Gözlüklü erkeklerin sayısı x olsun. Bu durumda, gözlüklü kızlar $8 - x$ olur. Gözlüksüz kızların sayısı, gözlüklü erkek öğrencilerin sayısının 3 katıysa, gözlüksüz kızların sayısı $3x$ olur. Gözlüksüz erkek öğrenciler, gözlüklü kız öğrencilerden 2 fazlaysa $10 - x$ olur. O halde, aşağıdaki gibi bir şema hazırlayabiliriz.



Öğrenci sayısı 30 olduğundan,

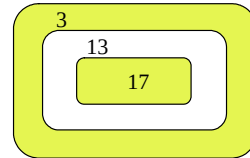
$$8 - x + x + 3x + 10 - x = 30$$

olmalıdır. Buradan,

$$2x + 18 = 30 \Rightarrow 2x = 30 - 18 = 12 \Rightarrow x = 6$$

ve gözlüklü kız öğrenci sayısı 18 olur.

Prob. 11.21 Masal okuyla şekildeki darta 6 atış yapıyor ve 66 puan topluyor. Buna göre, kaç kez 17 puanlık atış yapımıştır?



Çözüm : Atış sayılarını x, y, z ile gösterelim.

$$x + y + z = 6,$$

$$17x + 13y + 3z = 66$$

olmasını istiyoruz. x en fazla 3 olabilir.

$$x = 3 \Rightarrow y + z = 3 \text{ ise } 13y + 3z = 15$$

olacak şekilde y ve z bulunamaz.

$$x = 2 \Rightarrow y + z = 4 \text{ ise } 13y + 3z = 32$$

eşitliği $y = z = 2$ için sağlar. $x = 1$ için de eşitliğin sağlanamayacağınız görebilirsiniz.

Prob. 11.22 Bir düğün için bir otobüsle bir köye giden bir katile, köydeki evlerde 4'er 4'er kalırsa 10 kişi açıkta kalıyor. 7'şer 7'şer evlerde kalırlarsa da 2 ev boş kalıyor. Buna göre katilede kaç kişi vardır?

Çözüm : Köyde x ev olsun. Buna göre, katiledeki kişi sayısından

$$4x + 10 = 7(x - 2)$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} 4x + 10 &= 7x - 14 \Rightarrow 10 + 14 = 7x - 4x \\ &\Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8 \end{aligned}$$

olur. Katilede $4 \cdot 8 + 10 = 42$ kişi vardır.

Prob. 11.23 Yaşları birbirinden farklı beş kardeşin yaşlarının toplamının 2 katı babalarının yaşına eşittir. 10 yıl sonra babanın yaşı, beş kardeşin yaşlarının toplamının %75'i olacağına göre baba bugün kaç yaşındadır?

Çözüm : Beş kardeşin yaşları toplamı n olsun. Babalarının yaşı $2n$ olur.

10 yıl sonra, baba $2n + 10$, çocukların yaşları toplamı : $n + 50$ olur. 10 yıl sonra babanın yaşı, beş kardeşin yaşlarının toplamının %75'i olacağına

$$2n + 10 = \frac{75}{100} (n + 50)$$

yazılabilir. $\frac{75}{100}$ yerine $\frac{3}{4}$ yazabiliriz.

$$2n + 10 = \frac{3}{4} (n + 50)$$

eşitliğinin her iki tarafını 4 ile çarpalım ve dağıtalım.

$$8n + 40 = 3n + 150$$

eşitliğinden, $5n = 110$ ve $n = 22$ elde edilir. O halde, baba bugün $2n = 2 \cdot 22 = 44$ yaşındadır.

Prob. 11.24 Keloğlan'ın mağarada bulduğu altınları 7 arkadaş arasında eşit olarak paylaştırılıyor. Eğer 4 kişi arasında paylaşılsalardı her biri 15 tane daha fazla altın alacaktı. Keloğlan kaç altın bulmuştur?

Çözüm : Altın sayısı x olsun. 4 kişiye paylaşma durumunda, 7 kişiye paylaşma durumundan 15 tane daha fazla altın alınacaksa,

$$\frac{x}{4} - \frac{x}{7} = 15$$

yazılabilir. Sol tarafta payda eşitlenirse,

$$\frac{7x - 4x}{28} = 15 \text{ veya } \frac{3x}{28} = 15$$

olur. Her tarafı 3 ile bölersek

$$\frac{x}{28} = 5$$

olur. Her tarafı 28 ile çarparsak, $x = 5 \cdot 28 = 140$ elde edilir.

Prob. 11.25 Bir satıcı 2 liradan aldığı yumurtaların $\frac{1}{5}$ 'ini kırıyor. Saticı kalan yumurtaların tanesini en az kaç liradan satmalı ki bu satıştan zarar etmesin?

Çözüm : x tane yumurtası olsun. Almak için $2x$ lira para öder. Fakat, $\frac{x}{5}$ 'i kırıldığı için geriye $\frac{4x}{5}$ 'i kalır. Geri kalanın tanesinin satış fiyatı S olsun.

$$S \cdot \frac{4x}{5} = 2x \Rightarrow S \cdot 4 = 10 \Rightarrow S = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ lira.}$$

Prob. 11.26 İçi dolu bir bidonun ağırlığı 35 kilodur. Bidondaki suyun $\frac{2}{7}$ 'si boşaltılınca bidonun ağırlığı 27 kilo oluyor. Boş bidonun ağırlığı kaç kg'dır?

Çözüm : Boş bidonun ağırlığı x ise suyun ağırlığı $35 - x$ olur. Bidondaki suyun $\frac{2}{7}$ 'si boşaltılırsa $\frac{5}{7}$ 'si kalır. Denklem

$$x + \frac{5}{7} (35 - x) = 27$$

şeklinde yazılabilir. Her tarafı 7 ile çarpalım.

$$\begin{aligned} 7x + 5(35 - x) &= 189 \Rightarrow 7x + 175 - 5x = 189 \\ &\Rightarrow 2x = 189 - 175 = 14 \\ &\Rightarrow x = 7 \end{aligned}$$

elde edilir.

Prob. 11.27 Eray cebindeki paranın $\frac{1}{4}$ 'ünü Erol'a, kalan parasının $\frac{1}{5}$ 'ini de Erdinç'e veriyor. Cebinde 300 lira kaldığına göre başlangıçta kaç lirası vardı?

Çözüm : Eray'ın cebindeki para x olsun. Verdiği paralar önce $\frac{x}{4}$, sonra kalan $\frac{3x}{4}$ 'in $\frac{1}{5}$ 'idir. Kalan da 300 ise

$$x - \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3x}{4} \right) = 300$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} x - \left(\frac{5x}{20} + \frac{3x}{20} \right) &= 140 \Rightarrow x - \frac{8x}{20} = 300 \\ &\Rightarrow \frac{12x}{20} = 300 \\ &\Rightarrow 12x = 20 \cdot 300 \\ &\Rightarrow x = 500 \end{aligned}$$

olur.

Prob. 11.28 Bir okuldaki öğrencilerin $\frac{3}{5}$ 'i erkektir. Karne sonuçlarına göre kız öğrencilerin $\frac{1}{3}$ 'ü takdir belgesi almış, 60 tanesi ise alamamıştır. Buna göre, bu okulda kaç öğrenci vardır?

Çözüm : Okuldaki öğrenci sayısı x olsun. Okuldaki öğrencilerin $\frac{3x}{5}$ 'ü erkekse, $\frac{2x}{5}$ 'i kızdır. Kızların $\frac{1}{3}$ 'ü takdir belgesi almış ise $\frac{2}{3}$ 'ü almamıştır. O halde,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot x = 60 \Rightarrow \frac{4x}{15} = 60 \Rightarrow x = 225$$

elde edilir.

Prob. 11.29 x ve y sayıları için

$$x - 2y = 5$$

ise aşağıdakilerin hangileri doğrudur.

I. x tam sayı ise y de tam sayıdır.

II. x pozitif ise y de pozitiftir.

III. y pozitif ise x de pozitiftir.

IV. y tam sayı ise x de tam sayıdır.

Çözüm : Yanlış olanları bir tane sağlamayan örneklerle gösterebiliriz.

I. Yanlış ($x = 2$ ise $-2y = 3$ ve $y = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$)

II. Yanlış ($x = 3$ ise $-2y = 2$ ve $y = -1 < 0$)

III. Doğru. ($y > 0$ ise $x = 5 + 2y > 0$ olur)

IV. Doğru. ($y \in \mathbb{Z}$ ise $x = 5 + 2y \in \mathbb{Z}$ olur)

Prob. 11.30 A , $5B - A$ ve $2A$ sayıları küçükten büyüğe doğru sıralanmış ardışık üç çift sayıdır. Buna göre, $A + B$ toplamı kaçtır?

Çözüm : Bu üç sayı ardışık çift sayılar ise her birinin bir öncekinden 2 büyük olması gerekir.

$$(5B - A) - A = 2 \Rightarrow 5B - 2A = 2 \quad (D1),$$

$$2A - (5B - A) = 2 \Rightarrow 3A - 5B = 2 \quad (D2)$$

eşitlikleri elde edilir. Bunları taraf tarafa toplarsak $A = 4$ olacağından,

$$5B - 2 \cdot 4 = 2 \Rightarrow 5B = 10 \Rightarrow B = 2$$

bulunur. O halde, $A + B = 4 + 2 = 6$ olur.

Prob. 11.31 x ve y birer tam sayı olmak üzere,

$$y = \frac{y+5}{x}$$

eşitliğinin sağlayan x değerlerinin toplamı kaçtır?

Çözüm :

$$y = \frac{y+5}{x} \Rightarrow x = \frac{y+5}{y} = \frac{y}{y} + \frac{5}{y} = 1 + \frac{5}{y}$$

olduğundan,

$$y = 1 \text{ için } x = 6;$$

$$y = 5 \text{ ise } x = 2;$$

$$y = -1 \text{ ise } x = 1 - 5 = -4;$$

$$y = -5 \text{ ise } x = 1 - 1 = 0$$

olur. Buradan, x değerlerinin toplamı

$$6 + 2 - 4 + 0 = 4$$

bulunur.

Prob. 11.32 Hakan'ın parasının $\frac{3}{5}$ 'i Çağla'nın parasına eşittir. Hakan Çağla'ya 100 lira verirse paraları eşit oluyor. Hakan ve Çağla'nın paraları toplamı nedir?

Çözüm : $\text{Ç} = \frac{3}{5}\text{H}$ olarak verilmiş.

$$\frac{\text{Ç}}{\text{H}} = \frac{3k}{5k} \text{ ise } \text{H} = 5k$$

olacaktır.

$$\text{H} - 100 = \text{Ç} + 100 \Rightarrow 5k - 100 = 3k + 100$$

$$\Rightarrow 5k - 3k = 100 + 100$$

$$\Rightarrow 2k = 200$$

$$\Rightarrow k = 100$$

Paraları toplamı $8k = 8 \cdot 100 = 800$ olur.

Prob. 11.33 Bir gezi grubunun $\frac{1}{4}$ 'ü erkektir. Bu gruba 4 kız daha katılınca kızlar grubun $\frac{7}{9}$ 'ünü oluşturuyor. İlk durumda grupta kaç kız vardı?

Çözüm : Grubun $\frac{1}{4}$ 'ü erkek ise $\frac{3}{4}$ 'ü kızdır. G ile tüm gruptaki kişi sayısını, K ile de kızların sayısını gösterelim. $\in \mathbb{Z}^+$ için

$$\frac{K}{G} = \frac{3n}{4n}$$

yazılabilir. Yani, kızlar $3n$ ise gruptaki kişi sayısı $4n$ olur.

$$\frac{K+4}{G+4} = \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{3n+4}{4n+4} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow 27n + 36 = 28n + 28$$

$$\Rightarrow 36 - 28 = 28n - 27n$$

$$\Rightarrow 8 = n$$

ise $K = 3n = 3 \cdot 8 = 24$ olur.

Prob. 11.34 AMC8-2016

Annie ve Bonnie, 400 metrelik oval bir pistte tur atmaya başlıyorlar. Annie Bonnie'den %25 daha hızlı koşuyor ve dolayısıyla Annie hep önde gidiyor. Annie, Bonnie'yi ilk geçtiğinde kaç tur koşmuş olur?

Çözüm :

Annie'nin koştuğu mesafeye x diyelim. Annie, Bonnie'den %25 daha hızlıysa, Bonnie

$$\frac{4}{5} \cdot x$$

mesafeyi koşacaktır. Annie'nin Bonnie'yle yan yana gelmesi için fazladan 400 metre koşması gerekir. Yani

$$x - \frac{4}{5} \cdot x = 400 \Rightarrow \frac{x}{5} = 400 \Rightarrow x = 2000 \text{ m}$$

olması gerekir. Oval pistin uzunluğu 400 metre olduğundan $2000 \div 400 = 5$ tur sonra Annie, Bonnie'yi ilk kez geçecektir.

Prob. 11.35 Bir doğal sayının 5 katının 10 fazlası 150'den küçük, 7 katının 15 eksiği ise 83'ten büyüktür. Bunu sağlayan kaç doğal sayı vardır?

Çözüm :

$$5x + 10 < 150 \Rightarrow 5x < 140 \Rightarrow x < 28$$

$$7x - 15 > 83 \Rightarrow 7x > 98 \Rightarrow x > 14$$

:olduğundan $14 < x < 28$ olmalıdır. $28 - 14 - 1 = 13$ sayı vardır.

Prob. 11.36 Bir doğal sayının 3 katının 20 fazlası 100'den büyük, 2 katının 35 fazlası ise 100'den küçüktür. Bu sayı hangi sayılar olabilir?

Çözüm : Bu doğal sayıyı n ile gösterelim.

$$3n + 20 > 100 \text{ ise, } n > 26, \bar{6} \text{ olması gerekir.}$$

$$2n + 35 < 100 \text{ ise, } n < 32,5 \text{ olması gerekir.}$$

O halde, n sayısı en az 27, en fazla 32 olabilir. 27, 28, 29, 30, 31 ve 32 olabilir.

Prob. 11.37 Alp'in kilosu 48,3 ile 53,3 arasında, Berk'in kilosu da da 42 ile 45 arasındadır. Buna göre, Alp'in kilosunun 3,3 eksiği ile Berk'in kilosunun 8 fazlasının çarpımının 50'de biri hangi doğal sayılar olabilir?

Çözüm : Alp ve Berk'in kilolarını a ve b ile gösterelim.

$$48,3 < a < 53,3 \Rightarrow 45 < a - 3,3 < 50$$

$$42 < b < 45 \Rightarrow 50 < b + 8 < 53$$

$$\Rightarrow 45 < \frac{(a - 3,3)(b + 8)}{50} < 53$$

olabilir. $53 - 45 - 1 = 7$ değer olabilir.

Prob. 11.38 A ve B doğal sayıları için,

$$\begin{array}{r|l} A & 2B+10 \\ \hline - & 6 \\ \hline 3B+1 \end{array}$$

olduğuna göre A en çok kaçtır? (Kalanın, bölenden küçük olması gerektiğini kullanınız.)

Çözüm : Kalan bölenden küçük olacağından,

$$3B + 1 < 2B + 10 \Rightarrow B < 9$$

elde edilir. A'nın en fazla değeri için B en fazla $B = 8$ alınabilir. Buradan,

$$A = 6 \cdot (2 \cdot 8 + 10) + (3 \cdot 8 + 1) = 181$$

bulunur.

Prob. 11.39 AMC8-2014

İki basamaklı bir sayı, rakamlarının çarpımıyla rakamlarının toplamının toplamına eşittir. Bu sayının birler basamağı nedir?

Çözüm : İki basamaklı sayı AB olsun. Bu durumda,

$$AB = 10A + B = A \cdot B + A + B$$

biçiminde yazabiliriz. Buradan,

$$10A + B = A \cdot B + A + B \Rightarrow 9 \cdot A = A \cdot B$$

elde edilir. Yani, $B = 9$ olması gerekir.

Prob. 11.40 ACC, BAA, CBB üç basamaklı sayılarının toplamı 555 ise ABC, BCA, BAC sayılarının toplamı kaçtır?

Çözüm :

$$ACC + BAA + CBB = 111A + 111B + 111C$$

$$ABC + BCA + BAC = 111A + 111B + 111C$$

olduğundan toplam aynıdır : 555.

Prob. 11.41 ACC, BAA, CBB üç basamaklı sayılarının toplamı 999 ise ABC sayısı en fazla kaç olur?

Çözüm :

$$ACC + BAA + CBB =$$

$$111A + 111B + 111C = 999$$

ise $A + B + C = 9$ olmalıdır. O halde, ABC en fazla 621 olabilir.

Prob. 11.42 AMC8-2003

Berk ve Can'ın her biri dört adet 100 puanlık test sınavına giriyor. Berk, dört testte ortalama 78 puan, Can ilk testte Berk'ten 10 puan daha yüksek, ikinci testte 10 puan daha düşük, üçüncü ve dördüncü testte ise 20 puan daha fazla aldı. Buna göre, bu dört testte Can'ın ortalaması ile Berk'in ortalaması arasındaki fark nedir?

Çözüm : Berk'in 4 testteki ortalaması 78 ise 4 testteki toplam puan $4 \cdot 78 = 312$ olur. Can Berk'ten toplam $10 - 10 + 20 + 20 = 40$ daha fazla puan aldığına göre, $312 + 40 = 352$ puan almıştır. Berk'in ortalaması da

$$\frac{352}{4} = 88$$

olur. O halde, ortalamaları arasındaki fark $88 - 78 = 10$ bulunur.

Prob. 11.43 AMC8-2004

Bir listedeki beş sayının ortalaması 54'tür. İlk iki sayının ortalaması 48 ise son üç sayının ortalaması kaçtır?

Çözüm : 5 sayıyı a, b, c, d ve e ile gösterelim. Böylece

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 54 \Rightarrow a + b + c + d + e = 270$$

olur. İlk iki sayının ortalaması 48 ise

$$\frac{a + b}{2} = 48 \Rightarrow a + b = 96$$

olur. İlk denklemden yerine yazarsak,

$$96 + c + d + e = 270 \Rightarrow c + d + e = 174$$

bulunur. Böylece, son üç sayının ortalaması

$$\frac{c + d + e}{3} = \frac{174}{3} = 58$$

elde edilir.

Prob. 11.44 AJHSME-2018

Sıfırdan farklı sayıların çarpmaya göre terslerinin ortalamasının çarpmaya göre tersine, bu sayıların **harmonik ortalaması** denir. Örneğin a ve b sayılarının harmonik ortalaması

$$\mathcal{H}(a, b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

ile bulunur. Buna göre, 1, 2 ve 4 sayılarının harmonik ortalamasını bulunuz.

Çözüm :

$$\mathcal{H}(1, 2, 4) = \frac{3}{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \frac{3}{\frac{7}{4}} = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{7}$$

elde edilir.

Prob. 11.45 $a_1 a_2 \cdots a_n = b^n$ ise b sayısına $a_1, a_2, \dots, a_n$ sayılarının **geometrik ortalaması** denir. Buna göre, $\frac{3}{5}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}$ sayılarının geometrik ortalaması kaçtır?

Çözüm :

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{8}{9} = b^3 \Rightarrow \frac{8}{27} = b^3 \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^3 = b^3 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

elde edilir.

Prob. 11.46 UİMO - 2006

$\frac{15}{39} < \frac{6}{n} < \frac{7}{13}$ koşulunu sağlayan kaç n pozitif tam sayısı vardır?

Çözüm : $\frac{15}{39} < \frac{6}{n} < \frac{7}{13}$ eşitsizliğini ters çevirirsek

$$\begin{aligned} \frac{39}{15} > \frac{n}{6} > \frac{13}{7} &\Rightarrow \frac{13}{7} < \frac{n}{6} < \frac{39}{15} \\ &\Rightarrow \frac{13 \cdot 6}{7} < n < \frac{2 \cdot 39}{5} \\ &\Rightarrow \frac{78}{7} < n < \frac{78}{5} \\ &\Rightarrow 11,1 < n < 15,6 \end{aligned}$$

eşitsizliğine göre $n \in \{12, 13, 14, 15\}$ bulunur.

Prob. 11.47 UİMO - 2009

n tam sayı olmak üzere,

$$12 < \frac{n}{5} < 21$$

eşitsizliğini sağlayan ve sadeleştirilemeyen $\frac{n}{5}$ şeklindeki kesirlerin toplamı kaçtır?

Çözüm :

$$12 < \frac{n}{5} < 21$$

ise, $60 < n < 105$ bulunur. $n/5$ kesirinin sadeleştirilememesi için, n sayısı 5 ile aralarında asal olmalıdır. Buna göre, n sayısı, 5'in katı olmamalıdır. Buna göre, istenen şeklindeki n sayılarının toplamını bulalım.

$$\begin{aligned} 61 + 62 + \cdots + 104 &= \left(\frac{104 - 61}{1} + 1\right) \left(\frac{104 + 61}{2}\right) \\ &= 3630 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 65 + 70 + \cdots + 100 &= \left(\frac{100 - 65}{5} + 1\right) \left(\frac{100 + 65}{2}\right) \\ &= 660 \end{aligned}$$

olduğundan

$$3630 - 660 = 2970$$

bulunur. Fakat, biz $n/5$ şeklindeki kesirlerin toplamını aradığımız için, istenen yanıt $2970/5 = 594$ bulunur.

Prob. 11.48 UİMO - 2003

Bir sınıftaki öğrencilerin %99'u beyaz gömlek giyiyor. Beyaz gömlek giyen öğrencilerin bazıları sınıftan çıkıyor ve kalan öğrencilerin %96'sının beyaz gömlek giydiği gözleniyor. Sınıftaki öğrencilerin yüzde kaç dışarı çıkmıştır?

Çözüm : 100 öğrenci olsun ve x öğrenci dışarı çıksın. Buna göre, beyaz gömlek giyen öğrenci sayısı, $99 - x$ olur. Diğer taraftan, kalan öğrencilerin %96'sı beyaz gömlek giydiğinden $\frac{96}{100} (100 - x)$ öğrenci beyaz gömlek giymektedir. O halde,

$$99 - x = \frac{96}{100} (100 - x)$$

denklemden $x = 75$ olur. Yani, öğrencilerin %75'i dışarı çıkmıştır.

Prob. 11.49 UİMO - 2004

Bir su tankerinin tam doluyken toplam ağırlığı x ton; yarı yarıya doluyken toplam ağırlığı y ton ise, boş tankerin ağırlığı x ve y cinsinden kaç tondur?

Çözüm : Tankerin Tankını T ile, içindeki suyu da S ile gösterirsek,

$$S + T = x \text{ ve } T + \frac{S}{2} = Y$$

olur. Bu denklemlerden, $T = 2y - x$ olur.

Prob. 11.50 UİMO - 2002

Bir köyde yetişkin erkeklerin $\frac{2}{3}$ 'ü, yetişkin kadınların da $\frac{3}{7}$ 'si evlidir. Evli çiftlerin tümü birlikte köyde yaşıyorsa, bu köydeki yetişkinlerin kaçta kaç evlidir?

Çözüm : Yetişkin erkeklerin sayısı x ve yetişkin kadınların sayısı da y olsun. Buna göre, evli yetişkin erkeklerin sayısı $2x/3$ ve evli yetişkin kadınların sayısı da $3y/7$ 'dir. Evli erkeklerin ve kadınların sayısı eşit olacağından $2x/3 = 3y/7$ yani $x = 9y/14$ olur. Buna göre, köydeki evli yetişkinlerin, tüm yetişkenlere oranı

$$\frac{\frac{2x}{3} + \frac{3y}{7}}{x + y} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14}y + \frac{3}{7}y}{\frac{9}{14}y + y} = \frac{\frac{6}{7}y}{\frac{23}{14}y} = \frac{12}{23}$$

elde edilir.

Prob. 11.51 UİMO - 2005

Hem % 15'i, hem de % 33'ü tam sayı olan en küçük pozitif sayı kaçtır?

Çözüm : n sayısının %15'i a ve %33'ü b olsun. Buna göre,

$$a = \frac{15}{100}n \text{ ve } b = \frac{33}{100}n$$

eşitliklerinden,

$$\frac{a}{b} = \frac{15}{33} = \frac{5}{11}$$

olur. a ve b pozitif tam sayı olduklarından, en küçük $a = 5$ alınabilir. Bu durumda, $n = 100/3$ olur.

Prob. 11.52 UMO - 1994

Bir çiftlikteki tavşanların sayısı Mart ayında bir tam karedir. Tavşanların sayısı Nisan ayında 100 adet artarak bir tam kareden bir fazla hale gelir. Mayıs ayında, tavşan sayısı yine 100 adetlik bir artıştan sonra yeniden tam kare olur. Tavşanların Mart ayındaki sayısı kaçtır?

Çözüm : Tavşanların Mart ayındaki sayıları x^2 ise,

$$\text{Nisan ayındaki sayıları } x^2 + 100 = y^2 + 1 \text{ ve}$$

$$\text{Mayıs ayındaki sayıları } x^2 + 200 = y^2 + 101 = z^2$$

olacaktır. Buna göre bu eşitliklerden,

$$y^2 - x^2 = 99 \text{ ve } z^2 - y^2 = 101$$

elde edilir. 101 asal olduğundan, $(z - y)(z + y) = 101$ eşitliğinde,

$$z + y = 101 \text{ ve } z - y = 1$$

olmalıdır. Buradan, $z = 51$ ve $y = 50$ elde edilir. Böylece,

$$x^2 = y^2 - 99 = 50^2 - 99 = 2401$$

eşitliğinden $x = 49$ bulunur.

Prob. 11.53 UMO - 1994

Boy ortalaması 1,68 m olan bir toplulukta kadınların boy ortalaması 1,66 m; erkeklerin ise 1,74 m'dir. Bu toplulukta erkek sayısının kadın sayısına oranı kaçtır?

Çözüm : Erkeklerin sayısını x ve kadınların sayısını da y ile gösterelim. Buna göre,

$$\frac{1,66y + 174, x}{x + y} = 1,68$$

eşitliğinden,

$$174x + 166y = 168x + 168y$$

ve buradan da

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

elde edilir.

Prob. 11.54 UİMO - 2008

Ali ve Burcu'nun, bazıları siyah, bazıları beyaz olmak üzere toplam 70 topu var. Ali'nin toplarının $\frac{5}{9}$ 'u ve

Burcu'nun toplarının $\frac{7}{17}$ 'si siyah ise, Burcu'nun beyaz top sayısı Ali'nin beyaz top sayısından kaç fazladır?

Çözüm : $A + B = 70$ eşitliğinde verilenlere göre, Ali'nin toplarının sayısı 9'un katı ve Burcu'nun toplarının sayısı da 17'nin katı olduğu gözönüne alınırsa,

$$9K + 17M = 70$$

olur. Bu denkleme göre, $M = 2$ ve $K = 4$ olmalıdır. O halde, Ali'nin $(4/9) \cdot 36 = 16$ ve Burcu'nun $(10/17) \cdot 34 = 20$ beyaz topu vardır. Burcu'nun beyaz top sayısı Ali'nin top sayısından 4 fazladır.

Prob. 11.55 UİMO - 2012

x pozitif gerçel sayısının %15'i ve %66'sı tam sayıdır. x sayısının %15'i en az kaç olabilir?

Çözüm : x sayısının %15'i ve %66'sı tam sayı ise,

$$\frac{15x}{100} = \frac{3}{20}x \text{ ve } \frac{66x}{100} = \frac{33}{50}x$$

sayıları tam sayı olmalıdır. Birinci duruma göre, $x = \frac{20}{3}k$, ($k \in \mathbb{Z}$) ve

ikinci duruma göre de,

$$x = \frac{50}{33}m, (m \in \mathbb{Z})$$

formunda olması gerekir. Buna göre,

$$\frac{20}{3}k = \frac{50}{33}m \Rightarrow 22k = 5m$$

eşitliğini sağlayan en küçük k ve m tam sayılarını bulmak yeterlidir. Bunun için, $m = 22$ ve $k = 5$ alınmalıdır. Böylece, x sayısı en küçük

$$x = \frac{20}{3} \cdot 5 = \frac{100}{3}$$

olur. %15'i de

$$\frac{15}{100} \cdot \frac{100}{3} = 5$$

bulunur.

Prob. 11.56 AJHSME-1991

10 farklı pozitif tam sayının ortalaması 10'dur. Bu sayılardan herhangi birinin mümkün olabilecek en büyük değeri kaçtır?

Çözüm : Sayıların ortalaması 10 ise toplamı $10 \cdot 10 = 100$ olur. On sayıdan birinin mümkün olan en büyük değerini bulabilmek için diğer dokuz tanesini en küçük almalıyız. Sayılar farklı olduğundan, 9 pozitif sayıyı 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 alınabilir. Bunların toplamı :

$$1 + 2 + \dots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

olduğundan, onuncu sayı en fazla $100 - 45 = 55$ olabilir.

Prob. 11.57 AMC8-2002

Gizem 5 gün boyunca her gün 1 saat 15 dakika ve 3 gün boyunca her gün 1 saat 30 dakika paten yapıyor. Tüm süre boyunca her gün ortalama 85 dakika paten kayması için dokuzuncu gün ne kadar kayması gerekir?

Çözüm : 5 gün boyunca $60 + 15 = 75$ dakika, 3 gün boyunca 90 dakika paten kaymış. Böylece, 8 gün boyunca

$$5 \cdot 75 + 3 \cdot 90 = 645$$

dakika paten kayar. 9 gün boyunca ortalama 85 dakika paten kayması için toplam $9 \cdot 85 = 765$ dakika paten kayması gerekir. O halde, dokuzuncu gün

$$765 - 645 = 120$$

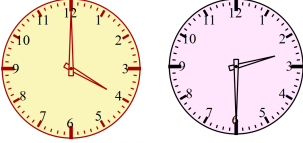
dakika paten kayar.

Geometri : Açılar

Açılar

Alıştırma 12.1.

Aşağıdaki saatlerde akrep ile yelkovan arasındaki açıyı bulunuz.



Çözüm : a) Her saat dilimi 30° olduğundan 4 saat dilimi $4 \cdot 30 = 120^\circ$ olur. b) Bu kez 3,5 saat dilimi olduğundan $3,5 \cdot 30 = 105^\circ$ olur.

Komşu, Tümler ve Bütünler Açılar

Alıştırma 12.2.

Bütünler olan iki açıdan büyük olanın ölçüsü küçük olana bölündüğünde bölüm 7 kalan ise 4 oluyor. Bu açılardan küçük olan kaç derecedir?

Çözüm : Açılardan büyük olanının ölçüsünü A ile, küçük olanın ölçüsünü de B ile gösterelim.

$$A + B = 180^\circ, \quad A = 7B + 4$$

ise,

$$7B + 4 + B = 180^\circ \Rightarrow 8B = 176^\circ \Rightarrow B = 22^\circ$$

elde edilir.

Alıştırma 12.3.

Tümler olan iki açının birinin diğerine oranı $\frac{4}{11}$ ise küçük olan küçük olan kaç derecedir?

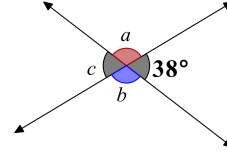
Çözüm : Açılardan ölçüleri A ve B olsun.

$$\frac{A}{B} = \frac{4k}{11k} \Rightarrow A + B = 15k = 90^\circ$$

eşitliğinden $k = 6$ olur. O halde, küçük olan $4 \cdot 6 = 24^\circ$ bulunur.

Alıştırma 12.4.

Aşağıdaki bazı açıların ölçüsü verilmemiştir. a , b ve c ile gösterilen bu açıların ölçülerini bulunuz.



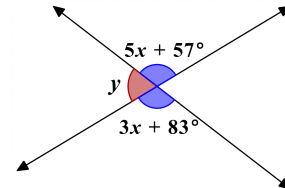
Çözüm : a ile 38° bütünler açılar olduğundan,

$$a = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ$$

olur. c ile 38° ve a ile b açıları ters açılardır ve eşittir. O halde, $c = 38^\circ$ ve $b = a = 142^\circ$ olur.

Alıştırma 12.5.

y açısı kaç derecedir?



Çözüm :

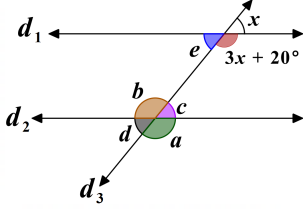
$$5x + 57^\circ = 3x + 83^\circ \Rightarrow 2x = 83^\circ - 57^\circ = 26^\circ \\ \Rightarrow x = 13^\circ$$

olduğundan, $5x + 13^\circ = 5 \cdot 13^\circ + 57^\circ = 122^\circ$ olduğundan $y = 180^\circ - 122^\circ = 58^\circ$ elde edilir.

Paralel İki Doğrunun Bir Kesenle Yaptığı Açılar

Alıştırma 12.6.

Aşağıda d_1 ve d_2 paralel doğruları ile bunları kesen bir d_3 doğrusu verilmiştir. Verilenlere göre, a , b , c , d , e ölçülerini bulunuz.



Çözüm : $3x + 20^\circ$ ve x toplamı doğru açı olduğundan

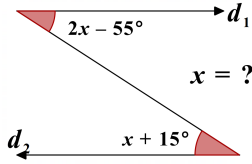
$$3x + 20^\circ + x = 180^\circ \Rightarrow 4x = 160^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$$

olur. Buradan, ters açı olan $e = 40^\circ$, e ile iç ters açı olan c , e ile yöndeş açı olan d açıları da 40° . Benzer şekilde,

$$a = b = 3x + 20^\circ = 140^\circ$$

elde edilir.

Alıştırma 12.7.



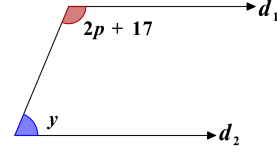
Çözüm : $2x - 55^\circ$ ve $x + 15^\circ$ açıları iç-ters açılarıdır ve birbirine eşittir. Buna göre,

$$\begin{aligned} 2x - 55^\circ &= x + 15^\circ \Rightarrow 2x - x = 55^\circ + 15^\circ \\ &\Rightarrow x = 70^\circ \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 12.8.

Şekilde d_1 ve d_2 paralel olmak üzere, bir p asal sayısı için $2p + 17$ değeri de bir asal sayıdır. $2p + 17$ derecelik açı geniş açı olduğuna göre, y açısı en fazla kaç derece olabilir?



Çözüm : $2p + 17$ geniş açısı 90° 'dan büyük en küçük asal sayılar olarak 97, 101, 103,... olabilir.

$$2p + 17 = 97 \Rightarrow 2p = 80 \Rightarrow p = 40 \text{ asal değil,}$$

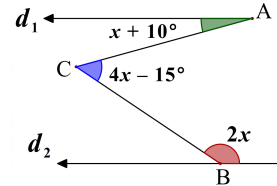
$$2p + 17 = 101 \Rightarrow 2p = 84 \Rightarrow p = 42 \text{ asal değil.}$$

$$2p + 17 = 103 \Rightarrow 2p = 86 \Rightarrow p = 43 \text{ asal}$$

O halde, $2p + 17 = 103$ ve $y = 180 - 103 = 77$ elde edilir.

Alıştırma 12.9.

d_1 ve d_2 paralel olduğuna göre x açısı kaç derecedir?



Çözüm : Sağ tafafa bakan tek dar açı $4x - 15$, sol tarafa bakan dar açılar ise $x + 10^\circ$ ve $180^\circ - 2x$ olduğundan,

$$4x - 15^\circ = x + 10^\circ + 180^\circ - 2x$$

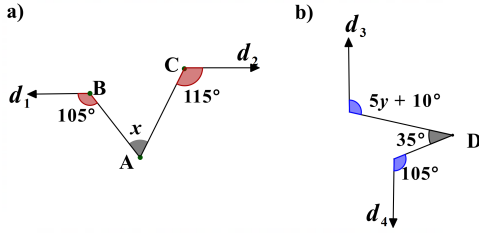
$$\Rightarrow 4x + 2x - x = 205^\circ$$

$$\Rightarrow 5x = 205^\circ \Rightarrow x = 41^\circ$$

olur.

Alıştırma 12.10.

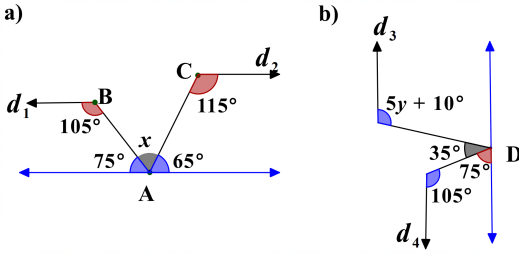
Aşağıdaki şekillerde d_1 ile d_2 ve d_3 ile d_4 ışınları paraleldir. Buna göre x ve y değerlerini bulunuz.



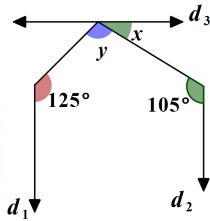
Çözüm : A ve D noktasından şekildeki gibi paraleller çizelim.

a) $x + 75^\circ + 65^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 40^\circ$ olur.

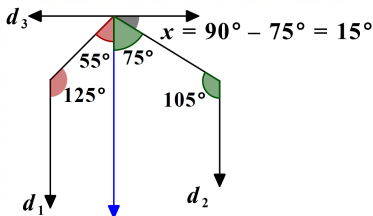
b) $5y + 10^\circ = 35^\circ + 70^\circ$ (iç ters açılar) ise $y = 19^\circ$ olur.

**Alıştırma 12.11.**

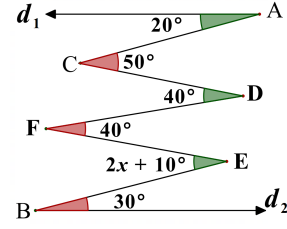
d_1 ve d_2 paralel, d_1 ve d_3 birbirine dik olmak üzere x ve y açılarını bulunuz.



Çözüm : $y = 55^\circ + 75^\circ = 130^\circ$ ve $x = 15^\circ$ olur.

**Alıştırma 12.12.**

d_1 ve d_2 paralel ise x kaçtır?

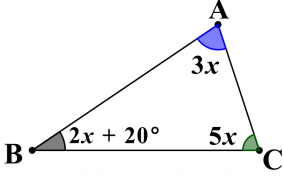


Çözüm : Sağa bakan dar açılarının toplamı $50^\circ + 40^\circ + 30^\circ$. Sola bakan dar açılarının toplamı : $20^\circ + 40^\circ + 2x + 10^\circ$. Buradan, $20^\circ + 40^\circ + 2x + 10^\circ = 50^\circ + 40^\circ + 30^\circ$ eşitliğinden $x = 25^\circ$ bulunur.

Üçgende Açılar

Alıştırma 12.13.

ABC üçgeninin iç açılarının ölçüleri şekildeki gibiyse x kaç derecedir?



Çözüm :

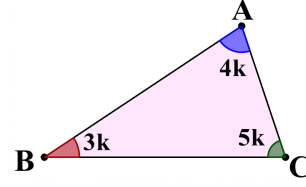
$$3x + 5x + 2x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 16^\circ$$

olur.

Alıştırma 12.14.

Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri 3, 4 ve 5 ile orantılı ise bu üçgenin en büyük açısının ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm :

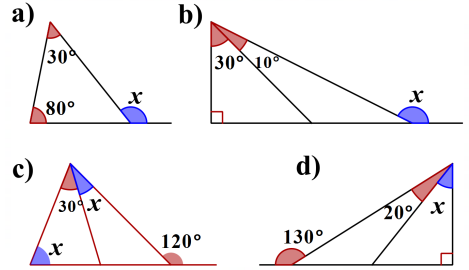


$$3k + 4k + 5k = 180^\circ \Rightarrow 12k = 180^\circ \Rightarrow k = 15^\circ$$

olduğundan en büyük açı $5 \cdot 15^\circ = 75^\circ$ olur.

Alıştırma 12.15.

Aşağıdaki üçgenlerde x açısının ölçüsünü belirleyiniz.



Çözüm : a) Bir üçgenin bir dış açısı bu açığa komşu olmayan üçgenin iki iç açısının toplamıdır.

$$x = 30^\circ + 80^\circ = 110^\circ$$

b)

$$x = 90^\circ + 40 = 130^\circ$$

c)

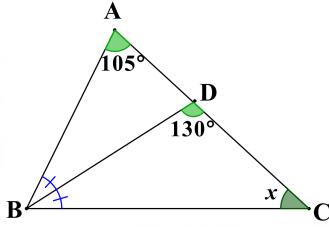
$$120^\circ = x + 30^\circ + x$$

eşitliğinden $x = 45^\circ$ olur.

d)

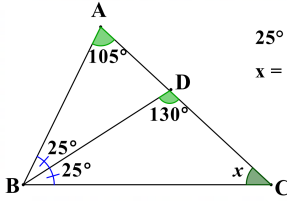
$$130^\circ = 90^\circ + 20^\circ + x$$

eşitliğinden $x = 20^\circ$ olur.

Alıştırma 12.16.

ABC üçgeninin
BD açıortayı
verilmiştir.
Verilenlere
göre x kaç
derecedir?

Çözüm : Dış açı kendisine komşu olmayan iç açılarının toplamı olduğundan $m(\angle ABD) = 130^\circ - 105^\circ = 25^\circ$ bulunur.

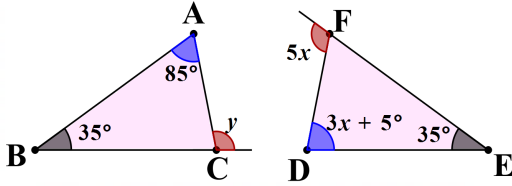


$$25^\circ + 130^\circ = 155^\circ$$

$$x = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$$

Alıştırma 12.17.

ABC ve DEF üçgeninde verilenlere göre x ve y kaç derecedir?



Çözüm :

$$y = 35^\circ + 85^\circ = 120^\circ,$$

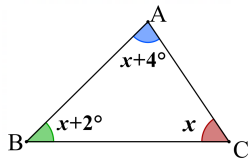
$$5x = 3x + 5^\circ + 35^\circ \Rightarrow 2x = 40^\circ \Rightarrow x = 20^\circ$$

olur.

Alıştırma 12.18.

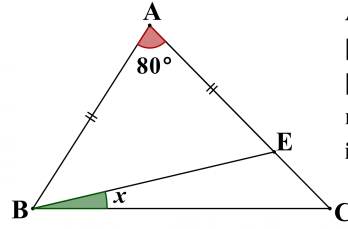
Bir üçgenin iç açılarının ölçüleri derece olarak ardışık üç çift sayı olduğuna göre, en küçük açısının ölçüsü kaç derecedir?

Çözüm :



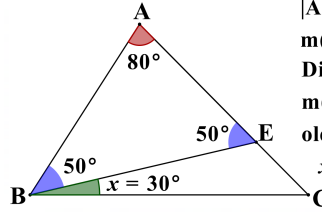
$$x + x + 2 + x + 4 = 180^\circ \Rightarrow 3x + 6^\circ = 180^\circ \Rightarrow x = 58^\circ$$

olur.

Açılarına Göre Üçgenler**Alıştırma 12.19.**

ABC üçgeninde
 $|AB|=|AE|$ ve
 $|AC|=|BC|$
 $m(\angle BAC)=80^\circ$
ise x kaç derecedir?

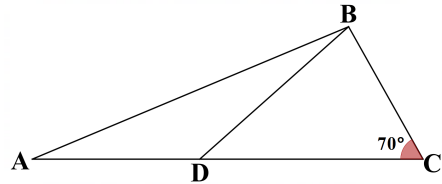
Çözüm :



$|AB|=|AE|$ olduğundan
 $m(\angle ABE)=50^\circ$ olur.
Diğer yandan, $|AC|=|BC|$
 $m(\angle BAC)=m(\angle ABC)=80^\circ$
olduğundan,
 $x=80^\circ-50^\circ=30^\circ$ bulunur.

Alıştırma 12.20. AMC8-2014

$\triangle ABC$ 'da D, $[AC]$ üzerinde $|BD| = |DC|$ olacak şekilde bir noktadır. $m(\angle BCD) = 70^\circ$ ise $\angle ADB$ kaç derecedir?

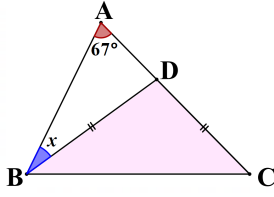


Çözüm : $|BD| = |DC|$ ise

$m(\angle DBC) = m(\angle DCB) = 70^\circ$ olur. Buradan, BDC üçgenin $\angle ADB$ dış açısının ölçüsü

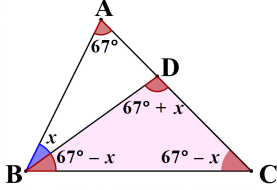
$$m(\angle ADB) = 70^\circ + 70^\circ = 140^\circ$$

elde edilir.

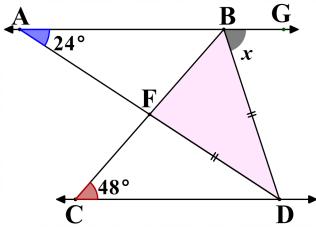
Alıştırma 12.21.

ABC üçgeninde
 $|BD|=|DC|$, $|BC|=|AC|$
 $m(\angle BAC)=47^\circ$
 ise $m(\angle ABD)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm :

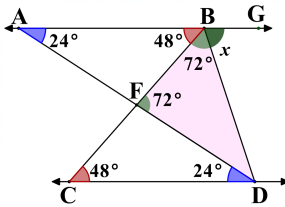


BDC üçgeninde $67^\circ + x + 67^\circ - x + 67^\circ - x = 180^\circ$
 eşitliğinden $x = 21^\circ$ olur.

Alıştırma 12.22.

ABC üçgeninde
 $|BD|=|DF|$
 $m(\angle BAD)=24^\circ$
 $m(\angle BCD)=48^\circ$
 ise $m(\angle GBD)=x$
 kaç derecedir?

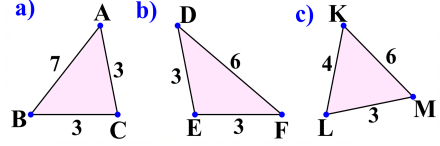
Çözüm :



İç ters açıların eşitliğinden
 $m(\angle BAD)=m(\angle ADC)=24^\circ$
 $m(\angle BCD)=m(\angle CBD)=48^\circ$
 olur. $m(\angle BFD)$ dış açısı
 $48^\circ+24^\circ=72^\circ$ ise BFD ikizkenar
 olduğundan $m(\angle FBD)=72^\circ$
 olur. Böylece,
 $x = 180 - (48 + 72) = 60^\circ$ bulunur.

Üçgen Eşitsizliği**Alıştırma 12.23.**

Aşağıdaki üçgenlerin hangisinin çizilebilmesi mümkün değildir?



Çözüm : a) Çizilemez. $3 + 3 < 7$ olduğundan iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyük değildir.

b) Çizilemez. $3 + 3 = 6$ olduğundan iki kenarın toplamı üçüncü kenardan büyük değildir.

c) Çizilebilir. Herhangi iki kenarın toplamı daima üçüncü kenardan büyüktür.

Alıştırma 12.24. UAMO-2023

Elinizde 4 cm, 8 cm, 11 cm ve 17 cm uzunluklarındaki çubuklardan ikişer tane vardır. Bu çubuklardan üçünü kullanarak birbirinden farklı kaç ikizkenar üçgen elde edebilirsiniz?

Çözüm : **Çözüm :** 2 tane 4 cm'lik çubuk kullanılamaz. Çünkü iki kenarın uzunluğu toplamı üçüncü kenardan büyük olmalı. Diğerlerine ayrı ayrı bakalım.

2 tane 8 cm'lik çubuk kullanılırsa üçüncü çubuk 4, 11 cm olabilir (2 tane). 17 cm olamaz.

2 tane 11 cm'lik çubuk kullanılırsa üçüncü çubuk 4, 8, 17 cm olabilir (3 tane).

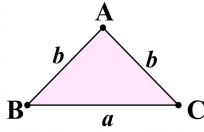
2 tane 17 cm'lik çubuk kullanılırsa üçüncü çubuk 4, 8, 11 cm olabilir (3 tane).

Yanıt : $2 + 3 + 3 = 8$.

Alıştırma 12.25. AMC8-2005

Çevresi **23** ve kenarları tam sayı kaç farklı ikizkenar üçgen vardır?

Çözüm :



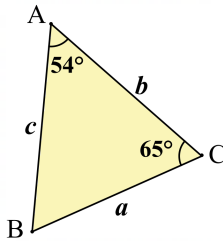
üçgeninin çevresinin $2b + a = 23$ veya $2b = 23 - a$ olmasını istiyoruz. a kenarının tek sayı olması gerektiği açıktır. Üçgen eşitsizliğine göre, $2b > a$ olması gerekir. Buradan,

$$\begin{aligned} 2b > a &\Rightarrow 23 - a > a \\ &\Rightarrow 23 > 2a \\ &\Rightarrow 11,5 > a \end{aligned}$$

olması gerekir. a kenarı en fazla $a = 11$ olabilir. Böylece, $a \in \{11, 9, 7, 5, 3, 1\}$ değerleri olabilir. Yani, 6 tane üçgen vardır.

Üçgende Açı Kenar Bağıntıları**Alıştırma 12.26.**

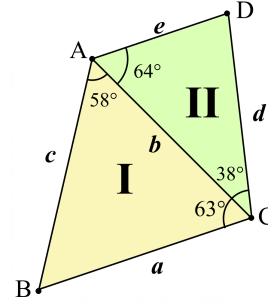
Aşağıdaki şekilde verilenlere göre en uzun kenarı bulunuz.



Çözüm : c kenarı

Alıştırma 12.27.

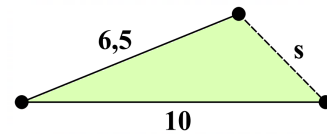
Aşağıdaki şekile göre en uzun kenarı bulunuz.



Çözüm : $m(\angle D) = 78^\circ$ olduğundan ADC üçgeninde en büyük kenar b'dir. Fakat, ABC üçgeninde en büyük açı $\angle ACB$ olduğundan c kenarı b'den daha büyüktür.

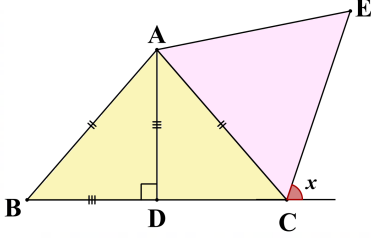
Alıştırma 12.28. AJHSME-1992

Bir üçgenin kenarları 10, s ve 6,5 olduğuna göre s doğal sayısının alabileceği en küçük değer kaç olabilir?



Çözüm : Üçgen eşitsizliğine göre

$10 - 6,5 < s < 10 + 6,5 \Rightarrow 3,5 < s < 16,5$ elde edilir. s en az 4 olabilir.

Alıştırma 12.29.

ACE eşkenar üçgen
 $|AB|=|AC|$
 $|AD|$ yükseklik
 $|AD|=|BD|$
 ise $x=?$

Çözüm : ABC bir ikizkenar üçgendir ve $|AD|$ farklı olan kenara yani tabana ait yüksekliktir. O halde, $|AD|$ aynı zamanda kenartortaydır. Yani, $|BD| = |DC|$ olur. Soruda $|AD| = |BD|$ verildiği için

$$|AD| = |DC|$$

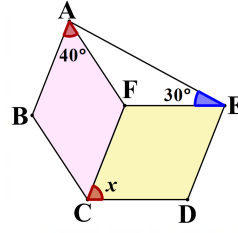
olur ve ADC ikizkenar olduğundan

$$m(\angle DCA) = 45^\circ$$

bulunur. ACE eşkenar ise bir açısı 60° olur. Böylece,

$$x = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ$$

elde edilir.

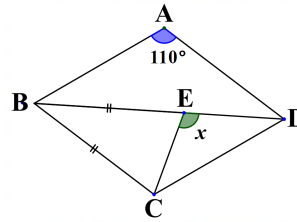
Dörtgenler**Alıştırma 12.30.**

Yandaki şekilde
 ABCF ve CDEF
 eşkenar dörtgenlerdir.
 $m(\angle BAF)=40^\circ$
 $m(\angle AEF)=30^\circ$
 $m(\angle FCD)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm : AFE ikizkenar üçgendir ve $\angle AFE$ tepe açısı $180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ$ olur. Diğer taraftan, ABCF eşkenar dörtgen ise ardışık iç açıları toplamı 180° olacağından, $m(\angle AFC) = 140^\circ$ olur. Böylece,

$$m(\angle CFE) = 360^\circ - 120^\circ - 140^\circ = 100^\circ$$

olacağından, $x = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ bulunur.

Alıştırma 12.31.

ABCD eşkenar dörtgen
 $|BD|$ köşegen,
 $|BC|=|BE|$
 $m(\angle BAD)=110^\circ$
 ise $m(\angle CED)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm : ABCD eşkenar dörtgeninin ardışık iç açıları toplamı 180° olacağından,

$$m(\angle ABC) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

bulunur. $|BD|$ köşegeni açıortay olacağından

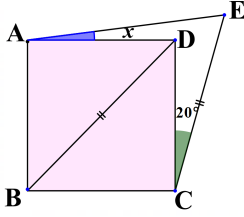
$m(\angle CBE) = 35^\circ$ ve dolayısıyla

$$m(\angle BEC) = (180^\circ - 35^\circ) \div 2 = 72,5^\circ$$

olur. Buna göre,

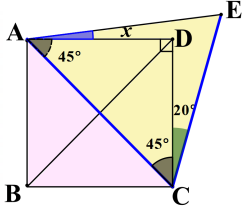
$$x = 180^\circ - 72,5^\circ = 107,5^\circ$$

olur.

Alıştırma 12.32.

ABCD bir kare
 $|BD|=|CE|$
 $m(\angle DCE)=20^\circ$
 ise $m(\angle EAD)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm :



$|BD|=|AC|=|CE|$ olduğundan
 ACE bir ikizkenar
 üçgendir. Karede
 köşegenler aynı
 zamanda açıortay
 olduğundan $m(\angle ACD)=45^\circ$
 olur.

Böylece, ACE ikizkenar üçgeninde

$$m(\angle ABC) = (180^\circ - 65^\circ) \div 2 = 57,5^\circ$$

olur ve

$$x = 57,5^\circ - 45^\circ = 12,5^\circ$$

bulunur.

Çokgenler**Alıştırma 12.33.**

Bir sekizgenin açıları toplamı kaç derecedir?



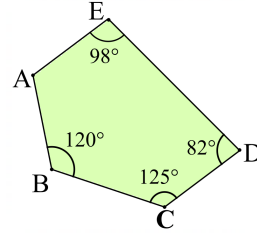
Çözüm : Sekizgenin sekiz kenarı olduğundan iç açıları toplamı

$$(8 - 2) \cdot 180^\circ = 6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ$$

bulunur.

Alıştırma 12.34.

Aşağıda verilen beşgenin $\angle A$ iç açısının ölçüsünü bulunuz.



Çözüm : Beşgenin iç açıları toplamı $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ olduğundan,

$$\begin{aligned} m(\angle A) &= 540^\circ - 82^\circ - 98^\circ - 120^\circ - 125^\circ \\ &= 115^\circ \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 12.35.

Bir otuzgenin iç açıları toplamı kaç tane dikdörtgenin iç açıları toplamına eşittir?

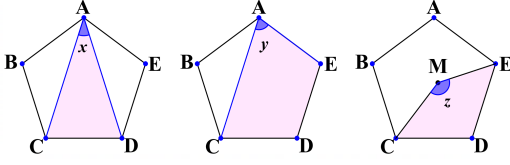
Çözüm : Otuzgenin iç açıları toplamı $28 \cdot 180^\circ$ ve dikdörtgenin iç açıları toplamı 360° olduğundan,

$$\frac{28 \cdot 180^\circ}{360^\circ} = \frac{28 \cdot \cancel{180^\circ}}{2 \cdot \cancel{180^\circ}} = 14$$

elde edilir.

Alıştırma 12.36.

Aşağıdaki düzgün beşgende x , y , z açılarının ölçülerini bulunuz.



Çözüm : Düzgün altıgenin bir iç açısının 108° ve bir merkez açısının 72° olduğunu kullanacağız.

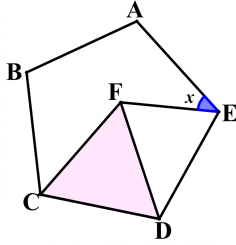
1. **Şekil :** ABC ve ADE ikizkenar üçgenlerdir ve taban açıları

$$(180^\circ - 108^\circ) \div 2 = 36^\circ$$

olduğundan $x = 108^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 36^\circ$ olur. ($[AC]$ ve $[AD]$ beşgenin iç açısını üç eş parçaya ayırır.)

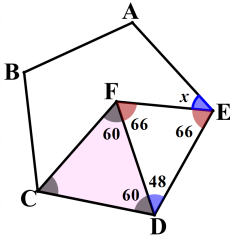
2. **Şekil :** $108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ olur.

3. **Şekil :** 2 tane merkez açı olduğundan $2 \cdot 72^\circ = 144^\circ$ olur.

Alıştırma 12.37.

Yandaki şekilde
ABCDE bir düzgün
beşgen,
CDF ise bir
eşkenar üçgendir.
 $m(\angle AEF)=x$ kaç
derecedir?

Çözüm :



$|CD|=|ED|$ ve $|CD|=|FD|$
olduğundan DEF üçgeni
ikizkenardır. Düzgün altıgende
 $m(\angle EDC)=108^\circ$ olduğundan
 $m(\angle CDF)=60^\circ$ ise $m(\angle FDE)=48^\circ$
olur. Bu durumda $\angle FED$ taban
açısı $(180^\circ-48^\circ)/2=66^\circ$ bulunur.
Böylece, $x = 108^\circ - 66^\circ = 42^\circ$ olur.

Problemler (Açılar)

Prob. 12.1 Tümler olan iki basamaklı iki açıdan biri **asal sayı**, diğeri ise **bileşik (asal olmayan) sayıdır**. Bu açılar arasındaki fark kaç farklı sayı olabilir?

Çözüm : Tümler olan açılar toplamı 90° olmalıdır. Buna göre, bir tanesini iki basamaklı bir asal sayı seçip diğerini bulur ve onun da asal olup olmadığını kontrol edebiliriz. Açılardan biri x , diğeri de y olsun. $x = 11$ 'den itibaren $x = 43$ 'e kadar kontrol edersek sadece iki durumun koşulu sağladığı görülür.

$$x = 13^\circ \Rightarrow y = 90 - 13 = 77 \text{ (asal değil)}$$

$$x = 41^\circ \Rightarrow y = 90 - 41 = 49 \text{ (asal değil)}$$

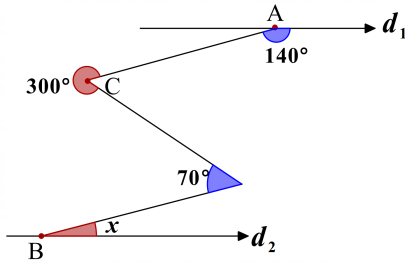
$x = 43$ 'den sonrasını kontrol etmeye gerek yok, örneğin $x = 47$ ise $y = 43$ olur. Böylece, istediğimiz şekilde 2 durum var. Bunların arasındaki fark

$$x = 13^\circ, y = 77^\circ \Rightarrow y - x = 77 - 13 = 64,$$

$$x = 41^\circ, y = 49^\circ \Rightarrow y - x = 49 - 41 = 8,$$

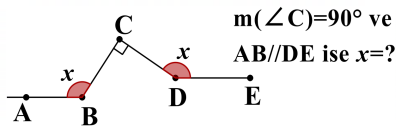
olabilir.

Prob. 12.2 $d_1 // d_2$ ise x açısı kaç derecedir?



Çözüm : Sol tarafa bakan dar açılar toplamı $40 + 70 = 110$, sağ tarafa bakan dış açılar toplamı $60 + x$ olduğundan, bu iki ifadenin eşitliğinden $x = 50^\circ$ elde edilir.

Prob. 12.3

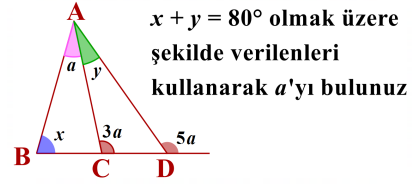


Çözüm : C'den AB ve DE'ye paralel bir doğru çizerseniz,

$$90 + (180 - x) + (180 - x) = 180$$

eşitliğinden $x = 135^\circ$ bulunur.

Prob. 12.4



Çözüm : $y = 5a - 3a = 2a$ ve $x = 3a - a = 2a$ olduğundan $x + y = 4a = 80$ ise $a = 20^\circ$ olur.

Prob. 12.5 Dar açılı bir üçgenin açılarından biri 80, diğer ikisi ise doğal sayıdır. Buna göre, diğer açıları arasındaki fark kaç değer olabilir?

Çözüm : B açısının durumuna göre, üçgenin iç açıları toplamının 180° olmasını kullanarak C açısını belirleyerek elde edilebilecek farkları bulalım. B açısı dar açı olduğundan en fazla 89° olabilir. Buna göre,

$$\angle B = 89^\circ \Rightarrow \angle C = 11^\circ \Rightarrow \text{FARK} = 78,$$

$$\angle B = 88^\circ \Rightarrow \angle C = 12^\circ \Rightarrow \text{FARK} = 76,$$

$$\angle B = 86^\circ \Rightarrow \angle C = 14^\circ \Rightarrow \text{FARK} = 74,$$

...

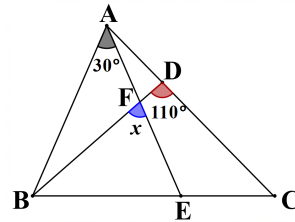
$$\angle B = 51^\circ \Rightarrow \angle C = 49^\circ \Rightarrow \text{FARK} = 2,$$

$$\angle B = 50^\circ \Rightarrow \angle C = 50^\circ \Rightarrow \text{FARK} = 0,$$

olur. Görüldüğü gibi, fark 0, 2, 4, ..., 76, 78 çift sayıları

olur. Bunların sayısı da: $\frac{78 - 0}{2} + 1 = 40$ elde edilir.

Prob. 12.6



ABC üçgen

$|AB|=|AE|$ ve $|BD|=|DC|$

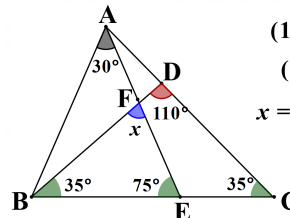
$m(\angle BAE)=30^\circ$

$m(\angle BDC)=110^\circ$

ise $m(\angle BFE)=x$

kaç derecedir?

Çözüm :

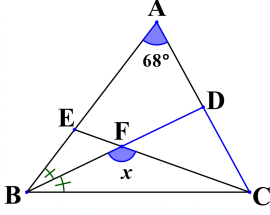


$$(180^\circ - 110^\circ) \div 2 = 35^\circ$$

$$(180^\circ - 30^\circ) \div 2 = 75^\circ$$

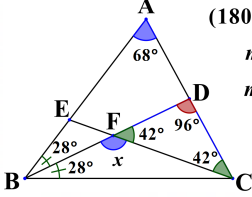
$$x = 180^\circ - 35^\circ - 75^\circ = 70^\circ$$

Prob. 12.7



ABC ikizkenar üçgen
 $|AC|=|AB|$ ve $|FD|=|DC|$
 $m(\angle BAC)=68^\circ$
 $m(\angle ABD)=m(\angle CBD)$
 ise $m(\angle BFC)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm :



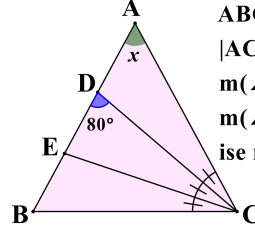
$$(180^\circ - 68^\circ) \div 2 = 56^\circ$$

$$m(\angle BDC) = 28^\circ + 68^\circ = 96^\circ$$

$$m(\angle DFC) = (180^\circ - 96^\circ) \div 2 = 42^\circ$$

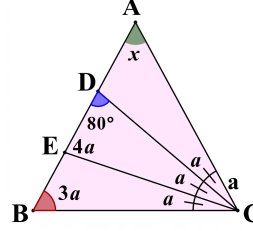
$$x = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$$

Prob. 12.9



ABC ikizkenar üçgen
 $|AC|=|AB|$
 $m(\angle BDC)=80^\circ$
 $m(\angle ACD)=m(\angle DCE)=m(\angle ECB)$
 ise $m(\angle BAC)=x$ kaç derecedir?

Çözüm :



$m(\angle ACD)=a$ olsun.
 $|AC|=|AB|$ ise
 $m(\angle ABC)=3a$
 $m(\angle DEC)=4a$

şekilden takip edilirse, EDC üçgeninden

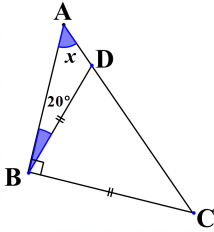
$$4a + a + 80^\circ = 180^\circ$$

ise $a = 20^\circ$ ve

$$80^\circ = x + 20^\circ$$

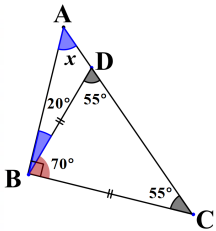
eşitliğinden $x = 60^\circ$ elde edilir.

Prob. 12.8



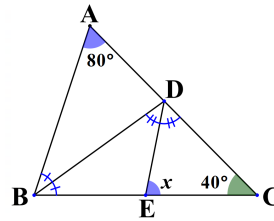
ABC dik üçgen
 $|BD|=|BC|$
 $m(\angle ABC)=90^\circ$
 $m(\angle ABD)=20^\circ$
 ise $m(\angle BAD)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm :



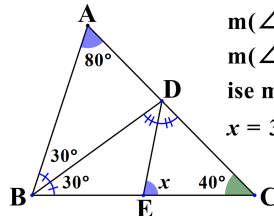
$m(\angle ABC) = 90^\circ$ ve $m(\angle ABD) = 20^\circ$
 ise $m(\angle DBC) = 70^\circ$ olur. BDC
 üçgeni ikizkenar olduğundan bir
 taban açısı da $(180^\circ - 70^\circ) / 2 = 55^\circ$
 olacaktır. Böylece, $\angle BDC$ dış
 açısının ölçüsü x ile 20° iç açılarının
 toplamı olduğundan $x = 55^\circ - 20^\circ = 35^\circ$
 bulunur.

Prob. 12.10



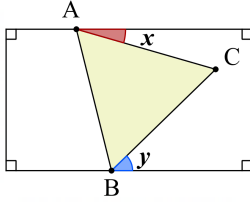
ABC bir üçgen
 $m(\angle ACB)=40^\circ$
 $m(\angle BAC)=80^\circ$
 $m(\angle ABD)=m(\angle DBC)$
 $m(\angle BDE)=m(\angle EDC)$
 ise $m(\angle DEC)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm :

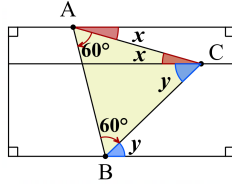


$m(\angle CBA)=180^\circ - 80^\circ - 40^\circ = 60^\circ$
 $m(\angle BDC)=180^\circ - 30^\circ - 40^\circ = 110^\circ$
 ise $m(\angle BDE)=110^\circ / 2 = 55^\circ$
 $x = 30^\circ + 55^\circ = 85^\circ$

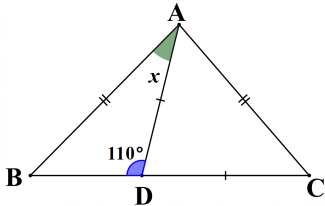
Prob. 12.11 Aşağıda bir dikdörtgenin içine şekildeki gibi bir eşkenar üçgen çizilmiştir. Buna göre, $x + y$ toplamını bulunuz.



Çözüm : C köşesinden dikdörtgenin tabanına paralel bir doğru çizelim. Bu durumda, C açısı iki parçaya ayrılır ki, üç ters açının eşitliğinden dolayı bu parçalardan biri x , diğeri de y olacaktır. ABC üçgeni eşkenar olduğundan C açısı 60° dir. Yani, $x + y$ toplamı 60° olur.

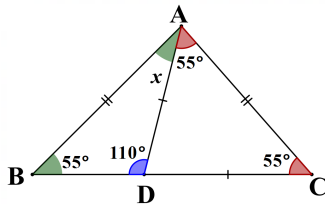


Prob. 12.12



ABC ikizkenar üçgen
 $|AC|=|AB|$ ve $|CD|=|AD|$
 $m(\angle ADB)=110^\circ$
 ise $m(\angle BAD)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm :



ADC üçgeni ikizkenar olduğundan
 ve dış açısı 110° olduğundan taban açıları
 55° olur. O halde,

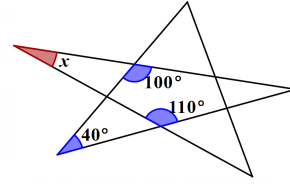
$m(\angle ABD) = m(\angle ACD) = 55^\circ$
 olduğundan

$$x = 180 - 55 - 110 = 15$$

olur.

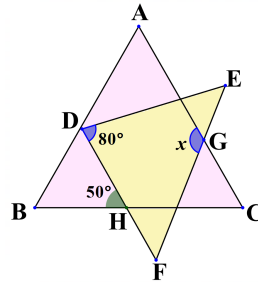
Prob. 12.13 AMC8-1999

Aşağıdaki yıldızdaki x açısı kaç derecedir?



Çözüm : 100° açısını ve 40° açısını içeren üçgenin üçüncü açısı $180^\circ - 100^\circ - 40^\circ = 40^\circ$ olur. Böylece, x açısı, bulunan 40° açısı ve verilen 110° açısından oluşan üçgenin üçüncü açısıdır. Buradan, $x = 180^\circ - 110^\circ - 40^\circ = 30^\circ$ elde edilir.

Prob. 12.14



ABC eşkenar üçgen
 DEF ikizkenar üçgen
 $|DE|=|DF|$
 $m(\angle EDF)=80^\circ$
 $m(\angle DHB)=50^\circ$
 ise $m(\angle AGF)=x$
 kaç derecedir?

Çözüm : DEF ikizkenar üçgeninde taban açılarının ölçüsü
 $(180^\circ - 80^\circ) \div 2 = 50^\circ$

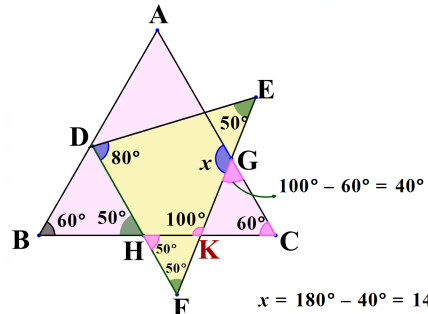
olur. ABC eşkenar üçgen olduğundan iç açıları 60° 'dir.
 $m(\angle KHF) = 50^\circ$ ve $m(\angle KFH) = 50^\circ$ olduğundan, HKF üçgeninde HKG dış açısının ölçüsü

$$m(\angle HKG) = 50^\circ + 50^\circ = 100^\circ$$

bulunur. $m(\angle KCG) = 60^\circ$ olduğundan KGC üçgenindeki AGK dış açısının ölçüsü

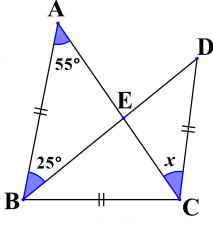
$$x = 80^\circ + 60^\circ = 140^\circ$$

olur.



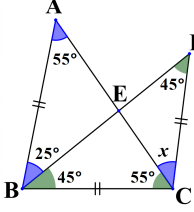
$$x = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

Prob. 12.15



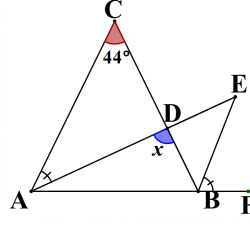
ABC ve BCD
üçgenleri için
 $|AB|=|BC|=|CD|$
 $m(\angle BAC)=55^\circ$
 $m(\angle ABD)=25^\circ$
ise $m(\angle ACD)=x$
kaç derecedir?

Çözüm :



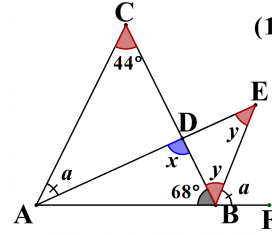
ABC üçgeni ikizkenar üçgen
olduğundan $m(\angle BCA)$ açısı
da 55° olur. O halde,
 $m(\angle CBD) = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ + 25^\circ)$
 $= 45^\circ$
bulunur. BCD üçgeni de ikizkenar
olduğundan $x=90^\circ-55^\circ=35^\circ$ bulunur.

Prob. 12.17



ABC ikizkenar üçgen
 $|AC|=|BC|$ ve $|BD|=|ED|$
 $m(\angle ACB)=44^\circ$
 $m(\angle CAD)=m(\angle EBF)$
ise $m(\angle ADB)=x$
kaç derecedir?

Çözüm : $m(\angle CAD) = m(\angle EBF) = a$ ve
 $m(\angle DEB) = m(\angle DBE) = y$ olsun. x açısı ADC
ve BDE üçgenleri için dış açı olması ve ABC ikizke-
nar olduğu için $m(\angle CBD) = 68^\circ$ olması da göz önüne
alınırsa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.



$$(180^\circ - 44^\circ) \div 2 = 68^\circ$$

$$a + y + 68^\circ = 180^\circ$$

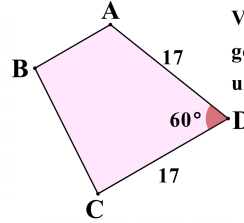
$$a + 44^\circ = x = 2y$$

Buna göre, $a + y = 112$ ve $a = 2y - 44$ olduğu kul-
lanılarak,

$$2y - 44 + y = 112 \Rightarrow y = 52$$

elde edilir. Buradan, $x = 2y$ olduğu kullanılarak $y = 104^\circ$
olur.

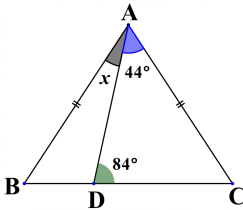
Prob. 12.18 AMC8-2005



Verilenlere
göre [AC] köşegeninin
uzunluğunu bulunuz.

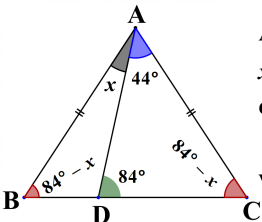
Çözüm : ACD üçgeni ikizkenardır, fakat tepe açısı 60°
olduğundan diğer açılar da 60° olur ki bu eşkenar olduğu
anlamına gelir. O halde $|AC| = 17$ olur.

Prob. 12.16

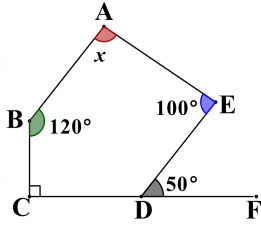


ABC ikizkenar üçgen
 $|AB|=|AC|$
 $m(\angle DAC)=44^\circ$
 $m(\angle ADC)=84^\circ$
ise $m(\angle BAD)=x$
kaç derecedir?

Çözüm :

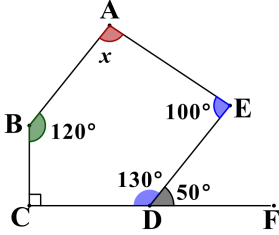


ABC üçgeninde
 $x + 44^\circ + 2(84^\circ - x) = 180^\circ$
eşitliğinden,
 $212^\circ - x = 180^\circ$
ve $x=32^\circ$ olur.

Prob. 12.19

Yandaki şekilde
CDF doğrusaldır.
Verilenlere göre
ise x kaç derecedir?

Çözüm :



Beşgenin iç açıları toplamı

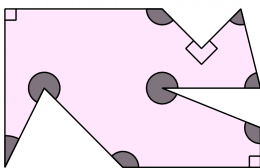
540° olduğundan

$$x = 540^\circ - 120^\circ - 100^\circ - 130^\circ - 90^\circ$$

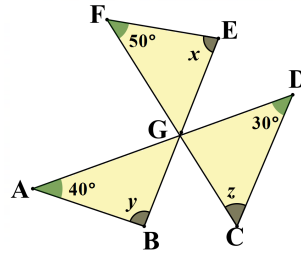
$$= 100^\circ$$

bulunur.

Prob. 12.20 Aşağıdaki çokgenin iç açılarının toplamını bulunuz.

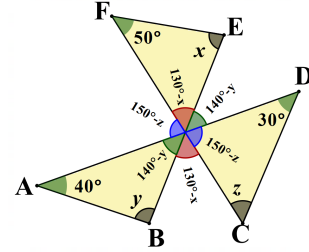


Çözüm : Bu bir 11-gen olduğundan $(11 - 2) \cdot 180^\circ = 1620^\circ$ olur.

Prob. 12.21

[AD], [EB] ve [CF]
doğru parçalarının
kesişim noktası G
olmak üzere,
verilen açılar
yardımıyla
 $x+y+z$ toplamını
bulunuz.

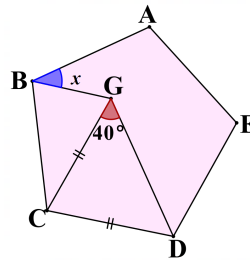
Çözüm : G köşesindeki ters açılar göz önüne alınarak



$$2(130^\circ - x) + 2(140^\circ - y) + 2(150^\circ - z) = 360^\circ,$$

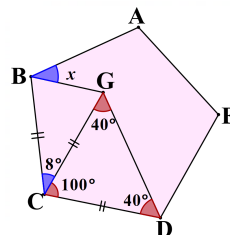
$$840^\circ - 2(x + y + z) = 360^\circ$$

$$x + y + z = (840^\circ - 360^\circ) \div 2 = 240^\circ \text{ olur.}$$

Prob. 12.22

Yandaki şekilde
ABCDE bir düzgün
beşgen,
 $|CG|=|CD|$
 $m(\angle ABG)=x$ kaç
derecedir?

Çözüm :



Düzgün beşgenin bir iç

açısı 108° olduğundan,

$m(\angle BCG)=8^\circ$ olur.

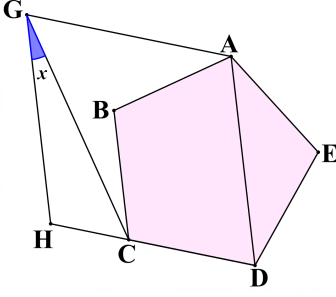
$|CG|=|BC|=|CD|$

olduğundan,

$m(\angle CBG)=(180^\circ-8^\circ)/2=86^\circ$

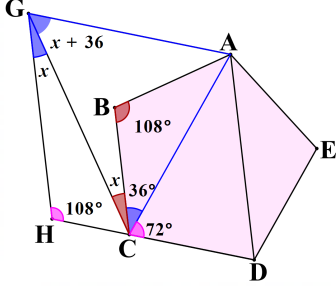
ve $x=108^\circ-86^\circ=22^\circ$ olur.

Prob. 12.23



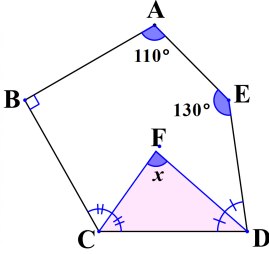
Yandaki şekilde
ABCDE bir düzgün
beşgen,
ADHG ise eşkenar
dörtgendir.
 $m(\angle HGC) = x$
kaç derecedir?

Çözüm :



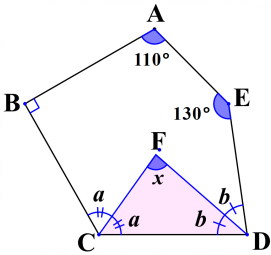
GAC ikizkenardır.
GH//AD//BC
olduğundan
 $m(\angle GHC) = 108^\circ$
 $m(\angle GCB) = x$ olur.
 $x + x + 36 = 72^\circ$
eşitliğinden $x = 18^\circ$
olur.

Prob. 12.24



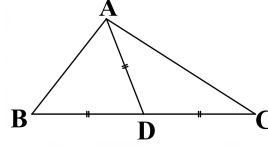
ABCDE beşgen
 $m(\angle ABC) = 90^\circ$
 $m(\angle BAE) = 110^\circ$
 $m(\angle AED) = 130^\circ$
 $m(\angle BCF) = m(\angle DCF)$
 $m(\angle EDF) = m(\angle CDF)$
ise $m(\angle CFD) = x$
kaç derecedir?

Çözüm :



Beşgenin iç açıları
toplamı 540° olduğundan,
 $2a + 2b = 210^\circ$
ve $a + b = 105^\circ$
olur. O halde,
 $x = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$
bulunur.

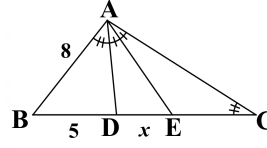
Prob. 12.25



ABC üçgeninde
 $|BD| = |DC| = |AD|$
olduğuna göre
 $m(\angle BAC)$ kaç
derecedir?

Çözüm : $m(B) = x, m(C) = y$ denilirse $m(BAC) = x + y = 90^\circ$ olur.

Prob. 12.26



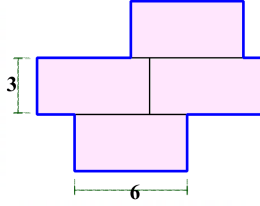
ABC üçgeninde
 $|AB| = 8, |BD| = 5$ ve
 $m(\angle BAD) = m(\angle ACB),$
 $m(\angle DAE) = m(\angle EAC)$
olduğuna göre, $|DE| = x$
uzunluğu kaçtır?

Çözüm : $m(\angle C) = a$ ve $m(\angle CAE) = b$ denilirse
 $m(\angle AEB) = a + b = m(\angle BAE)$

olur ve ABE üçgeni ikizkenar olduğu görülür. $x = 3$ elde edilir.

Geometri (Çevre ve Alan Hesaplamaları)

Alıştırma 13.1. Aşağıda dört eşit dikdörtgen ile oluşturulmuş şeklin dış çevresinin toplamı kaçtır?



Çözüm : Dış çevre 6 tane kısa, 4 tane uzun kenardan oluştuğundan

$$6 \cdot 4 + 4 \cdot 6 = 48$$

olur.

Çemberin Çevresi

Alıştırma 13.2. AMC8-2000

$\frac{5}{3}$ ile 2π arasında kaç doğal sayı bulunur?

Çözüm : $\frac{5}{3} = 1, \bar{6} \simeq 1,7$ ve $2\pi \simeq 2 \cdot 3,14 \simeq 6,28$ olduğundan, bu iki sayı arasında bulunan doğal sayılar

$$2, 3, 4, 5, 6$$

olmak üzere 5 tanedir.

Alıştırma 13.3.

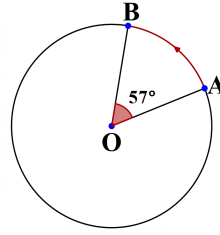
Bir çemberin içine aynı merkezli daha küçük bir çember çiziliyor. Küçük çemberin yarıçapı büyük çemberin yarıçapının $\frac{2}{3}$ 'ü ise büyük çemberin çevresi küçük çemberin çevresinin kaç katıdır?

Çözüm : Büyük çemberin yarıçapına 3 denilirse küçük çemberin yarıçapı 2 olur. Buna göre çevre oranları :

$$\frac{2\pi r_B}{2\pi r_K} = \frac{2\pi 3}{2\pi 2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

olur.

Alıştırma 13.4.



Yandaki şekilde O merkezli çember verilmiştir.

$$m(\widehat{AB}) = (3x + 24)^\circ$$

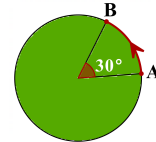
ise $x = ?$

Çözüm : $3x + 24^\circ = 57^\circ \Rightarrow 3x = 57^\circ - 24^\circ = 33^\circ$ eşitliğinden $x = 11$ olur.

Çember Parçasının Uzunluğu

Alıştırma 13.5.

Alp yarıçapı 108 metre olan çember şeklindeki bir parkın etrafında koşuyor. 5 kez tam tur attıktan sonra son turda 30° 'lik bir çember yayı kadar daha koşuyor. Toplam kaç π metre koşmuştur.



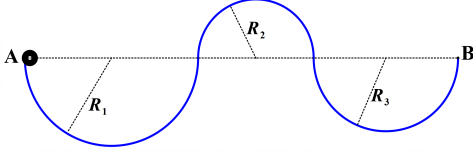
Çözüm : 5 turda $5 \cdot (2\pi 108) = 1080\pi$ metre koşar.

$$\frac{30}{360} = \frac{1}{12}$$

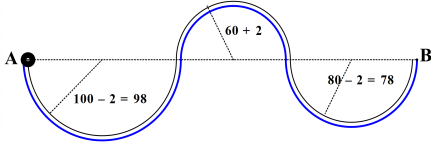
olduğundan $2\pi 108 = 216\pi$ 'nin $\frac{1}{12}$ 'de biri kadar yani $\frac{216\pi}{12} = 18\pi$ daha koşar. Toplam : $1080\pi + 18\pi = 1098\pi$ metre koşmuştur.

Alıştırma 13.6. AMC8-2013 ♣

Çapı 4 inç olan bir top A noktasından başlayarak gösterilen yol boyunca yuvarlanmaya başlıyor. Pist, yarıçapları sırasıyla $R_1 = 100$ inç, $R_2 = 60$ inç ve $R_3 = 80$ inç olan 3 yarım daire yayından oluşur. Top her zaman pistle temas halinde kalır ve kaymaz. **Topun merkezinin** A'dan B'ye doğru parkur boyunca kat ettiği mesafe nedir?



Çözüm : Topun yarıçapı 2 inç olduğundan, topun merkezinin aldığı yolu bulmak için, topun merkezinin çizdiği çember yaylarının uzunluğunu bulmalıyız. Topun merkezinin çizdiği yarım çemberlerin yarıçapları sırasıyla 98, 62 ve 78 olacaktır.



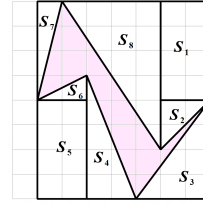
Topun aldığı toplam yol $\pi (98 + 78 + 62) = 238\pi$ bulunur.

Alan Hesaplamaları**Alıştırma 13.7. UAMO-2023**

Birim kareler üzerine çizilmiş aşağıdaki taralı şeklin alanı kaç br^2 dir?



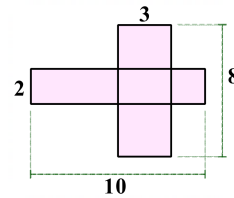
Çözüm :



Taralı alan : $56 - 8 - 2 - 6 - 5 - 8 - 1 - 2 - 12 = 12$.

Alıştırma 13.8. AJHSME-1988

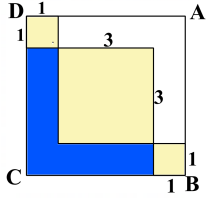
Aşağıda iki tane dikdörtgenle oluşturulmuş bölgenin alanını bulunuz.



Çözüm : 2×10 ölçüsündeki dikdörtgenin alanı 20, 3×8 ölçüsündeki dikdörtgenin alanı 24'tür. Bu iki alanı toplarsak, istenen alanı $2 \times 3 = 6$ fazlası elde edilir. $20 + 24 - 6 = 38$ elde edilir

Aıştırma 13.9. AMC8-2000

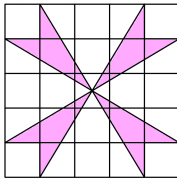
$ABCD$ bir karedir. Bu karenin içine kenar uzunlukları şekilde verilmiş üç küçük kare çiziliyor. Buna göre, koyu olarak taranan kısmın alanını hesaplayınız.



Çözüm : Büyük karenin bir kenarının uzunluğu $1 + 3 + 1 = 5$ olduğundan, alanı $5^2 = 25$ 'dir. Küçük karelerin alanları da sırasıyla $1, 9, 1$ olduğundan, 2 tane L şeklindeki özdeş bölgelerin alanları toplamı $25 - (1 + 9 + 1) = 14$ ve koyu olarak taranmış bir tane L şeklindeki bölgenin alanı $14 \div 2 = 7$ olur.

Aıştırma 13.10. AMC8-2007

Aşağıdaki birim karelerden oluşmuş 5×5 tablonun içine çizilmiş koyu fırılдаğın alanını bulunuz.



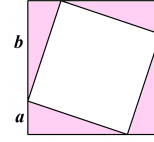
Çözüm : 5×5 tablonun alanı 25 'tir. Koyu bölgenin alanını bulmak için, koyu bölgenin etrafındaki beyaz kısımların alanını bulup 25 'ten çıkarabiliriz. Her köşede 1 tane olmak üzere 4 birim kare vardır. Koyu fırılдаğın aralarındaki 4 tane boşluk ise birer üçgen olduğundan üçgenin alan formülü kullanılırsa,

$$4 \cdot \frac{\text{taban} \times \text{yükseklik}}{2} = 4 \cdot \frac{3 \times 2,5}{2} = 15$$

bulunur. Böylece, koyu fırılдаğın alanı $25 - 4 - 15 = 6$ bulunur.

Aıştırma 13.11. AMC8-2012

Alanı 5 olan bir karenin içine alanı 4 olan bir kare, küçük karenin köşeleri büyük karenin kenarların değecek ve kenarların uzunlukları a ve b olarak iki parçaya ayıracak şekilde çiziliyor. $a \cdot b$ değeri kaçtır?



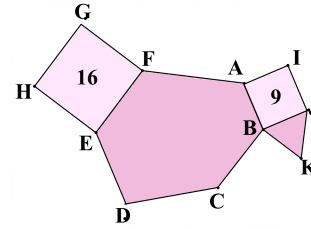
Çözüm : Karelerin oluşturduğu dört eş üçgenin toplam alanı $5 - 4 = 1$ olduğundan, her bir üçgenin alanı $\frac{1}{4}$ bulunur. Bu üçgenlerin dik kenarlarının uzunlukları a ve b olduğundan, alan formülünden

$$\text{Alan} = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1}{4}$$

yazılabilir. Buradan $a \cdot b = \frac{1}{2}$ elde edilir.

Aıştırma 13.12. ♣

Aşağıdaki şekilde $ABCDEF$ bir eş açılı altıgen, BJK bir eşkenar üçgen, $ABJI$ ve $FEHG$ alanları sırasıyla 9 ve 16 olan karelerdir. $|FE| = |BC|$ olduğuna göre, KBC üçgeninin alanı kaçtır?



Çözüm : $ABJI$ ve $FEHG$ alanları sırasıyla 9 ve 16 olan karelerse, bir kenarlarının uzunlukları sırasıyla 3 ve 4 olur. $|FE| = |BC| = 4$ ve $|BK| = 3$ olur. $ABCDEF$ bir eş açılı altıgen olduğundan bir açısı

$$\frac{4 \cdot 180^\circ}{6} = 120^\circ$$

olur. Buradan, $ABJI$ kare, BJK eşkenar üçgen ve $\angle ABC = 120^\circ$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\angle CBK = 360^\circ - 120^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$

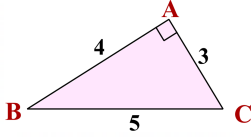
elde edilir. Yani, BCK bir dik üçgendir. O halde alanı dik kenarlarının çarpımının yarısıdır ve

$$A(BCK) = \frac{|BC| |BK|}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

elde edilir.

Alıştırma 13.13. AMC8-2017

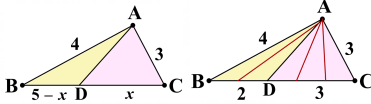
Bir ABC dik üçgeninin $[BC]$ kenarı üzerinde ACD ve ABD üçgenlerinin çevreleri eşit olacak şekilde bir D noktası alınıyor. ABD üçgeninin alanı kaçtır?



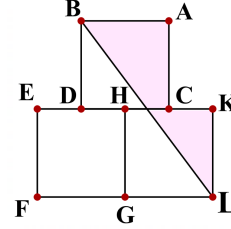
Çözüm : $|DC| = x$ denilirse $|BD| = 5 - x$ olur. $|AD| = y$ denilirse çevrelerinin eşitliğinden

$$4 + 5 - x + y = 3 + x + y \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

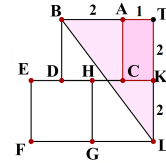
olur. O halde, $|BD| = 2$ olur. ABC üçgeninin alanı ise $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ olduğundan, tabandaki her birim için alan $\frac{6}{5}$ olduğundan 2 birim parçasının alanı $\frac{12}{5}$ bulunur.

**Alıştırma 13.14. AMC8-2013**

$ABDC$, $EFGH$ ve $GHLK$ karelerinin alanı eşittir. C ve D noktaları sırasıyla $[KH]$ ve $[HE]$ kenarlarının orta noktalarıdır. Taralı $ABLK$ beşgenin alanının, üç karenin alanlarının toplamına oranı kaçtır?



Çözüm : Oran bulacağımız için karelerin bir kenarını 2 br seçerek devam edebiliriz.



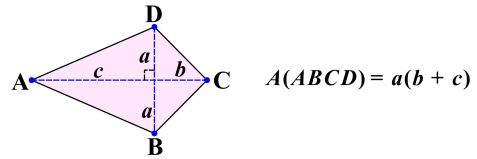
Ayrıca, $ACKT$ dikdörtgenini çizerek TBL üçgenini oluşturalım. TBL üçgeninin alanı $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ olduğundan, istenen taralı alan $6 - 2 = 4$ olur. Tüm karelerin alanı da $3 \cdot 2^2 = 12$ olduğundan, istenen oran

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Eşkenar Dörtgenin Alanı**Alıştırma 13.15.**

Deltoidin alanının köşegen uzunlukları çarpımının yarısı olduğunu kanıtlayınız.



Çözüm : $[AC]$ köşegeni deltoidi iki eşit kısma ayırır. Birinci kısmın alanı

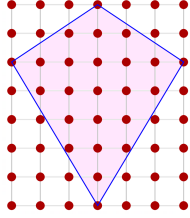
$$\frac{a \cdot c}{2} + \frac{a \cdot b}{2} = \frac{a \cdot c + a \cdot b}{2} = \frac{a(b + c)}{2}$$

olur. O halde, tamamının alanı $a(b + c)$ olur.

Alıştırma 13.16. AMC8-2001

Ege okulunun yıllık Uçurtma Olimpiyatlarını tanıtmak için küçük bir uçurtma ve ilan tahtasında sergilemek için büyük bir uçurtma yapıyor. İlan tahtasındaki uçurtma aşağıdaki gibi görünüyor. Ege küçük uçurtması için uçurtmayı bir cm'lik bir ızgaraya çiziyor. Büyük uçurtma için tüm ızgaranın hem yüksekliğini hem de genişliğini üçe katlıyor.

- a) Küçük uçurtmanın alanı kaç cm karedir?
b) Büyük uçurtmanın alanı kaç cm karedir?



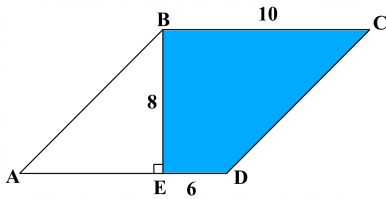
Çözüm : a) Köşegen uzunluklarının çarpımının yarısı alanı verir. Buradan, $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ bulunur.

Not : Buradaki alanı Pick teoremi yardımıyla veya taralı kısmın dışında kalan alanları bulup dikdörtgenin alanından çıkararak elde edebilirsiniz.

b) Büyük uçurtmanın köşegen uzunlukları 3 kat olacağından 18 ve 21 olur. Alanı da : $\frac{18 \cdot 21}{2} = 189$ bulunur.

Yamuğun Alanı**Alıştırma 13.17. AJHSME-1989**

Şekildeki paralelkenarın içindeki taralı bölgenin alanını bulunuz.



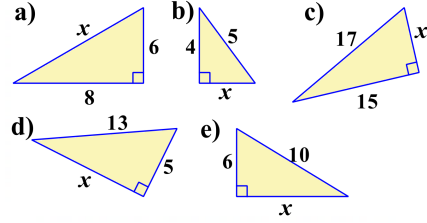
Çözüm : BEDC bir yamuktur ve yamuğun alanı yükseklik ile orta taban uzunluğunun çarpımına eşittir. Buna göre,

$$8 \cdot \frac{10 + 6}{2} = 8 \cdot 8 = 64$$

elde edilir.

Pisagor Teoremi**Alıştırma 13.18.**

Aşağıdaki üçgenlerin verilmeyen kenar uzunluklarını bulunuz.



Çözüm : a) $x^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow x = 10$,

b) $x^2 + 4^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow x = 3$,

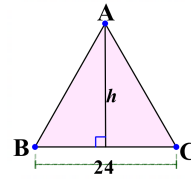
c) $x^2 + 15^2 = 17^2 \Rightarrow x^2 = 289 - 225 = 64 \Rightarrow x = 8$,

d) $x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow x = 12$,

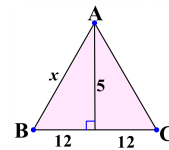
e) $6^2 + x^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow x = 8$.

Alıştırma 13.19. AMC8-2007

Bir ABC ikizkenar üçgeninin taban uzunluğu 24, alanı ise 60'tır. Buna göre, eşit olan kenarlardan birinin uzunluğu kaçtır?



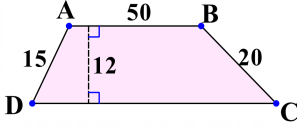
Çözüm : Üçgenin alanı 60 ise, $\frac{24 \cdot h}{2} = 60$ eşitliğinden $h = 5$ bulunur. İkizkenar üçgende yükseklik tabanı iki eşit kısma ayırır.



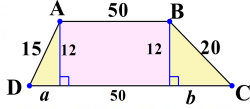
Pisagor teoreminden $x^2 = 5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ eşitliğinden $x = 13$ bulunur.

Alıştırma 13.20. AMC8-2011

Bir ABCD yamuğunda $|AD| = 15$, $|AB| = 50$, $|BC| = 20$ 'dir. Yamuğun yüksekliği 12 ise yamuğun alanını bulunuz.



Çözüm : A ve B'den [CD]'ye yükseklik çizilirse, yamuk iki dik üçgene ve bir dikdörtgene ayrılır.



a ve b değerlerini Pisagor teoremi ile bulalım.

$$a^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow a = 9,$$

$$b^2 = 20^2 - 12^2 = 256 \Rightarrow b = 16$$

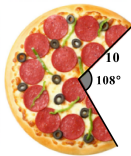
ve $|DC| = 50 + 9 + 16 = 75$ olur. Böylece yamuğun alanı

$$12 \cdot \frac{50 + 75}{2} = 6 \cdot 125 = 750$$

bulunur.

Dairenin Alanı**Alıştırma 13.21.**

Keloğlan yarıçapı 10 cm olan bir pizzanın 108 derecelik kısmını yemiştir. Keloğlanın yediği pizza diliminin alanını bulunuz.



Çözüm : Pizzanın yarıçapı 10 cm olduğundan, dilimin alanı

$$\frac{108}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{3 \cdot 36 \cdot 10}{36} \cdot \pi = 30\pi$$

elde edilir.

Alıştırma 13.22. AMC8-2010

Çapı 12 inç olan bir pizzanın çapına, daire şeklindeki 6 sucuk parçası sığmaktadır. Pizzanın tamamına aynı büyüklükte 24 sucuk yerleştirilirse pizzanın kaçta kaç sucuk kaplanır?



Çözüm : Çapına 6 sucuk sığıyorsa bir sucuğun çapı $12 \div 6 = 2$ inç olur. O halde, 24 sucuk parçasının toplam alanı, yarıçapları 1 olduğundan

$$24 \cdot \pi 1^2 = 24\pi$$

bulunur. Pizzanın alanı $\pi 6^2 = 36\pi$ olduğundan,

$$\frac{24\pi}{36\pi} = \frac{2}{3}$$

elde edilir. Pizzanın üçte ikisi sucuktur.

Alıştırma 13.23. AMC8-2006

X çemberinin yarıçapı π 'dir. Y çemberinin çevresi 8π 'dir. S çemberinin alanı 9π 'dir. Bu çemberleri küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

Çözüm : Çemberlerin yarıçaplarını r_x , r_y ve r_z ile gösterelim. $r_x = \pi$ verilmiş. Y çemberinin çevresi 8π ise, Çevre = $2\pi r$ olduğu kullanılarak, Y çemberinin yarıçapı

$$2\pi r_y = 8\pi \Rightarrow r_y = 4$$

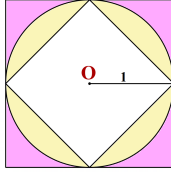
bulunur. S çemberinin alanı 9π ise, Alan = πr^2 olduğu kullanılarak S çemberinin yarıçapı da

$$9\pi = \pi r_z^2 \Rightarrow r_z = 3$$

bulunur. O halde, çemberler küçükten büyüğe doğru S, X, Y şeklinde sıralanır.

Aıştırma 13.24. AMC8-2011

1 yarıçaplı bir daire şekilde gösterildiği gibi bir karenin içine çizilmiş ve başka bir karenin etrafında çizilmiştir. Dairenin içindeki taralı alanın, iki kare arasında kalan alana oranını bulunuz.



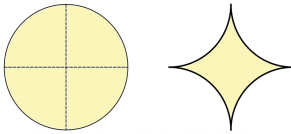
Çözüm : Küçük karenin alanı, köşegenlerinin çarpımının yarısıdır. Küçük karenin köşegen uzunlukları çemberin çapı olduğundan 2 br uzunluğundadır. Buna göre, küçük karenin alanı : $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$ elde edilir. Diğer yandan, küçük karenin köşegen uzunluğu büyük kenarın bir kenar uzunluğuna eşittir. Buna göre, büyük karenin alanı $2 \cdot 2 = 4$ olur. Böylece, iki kare arasında alanın farkı $4 - 2 = 2$ olur. Dairenin alanı $\pi \cdot 1^2 = \pi$ olduğundan, dairenin içinde kalan $\pi - 2$ olur. Yani, istenen oran

$$\frac{\pi - 2}{2}$$

elde edilir.

Aıştırma 13.25. AMC8-2012

Yarıçapı 2 olan bir daire dört eş yaya bölünmüştür. Gösterilen yıldız figürünü oluşturmak için dört yay birleştirilir. Yıldız figürünün alanının orijinal dairenin alanına oranı nedir?



Çözüm :



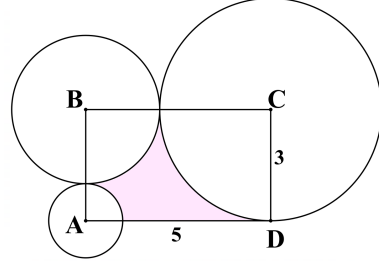
Yıldız figürünün etrafına bir kare çizelim. Bu karenin kenar uzunluğu, dairenin çapına eşit olduğundan 4 olur. Kare çizilince, yıldız figürünün etrafında 4 tane çeyrek daire oluşur. Bu dördünün toplamı da 1 daire olur. Böylece, karenin alanından dairenin alanını çıkarırsak yıldız figürünün alanı bulunmuş olur. Yani, $16 - \pi 2^2 = 16 - 4\pi$ elde edilir. Böylece, yıldız figürünün dairenin alanına oranı

$$\frac{16 - 4\pi}{4\pi} = \frac{4(4 - \pi)}{4\pi} = \frac{4 - \pi}{\pi}$$

elde edilir.

Aıştırma 13.26. AMC8-2014 ♣

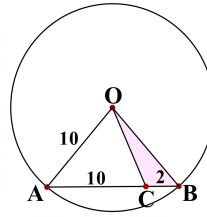
ABCD dikdörtgeninin kenarları $|CD| = 3$ ve $|DA| = 5$ 'tir. A noktasına 1 yarıçaplı, B noktasına 2 yarıçaplı ve C noktasına 3 yarıçaplı bir çember çizilince aşağıdaki şekil elde ediliyor. Bu şekildeki taralı kısmın alanı kaçtır?



Çözüm : Dikdörtgenin alanı $3 \cdot 5 = 15$ 'tir. Üç tane çeyrek çemberi çıkarırsak taralı bölge elde edilir. Böylece,

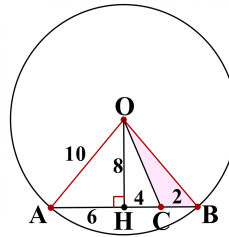
$$15 - \frac{\pi 1^2}{4} - \frac{\pi 2^2}{4} - \frac{\pi 3^2}{4} = 15 - \frac{7}{2}\pi$$

elde edilir.

Aıştırma 13.27.

Yandaki O merkezli ve 10 yarıçaplı çemberin içinde gösterilen, taban uzunluğu 2 br olan taralı OCB üçgeninin alanını bulunuz.

Çözüm :



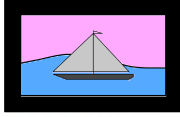
OAB ikizkenardır.
[OH] hem yükseklik hem kenarortay hem açıortaydır.

$$A(OCB) = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8$$

Problemler (Çevre ve Alan)

Prob. 13.1 AMC8-2012

Dikdörtgen bir fotoğraf, fotoğrafın her tarafında iki cm genişliğinde kenarlığı olan bir çerçeveye yerleştiriliyor. Fotoğraf 8 cm boyunda ve 10 cm genişliğinde ise, çerçevenin kenarlığının alanı kaç cm karedir?



Çözüm : Çerçevenin kenarlığının alanını bulmak için, fotoğrafın alanını, tüm çerçevenin alanından çıkarmamız gerekir. Fotoğrafın alanı

$$8 \cdot 10 = 80 \text{ cm}^2,$$

tüm çerçevenin alanı ise

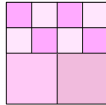
$$12 \cdot 14 = 168 \text{ cm}^2$$

olduğundan, çerçevenin kenarlığının alanı $168 - 80 = 88 \text{ cm}^2$ bulunur.

Prob. 13.2 AMC8-2012

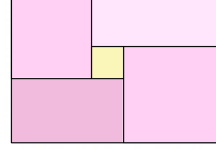
Kenar uzunlukları tam sayı olan bir kare, kenar uzunlukları tam sayı olan ve en az 8 tanesinin alanı 1 olan 10 kareye bölünüyor. Orijinal karenin kenar uzunluğunun alabileceği en küçük değeri kaçtır?

Çözüm : Bir kenarın uzunluğu 3 olamaz. Çünkü, bu kareden zaten en fazla 9 tane alanı 1 olan kare elde edilebilir. Kenar uzunluğu 4 olabilir mi diye kontrol edelim. Aşağıdaki gibi 10 parçaya bölünebilir.

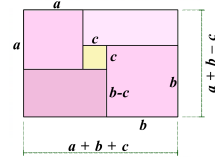


O halde, kenar uzunluğu en az 4 olabilir.

Prob. 13.3 Aşağıda üç tane farklı kare ve iki tane farklı dikdörtgenle oluşturulmuş büyük dikdörtgenin uzun kenarı 100 kısa kenarı 60 cm olduğuna göre en küçük karenin alanını bulunuz.



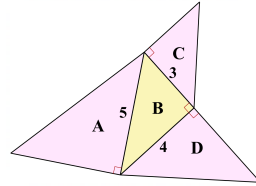
Çözüm : Karelerin kenar uzunlukları a , b ve c olsun.



Böylece, $a + b + c = 100$, $a + b - c = 60$ elde edilir. Taraf tarafa çıkarılırsa $2c = 40 \Rightarrow c = 20$ bulunur. O halde, en küçük karenin alanı $c^2 = 400$ olur.

Prob. 13.4 AMC8-2002

Kenarları 3, 4, 5 olan dik üçgeninin kenarlarına şekildedeki gibi dışa doğru ikizkenar dik üçgenler çiziliyor.



Üçgenlerin içindeki büyük harfler bu üçgenin alanını göstermektedir. Buna göre aşağıdakilerden hangisi doğrudur?

- a) $A + C = B + D$ b) $C + B = A$
 c) $3C + 4D = 5A$ d) $C + B = \frac{1}{2}(A + B)$
 e) $C + D = A$

Çözüm : Bir dik üçgenin alanı, taban ile yüksekliğin çarpımının yarisına eşittir. Buna göre,

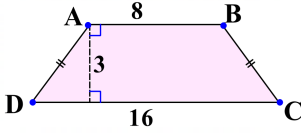
$$A = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}, \quad B = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6,$$

$$C = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2}, \quad D = \frac{4 \cdot 4}{2} = \frac{16}{2},$$

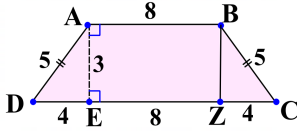
olduğundan, $\frac{9}{2} + \frac{16}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow C + D = A$ olur. Yani, e) doğrudur.

Prob. 13.5 AMC8-1999

Aşağıdaki yamuğun çevresini bulunuz.



Çözüm :



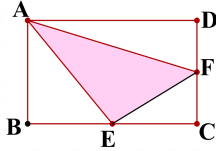
Pisagor teoremi kullanılarak

$$|AD| = |BC| = 5$$

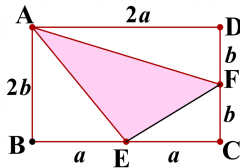
bulunur. Yamuğun çevresi de $16 + 8 + 5 + 5 = 34$ elde edilir.

Prob. 13.6 AMC8-2000

ABCD dikdörtgeninin alanı 72 birim karedir. [BC] ile [CD]'nin orta noktaları sırasıyla E ve F olsun. Buna göre, AEF üçgeninin alanı kaçtır?



Çözüm : Önce dikdörtgenin kenarlarını şekildeki gibi harflendirelim. Buna göre, ABCD'nin alanı 72 ise $2a \cdot 2b = 4a \cdot b = 72$ eşitliğinden $a \cdot b = 18$ olur.



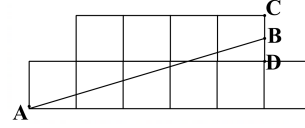
İstenen alan dikdörtgenin çevresindeki taralı olmayan üçgenlerin alanının çıkarılmasıyla elde edilebilir ve

$$72 - \frac{2a \cdot b}{2} - \frac{a \cdot b}{2} - \frac{a \cdot 2b}{2} = 72 - 18 - 9 - 18 = 27$$

bulunur.

Prob. 13.7 AMC8-2010

Aşağıdaki şekilde 10 birim kareden oluşmuş bir sekizgen verilmiştir. [AB] doğrusu sekizgenin alanını tam iki eşit parçaya ayırmıştır. Buna göre, $\frac{|CB|}{|BD|}$ oranı nedir?



Çözüm : Sekizgenin alanı 10 br^2 olduğundan, sekizgenin [AB] doğru parçasının altında kalan kısmının alanı 5 olacaktır. Hatta, [AB] doğru parçasının altında kalan dik üçgenin alanı $5 - 1 = 4$ olur. Tabanı 5 br olduğundan, bu üçgenin yüksekliğini bulabiliriz.

$$\text{Alan} = \frac{5 \cdot h}{2} = 4 \Rightarrow h = \frac{8}{5}$$

olur. O halde

$$|BD| = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5} \quad \text{ve} \quad |CB| = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

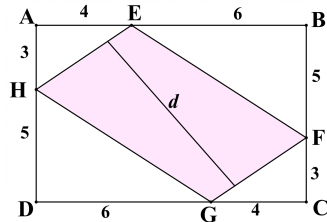
bulunur. Böylece,

$$\frac{|CB|}{|BD|} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$$

bulunur.

Prob. 13.8 AMC8-2004

Şekilde ABCD bir dikdörtgen ve EFGH bir paralelkenardır. Şekilde verilen uzunlukları kullanarak, [HE] ve [FG]'ye dik olan d doğru parçasının uzunluğunu bulunuz.



Çözüm : Paralelkenarın alanını ABCD dikdörtgeninin alanından içindeki dik üçgenlerin alanlarını çıkararak da bulabiliriz. Buna göre,

$$\begin{aligned} A(ABCD) &= 10 \cdot 8 - 2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} - 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} \\ &= 80 - 30 - 12 = 38 \end{aligned}$$

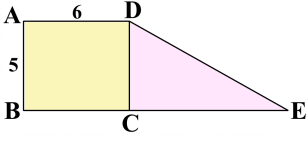
olur. Diğer yandan, d doğru parçası paralelkenarın yüksekliğidir ve paralelkenarın alanı tabanı ile yüksekliğinin çarpımına eşittir. Pisagor teoreminden $|GF| = 5$ bulunabilir. Paralelkenarın alanı da $5 \cdot d$ olur. Böylece,

$$5d = 38 \Rightarrow d = \frac{38}{5} = \frac{76}{10} = 7,6$$

elde edilir.

Prob. 13.9 AMC8-2014

Kenarları 5 ve 6 olan ABCD dikdörtgeni ile yüksekliği 5 birim olan DCE dik üçgeni şekildeki gibi birleştirilerek bir yamuk oluşturuluyor. Üçgen ve dikdörtgenin alanları eşitse |DE| uzunluğu kaçtır?



Çözüm : |CE| = x diyelim. Dikdörtgenin alanı $5 \cdot 6 = 30$ olduğundan, üçgenin alanı ile eşitliğinden

$$\frac{5 \cdot x}{2} = 30 \Rightarrow x = 12$$

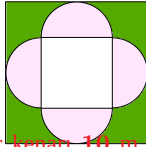
elde edilir. Buna göre, DCE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa,

$$|DE|^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow |DE| = 13$$

bulunur.

Prob. 13.10 AJHSME-1994

Bir kenarı 10 metre olan kare şeklindeki gül bahçesinin kenarlarına tamamina yarım çember şeklinde karanfil bahçesi yapılıyor. Daha sonra en dış kısma kare bahçenin kenarlarına paralel ve çemberlere değen bir tel çit çekiliyor. Bu tel çiftin iç kısmındaki çiçeksiz koyu kısmın alanı nedir? ($\pi = 3$ alınız.)



Çözüm : Karenin bir kenarı 10 m ise, yarım çemberlerin yarıçapı 5 olur. Dört yarım çember 2 tam çemberdir. Bu arada, en küçük karedeki gül bahçesinden sonra, kenarlardaki 5 m yarıçaplı çember kısımları da göz önüne alınırsa, en dıştaki tel çift karenin bir kenarı 20 m olur. Bu karenin alanından küçük kare ve 2 tam çemberi çıkarırsak çiçeksiz kısmın alanı bulunmuş olur. Böylece,

$$20^2 - 10^2 - 2 \cdot \pi \cdot 5^2 = 300 - 50\pi$$

olur. $\pi = 3$ alınız denilmiş. O halde, $300 - 150 = 150$ elde edilir.

Prob. 13.11 AMC8-2010

Bir kare ile bir dairenin alanları eşittir. Buna göre, karenin bir kenar uzunluğunun karesinin çemberin yarıçapının karesine oranı kaçtır?

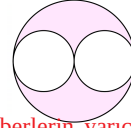
Çözüm : Karenin bir kenarı a , çemberin yarıçapı da r olsun. Verilenlerden

$$a^2 = \pi r^2 \Rightarrow \frac{a^2}{r^2} = \pi$$

elde edilir.

Prob. 13.12 AMC8-2018

Aşağıdaki şemada, iki küçük dairenin her birinin çapı, büyük dairenin yarıçapıdır. İki küçük dairenin birleşik alanı 1 birimkare ise, taralı bölgenin alanı kaç birimkaredir?



Çözüm : Küçük çemberlerin yarıçapı r olsun. İki küçük dairenin alanı 1 ise bir tanesinin alanı $\frac{1}{2}$ olur. Buradan,

$$\pi r^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2\pi}$$

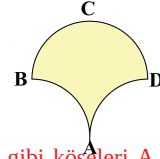
elde edilir. Büyük çemberin yarıçapı $2r$ olduğundan, alanı

$$\pi (2r)^2 = 4\pi r^2 = 4\pi \frac{1}{2\pi} = 2$$

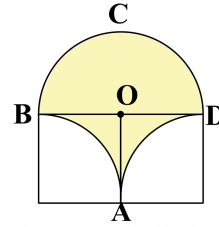
elde edilir. Buradan taralı bölgenin alanı $2 - 1 = 1$ olur.

Prob. 13.13 AMC8-2000

5 birim yarıçaplı üç dairesel yay gösterilen bölgeyi sınırlamaktadır. AB ve AD yayları çeyrek dairedir ve BCD yayı yarım dairedir. Bölgenin alanı kaç birimkaredir?



Çözüm : Şekildeki gibi köşeleri A, B, D olan iki kare çizerek bu karelerin bir köşeleri de yarım çemberin O merkezi olur.



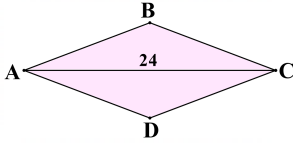
O halde taralı alan, bir yarım çember ile iki karenin alanından bir yarım çember çıkarılarak elde edilir. Yani,

$$\frac{\pi 5^2}{2} + \left(2 \cdot 25 - \frac{\pi 5^2}{2} \right) = 50$$

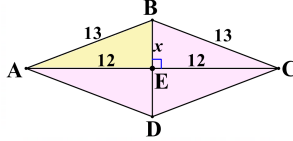
bulunur.

Prob. 13.14 AMC8-2019

$ABCD$ eşkenar dörtgeninin çevresi 52 metredir. $[AC]$ köşegeninin uzunluğu 24 metre ise, $ABCD$ eşkenar dörtgenin alanı kaç metre karedir?



Çözüm : Çevresi 52 ise bir kenarının uzunluğu $52 \div 4 = 13$ olur.



Eşkenar dörtgenden köşegenler dik kesiştiğinden ve birbirini ortaladığından şekildeki gibi ABE dik üçgeni oluşur ve Pisagor teoreminden $13^2 = 12^2 + x^2$ yazılırsa,

$$x^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$

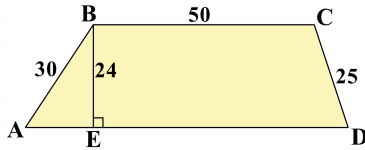
eşitliğinden $x = 5$ ve $|BD| = 10$ m olur. Böylece, eşkenar dörtgenin alanı

$$\frac{|AC| \cdot |BD|}{2} = \frac{24 \cdot 10}{2} = 120 \text{ m}^2$$

bulunur.

Prob. 13.15 AMC8-2005

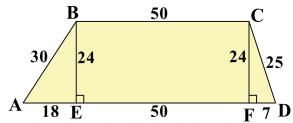
Aşağıdaki yamuğun çevresini bulunuz.



Çözüm : ABE üçgeninde Pisagor teoreminden $|AE|^2 = 30^2 - 24^2 = 18^2$ ve $|AE| = 18$ bulunur. Sağ tarafta da Pisagor teoremi kullanılırsa

$$|FD|^2 = 25^2 - 24^2 = 49 = 7^2$$

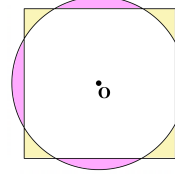
ise $|FD| = 7$ olur.



Böylece, yamuğun çevresi $50 + 30 + 18 + 50 + 7 + 25 = 180$ olur.

Prob. 13.16 AMC8-2005

Kenar uzunluğu 2 olan kare ve kare ile aynı merkezli çember şekildeki gibi verilmiştir. Çemberin içindeki ve karenin dışındaki bölgelerin toplam alanı, çemberin dışındaki ve karenin içindeki bölgelerin toplam alanına eşittir. Buna göre çemberin yarıçapının karesini bulunuz.



Çözüm : Daire ve karenin içindeki ortak bölgenin alanı x olsun. Çemberin yarıçapı r ise, çemberin içindeki ve karenin dışındaki bölgelerin toplam alanı

$$\pi r^2 - x$$

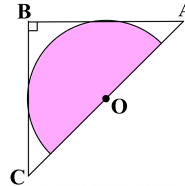
olur. Çemberin dışındaki ve karenin içindeki bölgelerin toplam alanı da $4 - x$ olur. Bu iki alan eşit ise

$$\pi r^2 - x = 4 - x \Rightarrow r^2 = \frac{4}{\pi}$$

elde edilir.

Prob. 13.17 AMC8-2005

Bir ABC ikizkenar dik üçgeninin içine merkezi $[AC]$ hipotenüsü üzerinde ve dik kenarlara teğet olacak biçimde şekildeki gibi 2π alanına sahip bir yarım çember çiziliyor. ABC üçgeninin alanı nedir?



Çözüm : Üçgeni bir kareye tamamlarsak karenin kenarlarına teğet bir tam daire elde ederiz. Bu dairenin alanı 4π ise

$$\pi r^2 = 4\pi$$

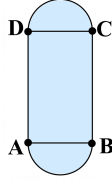
eşitliğinden $r = 2$ elde edilir. O halde, karenin bir kenarı 4 ve karenin alanı da $4 \cdot 4 = 16$ olur. Böylece, üçgenin alanı

$$16 \div 2 = 8$$

bulunur.

Prob. 13.18 AMC8-2010

Dekoratif bir pencere, şekildeki gibi her iki ucunda yarım daire bulunan bir dikdörtgenden oluşmaktadır. $|AD|$ 'nin $|AB|$ 'ye oranı $\frac{3}{2}$ ve $|AB| = 30$ inç olduğuna göre, dikdörtgenin alanının, yarım dairelerin birleşik toplam alanına oranı kaçtır?



Çözüm : $|AB| = 30$ ise

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{|AD|}{30} = \frac{3}{2} \Rightarrow |AD| = 45$$

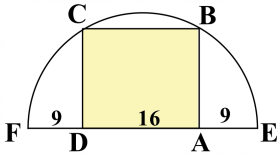
elde edilir. Alt ve üstteki iki yarım dairenin toplamı 1 tam dairedir ve bu dairenin alanı $\pi(15)^2 = 225\pi$ olur. Dikdörtgenin alanı da $30 \cdot 45 = 1350$ olduğundan, istenen oran

$$\frac{1350}{225\pi} = \frac{6}{\pi}$$

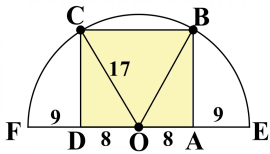
bulunur.

Prob. 13.19 AMC8-2020

Aşağıdaki yarım çember içine çizilen ABCD dikdörtgeninin alanını bulunuz.



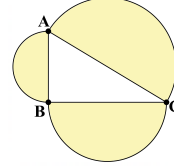
Çözüm : O yarım dairenin merkezi olsun. Bu dairenin çapı $9 + 16 + 9 = 34$ olduğundan, $|OC| = 17$ olur. $|OA| = |OD|$ olacağından $|OD| = 8$ olacağından Pisagor teoremine göre, $17^2 = 8^2 + x^2$ eşitliğinden $x = |DC| = 15$ elde edilir.



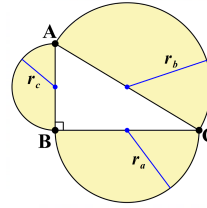
Böylece dikdörtgenin kenarları 16 ve 15 olduğundan alanı $16 \cdot 15 = 240$ bulunur.

Prob. 13.20 AMC8-2013

Bir ABC dik üçgeninin kenarlarına şekilde gösterildiği gibi yarım çemberler çizilmiştir. $[AB]$ kenarındaki yarım dairenin alanı 8π , $[AC]$ kenarındaki yarım dairenin yay uzunluğu $8,5\pi$ ise $[BC]$ kenarındaki yarım dairenin yarıçapı kaçtır?



Çözüm :



$$\begin{aligned} |AB|^2 + |BC|^2 &= |AC|^2 \\ (2r_c)^2 + (2r_a)^2 &= (2r_b)^2 \\ 4r_c^2 + 4r_a^2 &= 4r_b^2 \\ r_c^2 + r_a^2 &= r_b^2 \end{aligned}$$

$[AB]$ kenarındaki yarım dairenin alanı 8π ise tam dairenin alanı 16π olduğundan,

$$\pi r_c^2 = 16\pi \Rightarrow r_c^2 = 16$$

olur. $[AC]$ kenarındaki yarım dairenin çevresi $8,5\pi$ ise tam dairenin çevresi 17π olur ve

$$2\pi r_b = 17\pi \Rightarrow r_b = \frac{17}{2} \Rightarrow r_b^2 = \frac{289}{4}$$

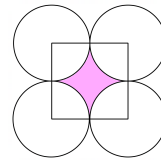
olur. Böylece, Pisagor teoreminden $\frac{289}{4} = 16 + r_a^2$ ve

$$r_a^2 = \frac{289}{4} - \frac{16}{1} = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2 \Rightarrow r_a = \frac{15}{2}$$

elde edilir.

Prob. 13.21 AJHSME-1992

Aşağıda birbirine teğet ve yarıçapları 3 olan dört eş çemberin merkezleriyle, bu çemberlerin merkezlerini birleştiren bir kare verilmiştir. Taralı alanın en yakın olduğu tam sayı kaçtır?



Çözüm : Dört çemberin merkezlerini birleştiren karenin bir kenarı $2 \cdot 3 = 6$ olduğundan, alanı

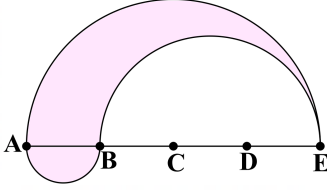
$$6 \cdot 6 = 36$$

olur. Bu kareden 4 tane çeyrek, yani 1 tam kare çıkarılırsa alan bulunur. Buradan,

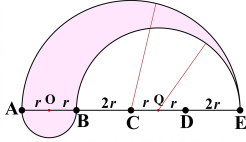
$$36 - \pi 3^2 = 36 - 9\pi = 36 - 9 \cdot 3,14 = 36 - 28,2 = 7,8$$

olur ki, en yakın olduğu sayı 8 bulunur.

Prob. 13.22 Aşağıdaki şekilde $[AE]$ doğru parçası dört eşit parçaya bölünmüş ve $[AB]$, $[BE]$ ve $[AE]$ çaplı çemberler çizilmiştir. Taralı alan 100π ise $|CD|$ uzunluğunu bulunuz.



Çözüm :



$|AB| = 2r$ diyelim. Bu durumda, $[AB]$ çaplı yarı çemberin alanı $\frac{\pi r^2}{2}$, $[BE]$ çaplı yarı çemberin alanı

$$\frac{\pi (3r)^2}{2} = \frac{9\pi r^2}{2}$$

ve $[AE]$ çaplı yarı çemberin alanı

$$\frac{\pi (4r)^2}{2} = 8\pi r^2$$

olduğundan taralı alan:

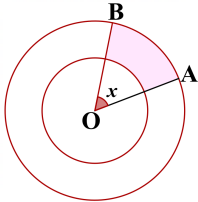
$$\frac{\pi r^2}{2} + \left(8\pi r^2 - \frac{9\pi r^2}{2}\right) = 4\pi r^2$$

olur.

$$4\pi r^2 = 100\pi$$

ise $r = 5$ olduğundan $|CD| = 2r = 10$ elde edilir.

Prob. 13.23 Şekilde O merkezli 6 ve 2 yarıçaplı iki çember verilmiştir. $m(\angle AOB) = x$ olmak üzere taralı alan ile küçük çemberin alanı eşitse x kaç derecedir?

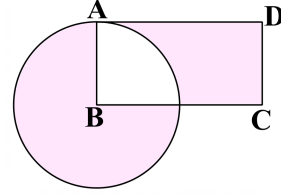


Çözüm : Küçük çemberin alanı 4π 'dir. Bu alan taralı alana eşit ise,

$$\frac{x}{360} 36\pi - \frac{x}{360} 4\pi = 4\pi \Rightarrow \frac{4\pi x}{45} = 4\pi$$

eşitliğinden $x = 45$ elde edilir.

Prob. 13.24 $|AB| = 4$ olan ABCD dikdörtgeninin B köşesine şekildeki gibi $[AB]$ yarıçaplı bir çember çiziliyor. Çemberin iç dikdörtgenin dış kısmında kalan alan ile, çemberin dış dikdörtgenin iç kısmında kalan alanlar birbirine eşit ise $|AD|$ uzunluğu kaçtır?



Çözüm : $|AD| = x$ olsun. Çemberin iç dikdörtgenin dış kısmında kalan alan

$$\frac{3}{4} (\pi 4^2) = 12\pi,$$

çemberin dış dikdörtgenin iç kısmında kalan alan ise

$$4x - \frac{1}{4} (\pi 4^2) = 4x - 4\pi$$

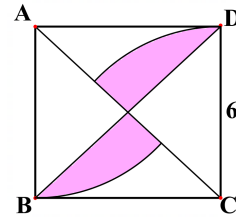
olur. Bu iki alan birbirine eşit ise

$$12\pi = 4x - 4\pi \Rightarrow 4x = 16\pi \Rightarrow x = 4\pi$$

elde edilir.

Prob. 13.25 UAMO-2023

ABCD karesinin iç kısmına A ve C merkezli çember yayları şekildeki gibi çizilmiştir. AC ve BD karenin köşegenleridir. Buna göre, taralı bölgenin alanı hangi ardışık iki tam sayı arasındadır?



Çözüm : ACD üçgenindeki daire diliminin alanı

$$\frac{36\pi}{8} = \frac{9}{2}\pi$$

olduğundan, taralı bölgelerin alanları toplamı :

$$2 \left(\frac{9}{2}\pi - 9 \right) = 9\pi - 18$$

olur ve

$$10 < x < 11$$

elde edilir.

Sayma

Faktöriyel Kavramı

Alıştırma 14.1.

$\frac{9! + 9!}{9 \cdot 7!}$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm : Kesrin payındaki toplamayı yapıp sadeleştirelim.

$$\frac{9! + 9!}{9 \cdot 7!} = \frac{2 \cdot 9!}{9 \cdot 7!} = \frac{2 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{9 \cdot 7!} = 16.$$

Alıştırma 14.2.

$\frac{10! + 9! + 2 \cdot 9!}{13 \cdot 9!}$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm : Kesrin payını 9! parantezine alıp düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \frac{10! + 9! + 2 \cdot 9!}{13 \cdot 9!} &= \frac{10 \cdot 9! + 9! + 2 \cdot 9!}{13 \cdot 9!} \\ &= \frac{9! (10 + 1 + 2)}{13 \cdot 9!} \\ &= \frac{13}{13} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 14.3.

$\frac{12 \cdot n!}{(n+2)!} = 1$ ise n kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{12 \cdot n!}{(n+2)!} = 1 &\Rightarrow \frac{12 \cdot n!}{(n+2)(n+1)n!} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{12}{(n+2)(n+1)} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $n = 2$ bulunur.

Alıştırma 14.4.

$\frac{8!}{2^7 3^2}$ ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{8!}{2^7 3^2} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2^7 3^2} \\ &= \frac{2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2}{2^7 3^2} \\ &= \frac{2^7 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 5}{2^7 3^2} = 35 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 14.5.

$$1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 99!$$

sayısının 24 ile bölümünden kaçtır?

Çözüm : $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ olduğundan dolayı,

$$4!, 5!, \dots, 99!$$

toplananlarının tamamı zaten 24 ile tam bölünür. O halde, bu sayının 24 ile bölümünden kalan

$$1! + 2! + 3! = 1 + 2 + 6 = 9$$

elde edilir.

Alıştırma 14.6. ♣

$1! + 2! + 3! + 4! + \dots + 99!$ sayısının son rakamı kaçtır?

Çözüm : Son rakamı bulmak için 10 ile bölümünden kalanı bulmak gerekli. $5! = 120$ olduğundan,

$$5!, 6!, \dots, 99!$$

toplananlarının tamamının son rakamı 0'dır. O halde geriye sadece $1! + 2! + 3! + 4!$ toplamının son rakamını hesaplamak kalır.

$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$$

olduğundan bu sayının son rakamı 3 bulunur.

Alıştırma 14.7.

$9!$ sayısını asal çarpanlarına göre yazınız.

Çözüm :

$$\begin{aligned} 9! &= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ &= 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2 \\ &= 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Alıştırma 14.8.

$20!$ sayısı 3'ün en fazla kaçınıcı kuvvetine bölünür?

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \hline & 6 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 9 \\ \hline & 2 \end{array}$$

olduğundan $6 + 2 = 8$ olur.

Alıştırma 14.9. AMC8-2017 ♣

$98! + 99! + 100!$ toplamını tam bölen 5^n sayısı için n sayısı en fazla kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 98! + 99! + 100 &= 98! + 98! \cdot 99 + 98! \cdot 99 \cdot 100 \\ &= 98! \cdot (1 + 99 + 99 \cdot 100) \\ &= 98! \cdot 10000 \\ &= 98! \cdot 10^4 = 98! \cdot 2^4 \cdot 5^4 \end{aligned}$$

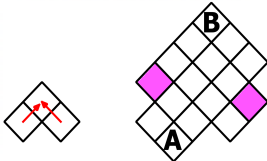
biçiminde yazalım. Şimdi $98!$ içinde kaç tane 5 çarpanı olduğunu bulalım.

$$\begin{array}{r} 98 \overline{) 5} \\ \underline{19} \end{array} \quad \begin{array}{r} 98 \overline{) 25} \\ \underline{3} \end{array}$$

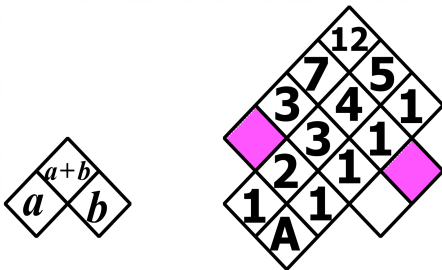
olduğundan $98!$ içinde $19 + 3 = 22$ tane daha 5 çarpanı vardır. Sonuç olarak, $98! + 99! + 100!$ sayısının $22 + 4 = 26$ tane 5 çarpanı vardır ve n en fazla 26 olabilir.

Saymada Toplam Kuralı**Alıştırma 14.10.**

Kare şeklindeki herhangi bir kutuya sadece altındaki komşu kutuların kenarından geçiş yapılan aşağıdaki şekilde A noktasında bulunan bir karınca B noktasına kaç farklı şekilde gidebilir? Boyalı kareler kapalı ve giriş yapılamayan karelerdir.



Çözüm :

**Saymada Çarpım Kuralı****Alıştırma 14.11.**

a) Serdar'ın birbirinden farklı 5 gömlek, 4 pantolon ve 3 kravatı vardır. Serdar, bunların her birinden birer tanesini kaç farklı şekilde giyebilir?

Çözüm : $5 \times 4 \times 3 = 60$ farklı şekilde giyebilir.

b) Bir sınıfta 5 basketbolcu ve 7 voleybolcu öğrenci vardır. Buna göre, bu sınıftan 1 basketbolcu ve 1 voleybolcu öğrenci kaç farklı şekilde seçilir?

Çözüm : $5 \times 7 = 35$ farklı şekilde seçilebilir.

c) Antalya'dan Ankara'ya 7 farklı uçak, Ankara'dan Bakü'ye ise 3 farklı uçak gitmektedir. Antalya'dan Bakü'ye doğrudan uçuş yoksa, Emil Antalya'dan Bakü'ye kaç farklı şekilde gidebilir?

Çözüm : $7 \times 3 = 21$ farklı şekilde gidebilir.

Alıştırma 14.12. AMC8-2015

Rakamları tek sayı olan 5 ile bölünen rakamları farklı üç basamaklı kaç sayı vardır?

Çözüm : 5 ile bölünebilmesi için son rakam 5 olmalıdır. O halde, geriye onlar ve yüzler basamağını belirlemek kaldı.

A	B	5
---	---	---

yazalım. A rakamı 4 rakam ve B rakamı da 3 rakam olabilir. O halde,

$$4 \times 3 = 12$$

sayı vardır.

Alıştırma 14.13. AMC8-2015

1000 ile 9999 arasındaki kaç tam sayının dört farklı rakamı vardır?

Çözüm :

A	B	C	D
---	---	---	---

sayısının dört basamaklı olması için A rakamı 0 dışındaki diğer 9 rakam olabilir. B ise 0 olabilir fakat A'dan farklı olması gerektiği için 0 ile birlikte toplam 9 rakam olabilir. C rakamı A ve B'den farklı 8 rakam, D ise A, B ve C'den farklı 7 rakam olabilir. Böylece,

9 rakam	9 rakam	8 rakam	7 rakam
---------	---------	---------	---------

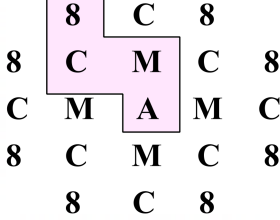
yazılabilir ve sonuç olarak 1000 ile 9999 arasında dört farklı basamaklı

$$9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$$

tam sayı bulunur.

Alıştırma 14.14. AMC8-2017

Aşağıdaki harf ve sayıların düzenlenmesinde, **AMC8** kaç farklı yolla işaretlenebilir? Ortadaki **A**'dan başlayan bir yol, yalnızca bir harften bitişik (yukarıda, aşağıda, solda veya sağda, ancak köşegen değil) harfe geçişe izin verir. Aşağıda bir örnek gösterilmiştir.



Çözüm : **A**'dan başlayacağız. **A**'dan sağ, sol, aşağı veya yukarısında bulunan **M** harfine geçeceğiz. Yani, 4 farklı şekilde yapabiliriz. Herhangi bir **M** harfine geçtikten sonra **C** harfine geçmeliyiz. Her bir **M**'nin çevresinde geçebileceğimiz 3 harf bulunuyor. **C**'den sonra 8 rakamına geçmeliyiz ki, her bir **C** harfinin etrafında geçebilecek durumda iki adet 8 rakamı bulunuyor. Buna göre,

$$\boxed{A} \boxed{M} \boxed{C} \boxed{8} \Rightarrow 1 \times 4 \times 3 \times 2 = 24$$

farklı şekilde **AMC8** yazısı işaretlenebilir.

Alıştırma 14.15. AMC8-2016

Fatih'in banka kartının parolası dört rakamlıdır ve her bir rakam 0 ile 9 rakamdan herhangi biri olabilir. Banka 9, 1, 1 rakam dizisiyle başlayan bir şifreyi kabul etmemektedir. Buna göre Fatih banka şifresini kaç farklı şekilde belirleyebilir?

Çözüm : Şifre

A	B	C	D
---	---	---	---

olsun. Şifrenin ilk üç A,B,C rakamı $10 \times 10 \times 10 = 1000$ farklı şekilde belirlenebilir. Fakat, ilk üç rakamın 911 olamayacağından ilk üç rakam $1000 - 1 = 999$ farklı şekilde belirlenir. D ise 10 rakamın herhangi biri olabilir. O halde, istenen şekilde $999 \times 10 = 9990$ şifre belirlenebilir.

Alıştırma 14.16. AMC8-1999 ♣

Flatville'deki bisiklet plakalarının her biri üç harf içermektedir. Birincisi C, H, L, P, R harflerinden, ikincisi A, I, O harflerinden ve üçüncüsü de D, M, N, T harflerindendir. Flatville kasabası daha fazla plakaya ihtiyaç duyduğunda, iki yeni harf eklediler. Yeni harflerin her ikisi de üç harf grubundan birine veya harflerden biri bir harf grubuna ve diğer harf başka bir harf grubuna eklenebilir. İki harf ekleyerek yapılabilecek en fazla İLAVE plaka sayısı kaçtır?

Çözüm : Mevcut durumda

$$\boxed{\{C,H,L,P,R\}} \boxed{\{A,I,O\}} \boxed{\{D,M,N,T\}} \Rightarrow 5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$$

plaka olabilir. Yeni ilave edilecek iki harf E, F olsun. Bu harflerin eklenecekleri harf grubuna göre olabilecek plaka sayıları aşağıdaki gibidir.

$$\boxed{\{C,H,L,P,R,E,F\}} \boxed{\{A,I,O\}} \boxed{\{D,M,N,T\}} \Rightarrow 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84,$$

$$\boxed{\{C,H,L,P,R\}} \boxed{\{A,I,O,E,F\}} \boxed{\{D,M,N,T\}} \Rightarrow 5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$$

$$\boxed{\{C,H,L,P,R\}} \boxed{\{A,I,O\}} \boxed{\{D,M,N,T,E,F\}} \Rightarrow 5 \cdot 3 \cdot 6 = 90,$$

$$\boxed{\{C,H,L,P,R,E\}} \boxed{\{A,I,O,F\}} \boxed{\{D,M,N,T\}} \Rightarrow 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96,$$

$$\boxed{\{C,H,L,P,R,E\}} \boxed{\{A,I,O\}} \boxed{\{D,M,N,T,F\}} \Rightarrow 6 \cdot 3 \cdot 5 = 90,$$

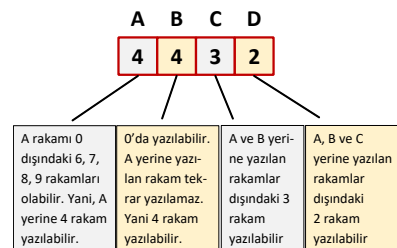
$$\boxed{\{C,H,L,P,R\}} \boxed{\{A,I,O,F\}} \boxed{\{D,M,N,T,E\}} \Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 5 = 100,$$

Sonuç olarak en fazla 100 plaka olabilir ve $100 - 60 = 40$ ilave plaka olabilir.

Alıştırma 14.17.

$\{0, 6, 7, 8, 9\}$ kümesinin elemanlarını kullanarak rakamları farklı 4 basamaklı kaç farklı sayı yazılabilir?

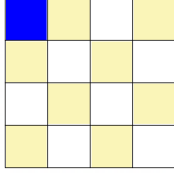
Çözüm :



Buna göre, rakamları farklı dört basamaklı yazılabilecek ABCD sayısı : $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ bulunur.

Aıştırma 14.18. UAMO-2023

Aşağıdaki 4×4 satranç tahtasına dört kale birbirini tehdit etmemek koşuluyla yerleştirilecektir. En koyu renkteki ilk karede kale olmaması koşuluyla dört kale kaç farklı şekilde yerleştirilebilir? (Not : Kale kendi satır veya sütunundaki diğer kaleyi tehdit eder)

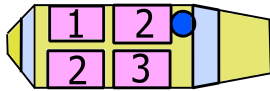


Çözüm : İlk sırada üç kareden birine kale koyabiliriz. İkinci sırada yine 3 kareye konulabilir. Çünkü, birinci satırda konulan karenin bulunduğu sütuna konulamaz. Üçüncü satırda 2 kareye son satırda ise tek türlü konulabilir. O halde, $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ farklı şekilde yerleştirilebilir.

Aıştırma 14.19. AMC8-2003 ♣

Alp, Berk, Can ve Deniz birlikte yakındaki bir tema parkına gidecekler. Kullandıkları arabanın 1 kişilik Sürücü koltuğu, 1 kişilik ön yolcu koltuğu ve 2 kişilik arka yolcu koltuğu olmak üzere 4 koltuğu vardır. Sadece Berk ve Can araba kullanabilmektedir. Kaç tane olası arabaya oturma düzeni vardır?

Çözüm : Sürücü koltuğuna oturabilecek sadece 2 kişi vardır : Berk ve Can. Kalan 3 kişiden herhangi biri ön yolcu koltuğuna oturabilir. İlk arka yolcu koltuğuna oturabilecek 2 kişi var ve kalan kişi son koltuğa oturmalı.



Böylece, $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ farklı şekilde oturma düzeni bulunur.

Aıştırma 14.20. AMC8-2009

1 ile 1000 arasında kaç tane tam sayı 1 rakamını içermez?

Çözüm : Soruya göre, A, B, C rakamları 1'den farklı olması gerektiği için

A	B	C
---	---	---

sayısında her harf 9 rakam olabilir. Soruya göre sayı üç basamaklı olmak zorunda olmadığı için A rakamının 0 olabileceğine dikkat ediniz. Buna göre, 000 sayısının olamayacağını da göz önüne alarak istenen şekilde

$$9 \cdot 9 \cdot 9 - 1 = 729 - 1 = 728$$

sayı olduğu bulunur.

Sıralama**★ n Elemanın Farklı Sıralanış Sayısı ★**

Bu bölümde nesnelerin kaç farklı şekilde sıralanabileceğini içeren problemlerle ilgileneceğiz. Sıralama sayısı denilince, farklı diziliş sayısı anlaşılır. Bazen sıralama yerine **permütasyon** kelimesi de kullanılabilir.

Örneğin,

"123 sayısının rakamlarının sıralama sayısını" bulalım.

İlk rakamdan itibaren nasıl sıralanabileceğini aşağıdaki şekilde verdik.

1, 2, 3 rakamlarını kaç farklı şekilde sıralayabiliriz?

Soldan İlk Rakam : $\begin{matrix} \nearrow 1 \Rightarrow 123, 132 \\ \rightarrow 2 \Rightarrow 213, 231 \\ \searrow 3 \Rightarrow 312, 321 \end{matrix}$

Yani, 123'ün sıralamaları,

123, 132, 231, 213, 321, 312

bulunur. Buna göre, 123'ün 6 farklı sıralanışı olduğundan, "123'ün permütasyonlarının (farklı sıralanışlarının) sayısı 6'dır" şeklinde de ifade edilebilir.

Sıralama sayısını çarpma kuralıyla da bulabiliriz.

A	B	C
---	---	---

sıralamasında, A yerine 3 rakamdan biri yazılabilir, B yerine ise A yerine rakamlardan birini yazdığımız için geri kalan 2 rakamdan birini yazarız. C yerine ise, A ve B yerine yazılan rakamlardan sonra elimizde son kalan rakamı tek türlü yazarız. Buna göre,

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \end{matrix} \quad \text{ise} \quad 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$$

farklı şekilde sıralama yapılacağı görülür.

Herhangi n adet farklı nesneyi sıralamak istersek benzer düşünceyle

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

farklı sıralama olduğu bulunabilir.

Ayrıca, n farklı nesnenin farklı sıralanış sayısı

$$n!$$

ile verilir. Örneğin, 7 kişinin farklı sıralanış sayısı 7! olur.

Aıştırma 14.21.

Bir at yarışında 6 at yarışmaktadır. Alper atların yarışı bitirme sırasını tahmin etmeye çalışıyor. Tahminlerini bir kağıda yazıyor ve yarışma nasıl biterse bitsin bu tahminlerinden birinin doğru olacağını söylüyor. En az kaç tahmin yapmış olmalıdır?

Çözüm : Tüm sıralanış sayısı $6! = 720$ olduğundan 720 tahmin yapmış olması gerekir.

Aıştırma 14.22. AMC8-2015

Blue Bird Lisesi satranç takımı iki erkek ve üç kızdan oluşuyor. Bir fotoğrafçı, yerel gazetede çıkması için ekibin fotoğrafını çekmek istiyor. Her iki ucta bir erkek ve ortada üç kız olacak şekilde onların yan yana fotoğrafını çekecektir. Kaç farklı düzende fotoğraflarını çekebilir?

Çözüm : Erkekleri uçtan sıralamanın $2! = 2$ yolu vardır ve kızları ortadan sıralamanın $3! = 6$ yolu vardır. O halde, toplam $2 \times 6 = 12$ farklı düzende fotoğraflarını çekebilir.

Aıştırma 14.23.

6 öğrenciden dört tanesi kaç farklı şekilde yan yana sıralanırlar?

Çözüm :

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

Aıştırma 14.24.

ÇELİK kelimesinin harflerinin yerleri değiştirilerek 5 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç kelime oluşturulabilir?

Çözüm : ÇELİK kelimesinin 5 farklı harfi vardır ve 5 farklı harfin farklı sıralamalarının sayısı

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

olur.

Aıştırma 14.25.

ÇELİK kelimesinin harflerini en fazla 1 kez kullanarak 3 harfli anlamlı ya da anlamsız kaç kelime oluşturulabilir?

Çözüm : ÇELİK kelimesinin 5 farklı harfi vardır ve 5 farklı harfin 3 tanesinin farklı sıralamalarının sayısı

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$$

olur.

Aıştırma 14.26.

Alp, Berk, Cenk, Deniz, Ege ve Fatih'ten 4'ü penaltı atacaklardır. Alp ilk başta ve Deniz en sonda atması koşuluyla kaç farklı şekilde atabilirler?

Çözüm : İlk ve son atacak olanlar belirli olduğundan, geri kalan dört kişiden ikinci ve üçüncü atacak olanlar belirlenmelidir. Alp ve Deniz dışındaki 4 kişiden 2 tanesinin sıralanış sayısı

$$P(4, 2) = \frac{4!}{2!} = 12$$

elde edilir.

Aıştırma 14.27. AJHSME-1990 ♣

2, 4, 5 ve 7'nin her birinin tam olarak bir kez kullanıldığı 24 adet dört basamaklı sayı vardır. En küçükten en büyüğe doğru sıralanırsa 17. sıradaki sayı kaç olur?

Çözüm : 24 sayıdan 6 tane 2 ile, 6 tanesi 4 ile, 6 tanesi 5 ile, 6 tanesi de 7 ile başlacaktır. Buna göre, 17-inci sayı 5 ile başlayan sayılar arasındadır.

13. sayı 5247,

14. sayı 5274,

15. sayı 5427,

16. sayı 5472,

17. sayı 5724

18. sayı 5742

olacaktır.

Alıştırma 14.28.

Rakamları birbirinden farklı olan ve rakamları çarpımı 30 olan tüm dört basamaklı sayılar küçükten büyüğe sıralanıyor. Baştan onuncu sayı, dokuzuncu sayıdan ne kadar büyüktür?

Çözüm : 1, 2, 3, 5 sayılarıyla oluşturulmalıdır. 1 veya 2 ile başlayan 6'şar sayı var. 12-inci sayı 2531, 11-inci sayı 2513, onuncu sayı 2351, dokuzuncu sayı 2315 olur.

$$2351 - 2315 = 36$$

bulunur.

Koşullu Sıralama Örnekleri**Alıştırma 14.29. AMC8-2020 ♣**

Zara'nın Aggie, Bumblebee, Steelie ve Tiger adını verdiği 4 tane bilyesi vardır. Onları bir rafta yan yana sergilemek istiyor ama Steelie ve Tiger'ı yan yana koymak istemiyor. Buna göre kaç farklı şekilde sergileyebilir?

Çözüm : Önce koşulsuz olarak kaç farklı şekilde sergileyebileceğini bulalım. 4 tane bilyeyi

$$\boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

farklı şekilde yan yana koyabilir. Fakat, Steelie ve Tiger'ı yan yana koymak istemiyor. Bunların yan yana oldukları durumları sayıp bunları tüm durumda çıkaralım. S ve T'nin yan yana olduğu 6 durum aşağıdaki gibidir. Geriye kalan Aggie ve Bumblebee ise yine her biri için 2 şekilde olabilir.

$$\begin{array}{ccc} \boxed{S} \boxed{T} \boxed{}, & \boxed{} \boxed{S} \boxed{T} \boxed{}, & \boxed{} \boxed{} \boxed{S} \boxed{T} \boxed{}, \\ \boxed{T} \boxed{S} \boxed{}, & \boxed{} \boxed{T} \boxed{S} \boxed{}, & \boxed{} \boxed{} \boxed{T} \boxed{S} \boxed{}, \end{array}$$

Böylece, S ve T'nin yan yana olduğu toplam 12 durum vardır. Bunları çıkarırsak, $24 - 12 = 12$ elde edilir.

Alıştırma 14.30. AMC8-2018

Profesör Can'ın bir kitaplıkta sıralanmış dokuz farklı dilde kitabı vardır: ikisi Rusça, üçü Almanca ve dördü İspanyolca. Rusça kitapları bir arada ve İspanyolca kitapları bir arada tutacak şekilde raftaki dokuz kitabı düzenlemenin kaç yolu vardır?

Çözüm : Rusça kitaplar bir arada olması gerektiği için tamamını 1 kitap gibi düşünebiliriz. Aynı şekilde İspanyolca kitaplar da bir arada olmak zorunda olduğu için tamamını tek bir kitap gibi ele alabiliriz. Buna göre, 1 Rusça kitabı, 1 İspanyolca kitabı ve 3 Almanca kitabı kaç farklı şekilde sıralayabileceğimizi bulmaya çalışıyoruz. 5 kitabı 5! farklı şekilde sıralayabiliriz. Bu arada iki arapça kitabını kendi arasında 2! farklı şekilde, dört İspanyolca kitabını da kendi arasında 4! farklı şekilde sıralayabiliriz. Böylece, tüm kitapları koşula uygun şekilde

$$2! \cdot 4! \cdot 5! = 2 \cdot 24 \cdot 120 = 5760$$

farklı şekilde sıralayabiliriz.

Tekrarlı Sıralamalar

★ Tekrarlı Sıralamalar ★

Eğer sıralayacağımız nesneler içinde birbirinin aynı olan nesneler varsa, bu türlü sıralamalara **tekrarlı sıralama** denir. Tekrarlı sıralamada sıralama sayısı, tekrarsız olana göre azalır. Çünkü, aynı olan nesnelerin yer değişimi farklı sıralama olmaz. Örneğin, ACE kelimesinin permütasyonlarının sayısı $3! = 6$ iken, ECE kelimesinin permütasyonlarının sayısı $3!$ 'tür : ECE, CEE, EEC. **Çünkü 2 tane E harfi var ve bunların yerini değiştirirseniz farklı bir sıralama elde etmezsiniz.** Burada 2 tane özdeş (aynı) nesne olduğundan, $3! = 6$ sayısı, $2! = 2$ 'ye bölünerek doğru sıralama elde edilir.

Buna göre, KAAAN kelimesinin harflerinin sıralama sayısını hesaplırsak, 2 tane A ve 1 tane K, 1 tane N olduğundan, $4!$ sayısı, $2!$ sayısına bölünmelidir. Yani yanıt :

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

bulunur. **Bunların tamamını yazmaya çalışınız.**

KAYAK kelimesinin harflerinin sıralama sayısı da : 2 K, 2 A ve 1 Y olduğundan,

$$\frac{5!}{2!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 2} = 30$$

elde edilir. En genel halde, sıralanacak n nesneden a tanesi birbiriyle aynı, b tanesi birbiriyle aynı, c tanesi birbiriyle aynı ise, n 'li sıralamalarının sayısı

$$\frac{n!}{a!b!c!}$$

ile bulunur.

Alıştırma 14.31.

a) İZİNLİ kelimesinin harflerinin yerini değiştirerek anlamlı ya da anlamsız 6 harfli kaç farklı kelime elde edilir?

Çözüm : 3 tane İ ile, Z, N, L olmak üzere 6 harf var. 3 İ olduğu için $3!$ ile böleceğiz.

$$\frac{6!}{3!} = 120$$

elde edilir.

b) 1, 2, 2, 3, 3, 3 rakamları kullanılarak 6 rakamlı kaç sayı yazılabilir?

Çözüm : 3 tane 2, 2 tane 3 ve 1 tane 1 ile

$$\frac{6!}{3!2!} = 60$$

sayı yazılabilir.

c) 1, 2, 3 rakamlarını en az 2 kez kullanmak koşuluyla 7 rakamlı kaç sayı yazılabilir?

Çözüm : Rakamlardan biri 3 kez kullanılacaktır. 1 üç kez kullanılmışsa $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ sayı yazılır, 2 ve 3'ün üç kez durumlarında da 210 sayı elde edileceğinden toplam $3 \cdot 210 = 630$ sayı yazılabilir.

Alıştırma 14.32. AMC8-2009 ♣

Basamakları çarpımı 24 olan kaç tane 3 basamaklı sayı vardır?

Çözüm : 24 rakamların çarpımı olarak

$$24 = 1 \cdot 3 \cdot 8 = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre,

$$1, 3, 8 \text{ ile } 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ sayı yazılabilir.}$$

$$1, 4, 6 \text{ ile } 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ sayı yazılabilir.}$$

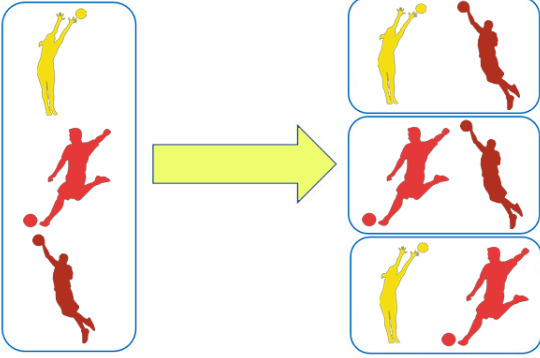
$$2, 3, 4 \text{ ile } 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \text{ sayı yazılabilir.}$$

$$2, 2, 6 \text{ ile } \frac{3!}{2!} = 3 \text{ sayı yazılabilir.}$$

Toplam : $6 + 6 + 6 + 3 = 21$ sayı vardır.

Seçme

★ Seçme (Kombinasyon)★



3 spor dalından iki tanesini kaç farklı şekilde seçebiliriz?

Belirli sayıdaki bir gruptan belirli sayıdaki kişiyi seçmek istiyoruz. Daha önce sıralamalarını gördük, fakat bu kez sadece seçme işiyle ilgileneceğiz.

Örneğin,

"5 öğrenci arasından 3 kişiyi kaç farklı şekilde seçebiliriz?"

problemine bakalım.

Burada, sıralama önemli değildir. 5 öğrenci Alp, Berk, Cem, Doğa ve Ege olsun. 3 öğrenciyi kaç farklı şekilde seçebileceğimizi inceleyelim.

1. Alp, Berk, Cem	2. Alp, Berk, Doğa
3. Alp, Berk, Ege	4. Alp, Cem, Doğa
5. Alp, Cem, Ege	6. Alp, Doğa, Ege
7. Berk, Cem, Doğa	8. Berk, Cem, Ege
9. Berk, Doğa, Ege	10. Cem, Doğa, Ege

Görüldüğü gibi, 10 farklı seçim elde edilebilir ve **sıra önemli değildir**. Yani,

Alp, Berk, Cem ile Cem, Alp, Berk

aynı seçimi ifade eder. 5 nesneden 3 nesnenin seçilme sayısına

5'in 3'lü seçimi veya 5'in 3'lü kombinasyonu denir ve

$$\binom{5}{3} \text{ veya } C(5, 3)$$

ile gösterilir.

★ En genel halde, n nesneden, m nesnenin seçilmesine n 'nin m 'li seçimi (kombinasyonu) denir ve

$$\binom{n}{m} \text{ veya } C(n, m)$$

ile gösterilir.

★ Seçme Sayısının Hesaplanması ★

n nesneden, m tanesi

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

farklı şekilde seçilebilir. Bu formüle n nesneden m tanesini **seçme sayısı formülü** denir.

Alıştırma 14.37.

Yukarıdaki formülü kullanarak aşağıdaki değerleri bulunuz. ($0! = 1$ olduğunu unutmayınız.)

a) $\binom{7}{0} =$ **Çözüm :** $\binom{7}{0} = \frac{7!}{0!7!} = 1.$

b) $\binom{7}{7} =$ **Çözüm :** $\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!0!} = 1.$

c) $\binom{7}{6} =$ **Çözüm :** $\binom{7}{6} = \frac{7!}{6!1!} = 7.$

d) $\binom{n}{n} =$ **Çözüm :** $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$

e) $\binom{n}{0} =$ **Çözüm :** $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1.$

f) $\binom{5}{2} =$ **Çözüm :** $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$

g) $\binom{8}{3} =$ **Çözüm :** $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = 56.$

h) $\binom{n}{n-1} =$ **Çözüm :** $\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!1!} = n.$

Alıştırma 14.38.

6 kişiden 3'ünü kaç farklı şekilde seçebiliriz?

Çözüm :

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!} = 20$$

olur.

Alıştırma 14.39.

$\binom{7}{3}$ ifadesi matematiksel olarak neyi ifade eder?

Çözüm : 7 nesneden 3'ünün kaç farklı şekilde seçilebileceğini ifade eder.

Alıştırma 14.40.

Bir düzgün ongenin kaç köşegeni vardır?

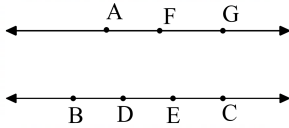
Çözüm : Ongenin 10 noktasının herhangi iki tanesi

$$\binom{10}{2} = 45$$

farklı şekilde seçilebilir. Herhangi iki noktayı bileştirirsek, kenar olmayanlar köşegen olur. O halde, köşegen sayısı $45 - 10 = 35$ bulunur.

Alıştırma 14.41. ♣

Aşağıda bir düzlemde 7 nokta verilmiştir. Köşeleri bu noktalar olan kaç üçgen çizilebilir?



Çözüm : 7 noktadan herhangi üçünü $\binom{7}{3} = 35$ farklı şekilde seçebiliriz. Ama aynı doğru üzerinde olan üç nokta üçgen oluşturmaz. Buna göre, $\binom{4}{3} = 4$ ve $\binom{3}{3} = 1$ değerlerini çıkarmalıyız. Yanıt $35 - 4 - 1 = 30$ olur.

Alıştırma 14.42.

Bir öğrencinin iki projede grubunda da olmaması koşuluyla, 7 öğrenci arasından 2 matematik ve 2 kodlama projesi öğrencisi seçilecektir. Bu dört öğrenci kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm :

$$\binom{7}{2} \binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210.$$

Alıştırma 14.43. ♣

6 kız ve 3 erkek öğrenciden oluşan 9 kişiden en az iki tanesi kız olmak üzere, 3 kişi seçilecektir. Bu seçimin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.

Çözüm : En az ikisi kız ise 2 kız 1 erkek veya 3 kız olabilir. Buradan, istenen yanıt

$$\binom{6}{2} \binom{3}{1} + \binom{6}{3} \binom{3}{0} = 65.$$

elde edilir.

Alıştırma 14.44.

4 mühendis, 5 öğretmen ve 4 doktor arasından 2 doktor, 1 öğretmen ve 1 mühendis kaç farklı şekilde seçilebilir?

Çözüm : $\binom{4}{1} \binom{5}{1} \binom{4}{2} = 120.$

Alıştırma 14.45.

8 kız ve 7 erkek öğrenciden oluşan 15 kişilik bir sınıftan proje yarışmasına katılmaları için 2 kız ve 1 erkek öğrenci seçilecektir. Bu seçimin kaç farklı şekilde yapılabileceğini bulunuz.

Çözüm : $\binom{8}{2} \binom{7}{1} = 196.$

Olasılık

★ Olasılık Kavramları ★

Olasılık, bir olayın olabilirlik yüzdesidir. Bir olay sonucunda ortaya çıkabilecek sonuçlar içinden, istenen bir durumun tüm olası durumların sayısına oranı, istenen durumun olasılığı olarak adlandırılır.

$$\text{İstenen Olasılık} = \frac{\text{İstenen durum sayısı}}{\text{Olabilecek tüm durumların sayısı}}$$

Bir olayın nasıl sonuçlanacağını görmek için yapılan işleme **deney**, bir deney sonucunda elde edilebilecek sonuçların her birine **çıktı**, bir deney sonucunda elde edilebilecek sonuçların tamamına da **olası durumlar** denir. Tüm olası durumlar arasından istenilen bir koşulu sağlayan duruma **istenen olay** denir. Aşağıdaki basit örnekleri inceleyelim.

★ İçinde **A, B, C, D, E** yazılı kağıtlar olan bir torbadan rastgele bir kağıt çekelim ve çekilen kağıtta **C** yazma olasılığını inceleyelim.

Burada deney, torbadan rastgele kağıt çekilmesidir. Olası durumlar ise, **A, B, C, D, E** yazan kağıtların herhangi birinin çekilmesidir ve bunların sayısı 5'tir. İstenen durum çekilen kağıtta **C** yazmasıdır. Bu istenen olaydır ve tüm durumlarda sadece biridir. O halde, istenen olasılık :

$$\frac{1}{5}$$

olur.

★ Bir zar attığınızda 2 gelme olasılığı

$$\frac{1}{6}$$

olur. Çünkü zarın yüzündeki sayılar 1, 2, 3, 4, 5, 6'dır ve 6 durum vardır.



★ Hakan aklından bir rakam tutsun, Gökhan'ın Hakan'ın aklından geçen rakamı bilme olasılığı

$$\frac{1}{10}$$

olur. Çünkü 10 rakam var. 0, 1, 2,...,9.

★ Alp dört renkli kareden oluşan bir tahtaya ok fırlatıyor. Ok tahtaya isabet ediyor.



Bu okun mavi kareyi vurma olasılığı $\frac{1}{4}$ olur.

Alıştırma 14.46.

a) Bir zar atıldığında 3 gelme olasılığı nedir?

Çözüm : Altı durumda birinin olasılığı $\frac{1}{6}$ olur.

b) Haftanın bir günü spora giden Berk'in çarşamba günü gitme olasılığı nedir?

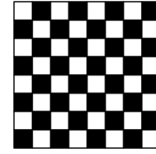
Çözüm : Yedi günden belirli bir günün olasılığı $\frac{1}{7}$ 'dir.

c) Bir torbada 20 sarı, 15 mavi top varsa, çekilen bir topun mavi olma olasılığı nedir?

Çözüm : 35 toptan 15'i mavi ise olasılık $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$ olur.

Alıştırma 14.47. AMC8-2009 ♣

64 birim kareden oluşan bir dama tahtasında, rastgele seçilen bir birim karenin dama tahtasının dış kenarına değme olasılığı nedir?



Çözüm : Dama tahtasında toplam $8^2 = 64$ birim kare vardır. Dış kenarındaki birim kare sayısı $4(8 - 1) = 28$ ve dış kenarına değmeyen $64 - 28 = 36$ kare vardır. Buna göre bu karelerden birini seçme olasılığı

$$\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

elde edilir.

Bir Olayın Olmama Olasılığı

★ Bir Olayın OLMAMA Olasılığı ★

Bir A olayının olma olasılığı $P(A)$ ise, A olayının **OLMAMA** olasılığı

$$1 - P(A)$$

olur. Örneğin, bir torbadan mavi çekme olasılığı $\frac{3}{7}$ ise mavi çekmeme olasılığı

$$1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

olur.

Alıştırma 14.48.

a) Bir paraşütçünün istenilen noktaya inme olasılığı $\frac{3}{11}$ ise, istenilen noktaya inememe olasılığı kaçtır?

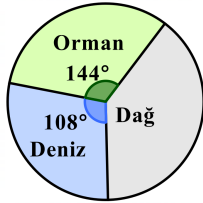
Çözüm : $1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$

b) Bir torbadan mavi top çekme olasılığı $\frac{2}{7}$, kırmızı top çekme olasılığı $\frac{4}{7}$ ise çekilen topun kırmızı ve mavi renkleri dışında bir renge sahip olma olasılığı nedir?

Çözüm : $1 - \frac{2}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

Alıştırma 14.49.

Uçaktan atlayan bir paraşütçünün inebileceği alan ve bu alandaki coğrafi yapı aşağıdaki gibidir. Paraşütçünün dağlık bölgeye inme olasılığı nedir?



Çözüm : Bütün açı 360° olduğundan dağın olduğu açı

$$360 - 144 - 108 = 108$$

olur. O halde, istenen olasılık $\frac{108}{360} = \frac{3}{10}$ bulunur.

Alıştırma 14.50.

İçinde mavi, sarı ve kırmızı renkli 40 top olan bir torbadan çekilen bir topun sarı olma olasılığı $\frac{1}{5}$ 'tir. Bu torbadaki kırmızı topların sayısı sarı topların sayısının 3 katıysa, bu torbadan kırmızı olmayan top çekme olasılığı nedir?

Çözüm :

$$\frac{\text{Sarı top sayısı}}{\text{Tüm top sayısı}} = \frac{S}{40} = \frac{1}{5} \Rightarrow S = 8$$

olur. Kırmızı topların sayısı $3 \cdot 8 = 24$ ve mavi top sayısı da $40 - 8 - 24 = 8$ olur. Kırmızı olmayan $8 + 8 = 16$ top var. Kırmızı olmayan top çekme olasılığı $\frac{16}{40} = \frac{2}{5}$ olur.

Alıştırma 14.51.

Bir torbada birbirinin aynısı 4 mavi, 6 sarı top vardır. Bu torbaya kaç mavi top daha eklenirse restgele çekilen bir topun sarı top gelme olasılığı, torbaya top eklenmeden önceki mavi gelme olasılığına eşit olur ?

Çözüm : Toplam 10 top varmış. x top eklensin.

Verilenlerden

$$\frac{4}{10} = \frac{6}{10+x} \Rightarrow 40 + 4x = 60$$

$$\Rightarrow x = 5$$

elde edilir.

Alıştırma 14.52.

Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların toplamının 10 olma olasılığı kaçtır?

Çözüm : Toplam 36 durum var. Üst yüze gelen sayıların toplamının 10 olduğu durumlar

$$\{(4, 6); (6, 4); (5, 5)\}$$

durumlarıdır. O halde, istenen olasılık $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ olur.

Alıştırma 14.53.

Bir çift zar atıldığında üst yüze gelen sayıların çarpımının 2'nin pozitif kuvveti olma olasılığı kaçtır?

Çözüm : Toplam 36 durum var. Üst yüze gelen sayıların çarpımının 2'nin pozitif kuvveti olduğu durumlar

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 2); (2, 1); (1, 4); (4, 1); \\ (2, 2); (2, 4); (4, 2); (4, 4) \end{array} \right\}$$

durumlarıdır. O halde, istenen olasılık $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ olur.

Alıştırma 14.54. AMC8-2008 ♣

1 ile 10 arasında numaralandırılmış on taş ters çevrilir. Rastgele bir taş açılır ve bir zar atılır. Zar ve taş üzerindeki sayıların çarpımının tam kare olma olasılığı kaçtır?

Çözüm : Sayıların çarpımı en fazla 60 olabilir. 60'dan küçük tam kareler 1, 4, 9, 16, 25, 36, ve 49'dır. Çarpımları bu tam kareleri veren olası sayı çiftleri aşağıdaki gibidir.

(1, 1); (1, 4); (2, 2); (4, 1); (3, 3); (9, 1);
(4, 4); (8, 2); (5, 5); (6, 6); (9, 4).

Yani, 11 durumda bir tam kare elde edilir. O halde istenen olasılık

$$\frac{11}{60}$$

elde edilir.

Alıştırma 14.55. AMC8-2009

Üç basamaklı bir tam sayı, 1, 3 ve 5 rakamlarından her birini içermektedir. Bu tam sayının 5 ile bölünme olasılığı nedir?

Çözüm : Üç basamaklı sayılar,

{135, 153, 351, 315, 513, 531}

şeklinde. 5 ile bitenler birler basamağı 5 olanlardır. Yani sadece iki tanesi 5 ile bölünebilir. O halde, istenen olasılık

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Problemler (Sayma-Sıralama-Seçme)

Prob. 14.1 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ olmak üzere,

$$\frac{8 \cdot 8! + 7 \cdot 7!}{7 \cdot 7!}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm : Hem payda hem de paydada $7!$ olacak şekilde tekrar yazıp, $7!$ parantezine alalım.

$$\begin{aligned} \frac{8 \cdot 8! + 7 \cdot 7!}{7 \cdot 7!} &= \frac{8 \cdot 8 \cdot 7! + 7 \cdot 7!}{7 \cdot 7!} \\ &= \frac{\cancel{7!}(64 + 7)}{\cancel{7!} \cdot 7} = \frac{71}{7} \end{aligned}$$

olur.

Prob. 14.2 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ olmak üzere,

$$\frac{3! \cdot 4! \cdot 5!}{6! - 2 \cdot 5!}$$

ifadesini sadeleştiriniz.

Çözüm : Paydadaki ifadeyi çarpım şeklinde yazalım. Bunun için $6! = 6 \cdot 5!$ yazıp, $5!$ parantezine alalım.

$$\begin{aligned} \frac{3! \cdot 4! \cdot 5!}{6 \cdot 5! - 2 \cdot 5!} &= \frac{3! \cdot 4! \cdot 5!}{5!(6 - 2)} \\ &= \frac{3! \cdot 4! \cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!} 4} \\ &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4} = 36 \end{aligned}$$

olur.

Prob. 14.3 AMC8-2020

$5! \cdot 9! = 12 \cdot N!$ eşitliğini sağlayan N sayısı kaçtır?

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5! \cdot 9! &= 12 \cdot N! \Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 9! = 12 \cdot N! \\ &\Rightarrow 12 \cdot 10 \cdot 9! = 12 \cdot N! \\ &\Rightarrow 12 \cdot 10! = 12 \cdot N! \end{aligned}$$

eşitliğinden $N = 10$ elde edilir.

Prob. 14.4 m ve n doğal sayıları için, $20! = 3^m \cdot n$ eşitliği sağlanıyorsa, m en fazla kaç olabilir?

Çözüm : $20!$ içinde 8 tane 3 çarpanı olduğu görülebilir.

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ - 18 & (6) \\ \hline 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 20 & 9 \\ - 18 & (2) \\ \hline 2 & \end{array} \quad 6 + 2 = 8$$

Prob. 14.5 $33!$ sayısı 3'ün en fazla kaçınıcı kuvvetine bölünür?

Çözüm :

$$33 \div 3 = 11, \quad 33 \div 9 \simeq 3, \quad 33 \div 27 = 1$$

olduğundan $11 + 3 + 1 = 15$ 'inci kuvvetine bölünebilir.

Prob. 14.6 AJHSME-1990

Bir sırada yan yana 120 koltuk var. Bir sonraki oturacak kişinin mutlaka bir başkasının yanında oturması için, dolu olması gereken koltuk sayısı **en az** kaç olmalıdır?

Çözüm :



Dolu olan koltukları $\otimes$ ile boş koltukları $\bigcirc$ ile gösterelim. Bir sonraki oturacak kişinin mutlaka bir başkasının yanında oturması için ve en az dolu koltuk için, dolu koltuklar arasında iki boşluk bırakabiliriz. İlk koltuğu da boş alarak başlarız. Böylece,



biçiminde oturma düzeni belirlenebilir. Böylece, bir sonraki oturacak kişi mutlaka bir kişinin yanına oturmak zorunda kalacaktır. Koltukları $\bigcirc \otimes \bigcirc$ biçiminde üçerli gruplarsak her üçerli grupta bir dolu koltuk olacağından, 120 koltukta 40 dolu koltuk olur.

Prob. 14.7 10 kişilik bir sınıftan, 1 başkan, 1 başkan yardımcısı ve 1 nöbetçi öğrenci kaç farklı şekilde seçilir?

Çözüm : 10 kişilik bir sınıftan 1 başkan 10 farklı şekilde seçilir. Geriye kalan 9 kişi arasından 1 başkan yardımcısı 9 farklı şekilde seçilir. Geriye 8 kişi kaldı. Bu sekiz kişiden de nöbetçi öğrenci 8 farklı şekilde seçilebilir. O halde, 1 başkan, 1 başkan yardımcısı ve 1 nöbetçi öğrenci

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

farklı şekilde seçilebilir.

Prob. 14.8 7 kişiden 4'ü kaç farklı şekilde sıralanır?

Çözüm :

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$$

farklı şekilde sıralanır.

Prob. 14.9 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarını kullanarak 3 basamaklı rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?

Çözüm :

$$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$$

sayı yazılabilir.

Prob. 14.10 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 rakamlarını kullanarak 3 basamaklı rakamları farklı kaç sayı yazılabilir?

Çözüm :

$$6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$$

sayı yazılabilir.

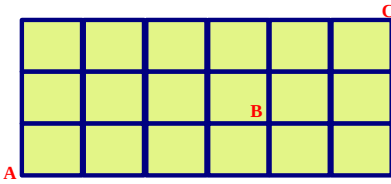
Prob. 14.11 5 öğrencinin katıldığı bir sınavda 50 puanın üstünde puan alan öğrenciler geçmekte, altında kalan öğrenciler ise kalmaktadır. Bu sınav geçme-kalma durumuna göre kaç farklı şekilde sonuçlanabilir?

Çözüm : Beş öğrencinin herbiri için 2 durum vardır. Ya geçer, ya kalır. O halde,

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

farklı şekilde sonuçlanabilir.

Prob. 14.12 Keloğlan, A noktasından başlayarak çizgiler üzerinden ve en kısa yoldan önce B'ye, daha sonra da C'ye gidilecektir. Kaç farklı şekilde gidebilir?



Çözüm : En kısa yoldan gidebilmesi için sadece sağa ve yukarı gitmesi gerekir. A'dan B'ye en kısa yoldan gitmek için 4 sağa ve 1 yukarı gitmelidir ve bu gidişte hareket sırası farklı olabilir. Yukarı hareketi Y, sağa hareketi S ile gösterelim. SSSSY gösterimi, 4 kez sağ bir kez yukarı gitmeyi gösterir. Buna göre, A'dan B'ye gidiş sayısı 4S ve 1Y'nin sıralanış sayısıdır ve

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

bulunur. Benzer şekilde, B'den C'ye ise 2Y ve 2S nin sıralanış sayısı kadar gidebilir ve bu da

$$\frac{4!}{2!2!} = 6$$

bulunur. O halde, çarpım kuralına göre, A'dan B'ye $5 \times 6 = 30$ farklı şekilde gidebilir.

Prob. 14.13 10 kişiden 6 kişiyi kaç farklı şekilde seçebilirsiniz?

Çözüm :

$$\begin{aligned} \binom{10}{6} &= \frac{10!}{6!4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \end{aligned}$$

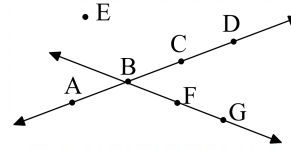
Prob. 14.14 Bir sınıfta 5 erkek ve 7 kız öğrenci vardır. Bu sınıftan 1 tane erkek ve 2 tane kız öğrenci seçilecektir. Kaç farklı şekilde seçilir?

Çözüm :

$$\binom{5}{1} \binom{7}{2} = 5 \cdot 21 = 105$$

farklı şekilde seçilir.

Prob. 14.15 Aşağıdaki 7 noktanın konumları verilmiştir. Bu 7 noktadan aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta kaç farklı şekilde seçilebilir?

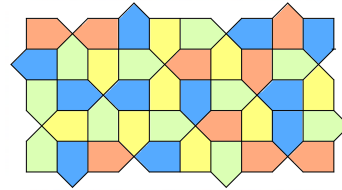


Çözüm :

$$\binom{7}{3} - \binom{4}{3} - \binom{3}{3} = 35 - 4 - 1 = 30$$

farklı şekilde seçilebilir.

Prob. 14.16 Aşağıdaki 40 bölümden oluşan bir şehir planı verilmiştir. Koray'ın evi bu bölümlerden birindedir.



a) Koray'ın evi hakkında hiç bir bilgisi olmayan kuzeni onun evini doğru yerde tahmin etme olasılığı nedir

Çözüm : Hiçbir bilgi yoksa olasılık $\frac{1}{40}$ olur.

b) Kuzeni Koray'ın evinin turuncu bölgelerden birinde olduğunu biliyorsa, doğru tahmin etme olasılığı nedir?

Çözüm : 9 turuncu bölüm olduğundan $\frac{1}{9}$ olur.

c) Kuzen'i şehre girince ilk gün bir otelde kalıyor. Bu otelin mavi bölgelerden birinde olma olasılığı nedir?

Çözüm : 11 mavi bölge var. Olasılık $\frac{11}{40}$ olur.

d) Koray'ın kuzeni şekildeki bölümlerden bir tanesini satın alıyor. Bunun yeşil veya sarı bölüm olma olasılığı nedir?

Çözüm : 11 yeşil ve 9 sarı bölüm var. Toplam 20. İstenen olasılık $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ olur.

Prob. 14.17 AMC8-2019

Bir plajda 50 kişi güneş gözlüğü takıyor ve 35 kişi şapka takıyor. Bazı insanlar hem güneş gözlüğü hem de şapka takıyor. Şapka takan kişilerden biri rastgele seçilirse, bu kişinin de güneş gözlüğü takma olasılığı $\frac{2}{5}$ 'dir. Bunun yerine güneş gözlüğü takan kişilerden biri rastgele seçilirse, bu kişinin de şapka takıyor olma olasılığı nedir?

Çözüm : Şapka ve güneş gözlüğü takan kişi sayısı

$$\frac{2}{5} \cdot 35 = 14$$

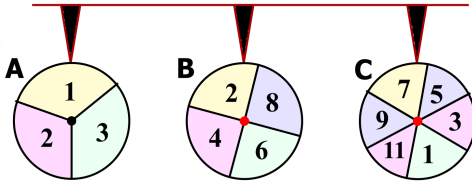
olur. O halde güneş gözlüğü takan 50 kişiden 14'ünde şapka da vardır. Böylece istenen olasılık

$$\frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

bulunur.

Prob. 14.18 AMC8-2006

Can A, B ve C şans çarklarını döndürüyor ve ortaya çıkan sayıları topluyor. Bu toplamın tek sayı olma olasılığı kaçtır?



Çözüm : Toplamın tek sayı olması için tamamının tek veya iki tanesinin çift birinin tek olması gerekir. Fakat B çarkında tüm sayılar çift olduğundan tek sayı gelemeyeceğinden Tek + Tek + Tek durumu mümkün değildir. C çarkında da tüm sayılar tek olduğu için toplamın çift olması için A ve B çarklarındaki sayıların çift olması gerekir. Buna göre, A çarkında çift olması olasılığı $\frac{1}{3}$ ve B çarkında çift olma olasılığı da $\frac{4}{4} = 1$ olduğundan, istenen olasılık $\frac{1}{3}$ elde edilir.

Prob. 14.19 AMC8-2004

Bir partide bekar kadınlar ve evli çiftler vardır. Rastgele seçilen bir kadının bekar olma olasılığı $\frac{2}{5}$ 'dir. Odadaki insanların kaçta kaç evli erkektir?

Çözüm : Rastgele seçilen bir kadının bekar olma olasılığı $\frac{2}{5}$ olduğundan kadın sayısı 5'in katıdır. Kabul edelim ki 5 kadın olsun. O halde, $\frac{2}{5} \cdot 5 = 2$ tanesi bekadır. 3 tanesi ise evlidir. Yani, 3 erkek vardır. Odada 5 kadın ve 3 erkek olduğundan odadaki erkeklerin oranı $\frac{3}{8}$ elde edilir.

Prob. 14.20 AMC8-2011

Hilesiz bir zar iki kez atılıyor. Gelen ilk sayının ikinci sayıdan büyük veya ona eşit olma olasılığı nedir?

Çözüm : İki atış sonunda gelen sayılar $6 \cdot 6 = 36$ farklı şekilde olabilir. Her iki atışta aynı sayının geldiği durumların sayısı ise 6'dır. O halde, kalan $36 - 6 = 30$ durumda, atışlardan birindeki sayı diğerindeki sayıdan büyüktür. Hatta, birinci atışta gelen sayının ikinci atışta gelen sayıdan büyük olma durumlarının sayısı ile, ikinci atışta gelen sayının birinci atışta gelen sayıdan büyük olma durumlarının sayısı eşittir. Yani, birinci atışta gelen bir sayının ikinci atışta gelen sayıdan büyük olduğu durum sayısı $30 \div 2 = 15$ olur. Böylece, ilk gelen sayının ikinci sayıdan büyük veya ona eşit olma olasılığı

$$\frac{15 + 6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

elde edilir.

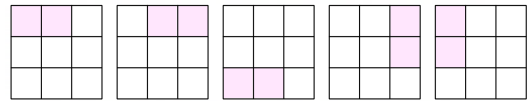
Prob. 14.21 AMC8-2003

Hilesiz bir zar masa üstüne atıldığında sadece alt yüzü görülmez. Zarın görülebilen yüzlerin çarpımının 6 ile bölünme olasılığı nedir?

Çözüm : Görülen yüzlerde 2 ve 3'ün katı varsa çarpım 6 ile bölünür. Alt yüzde 6 yoksa görülen yüzlerden biri mutlaka 6 olacağından çarpım daima 6'nın katı olur. Eğer alt yüzde 6 varsa, görülebilen yüzlerde 2 ve 3 olacağından çarpımları yine 6 ile tam bölünür. Dolayısıyla görülen yüzlerdeki sayıların çarpımı daima 6'nın katıdır ve istenen olasılık 1'dir.

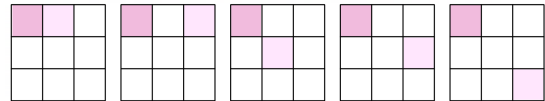
Prob. 14.22 AJHSME-1990

Dokuz karenin tam olarak ikisi boyanarak kaç farklı desen yapılabilir? Bir boyalı deseni döndürerek veya simetriği alınarak elde edilebilen tüm desenler aynı desen kabul ediliyor. Örneğin, aşağıda gösterilen boyalı desenlerin tamamı aynı kabul edilir.

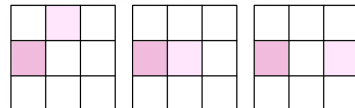


Çözüm : Farklı boyama sayısını iki durumda sayalım.

1. Eğer köşedeki karelerden biri boyalı ise, geri kalan kareler 5 farklı şekilde boyanabilir.



2. Eğer köşelerde olmayan karelerden biri boyalı ise, geri kalan kareler 3 farklı şekilde boyanabilir.



Böylece, toplam $5 + 3 = 8$ farklı boyama vardır.

Prob. 14.23 AMC8-2019

Alp'in 24 elması vardır. Üç kişiden her birinin en az iki elması olacak şekilde, bu elmaları Berk ve Can ile adet olarak kaç farklı şekilde paylaşabilir?

Çözüm : İlk önce Alp'in 2 tane elması olduğunu varsayalım. Geriye 22 elma kalır.

Berk	Can
2	20
3	19
4	18
⋮	⋮
20	2

Yani, 22 elmayı Berk ve Can'a $20 - 2 + 1 = 19$ farklı şekilde dağıtabilir.

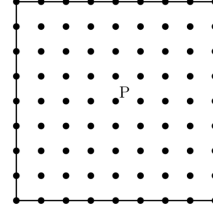
Eğer Alp 3 elma alsaydı. Geriye 21 elma kalır ve bu kez 18 farklı şekilde dağıtıldı. Eğer Alp 4 elma alsaydı. Geriye 20 elma kalır ve bu kez 17 farklı şekilde dağıtıldı. Bu şekilde devam edersek, Alp 20 elma alırsa, Berk ve Can'a 2'ser elma dağıtılabilir ve 1 farklı şekilde dağıtıldı. Buna göre, toplam dağıtım sayısı

$$19 + 18 + 17 + \cdots + 2 + 1 = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

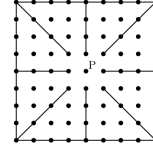
elde edilir.

Prob. 14.24 AMC8-2019

8×8 biçimindeki birim karelerden oluşan bir ızgaranın 81 köşe noktası şekilde gösterilmiştir. P noktası karenin merkezindedir. Geri kalan 80 noktadan rastgele bir Q noktası seçiliyor. PQ doğrusunun kare için bir simetri doğrusu olma olasılığı nedir?



Çözüm :



P noktasından geçen bir simetri doğrusunun gidebileceği 8 yön vardır ve her yönde 4 nokta vardır. Buna göre, istenen olasılık $\frac{4 \times 8}{80} = \frac{2}{5}$ elde edilir.

Yanıtlar

Alıştırmalar (Üslü Sayılar)

1.1. a) 3^8 b) 4 c) 9

1.2.

$$a = c = e < d < b$$

1.3. a) 12 b) 10

1.4. Öğrenciye Bırakılmıştır

1.5. 5

1.6. 198

1.7. 2, 3, 7 ve 8 olamaz.

1.8. 36 (Birler basamağı 0,1,5,6 olan iki basamaklı sayıların sayısını hesaplayınız.)

1.9. 6 şekilde yazılabilir : 2^{12} , 4^6 , 8^4 , 16^3 , 64^2 , 4096^1 .

1.10. 33

1.11. 3^{66}

1.12. a) 5^6 b) 7^2

c) $12 \cdot 10^4$ d) 3

e) $2^5 \cdot 10^{11}$

1.13. D) hatalı

1.14. a) 8 b) 10

1.15. a) 192 b) 27

1.16. a) 25 b) 4 c) 20 d) $3^2 2^3 = 72$ e) 5^{34}

1.17. 35 ile çarpılırsa 420'nin karesi olur.

1.18. a) $3^2 - 2^2 = 5$ olabilir, 6 olamaz b) Olamaz

1.19. a) 10^5 b) 7

1.20. a) $k = 11$,

b) $m = 22$

c) $n = 8$.

1.21. $b > a > c$

1.22. 11

1.23. a) 14 b) 12

c) 19

1.24. 42

1.25. 8

1.26. 1

Problemler (Üslü Sayılar)

1.1. a) $\star = 5$ olmalıdır.

b) $\blacktriangle = 6$ ve $\blacksquare = 3$ olacağından. $\blacktriangle^{\blacksquare} = 6^3 = 216$ olur.

1.2. 6^2 eklenirse sonuç 10^2 olur.

1.3. 420

1.4. 20

1.5. 9 basamaklı $(125 \cdot 10^3 \cdot 64 \cdot 20 = 16 \cdot 10^7$ ve $m + n = 23$ olur.)

1.6. 51

1.7. 279

1.8. 13

1.9. 1 tanesi tam kare değildir. (2^{2017})

1.10. 6

1.11. 4

1.12. 8128

1.13. Tamamı Pisagor üçlüsüdür.

1.14. 8

Alıştırmalar (Doğal Sayılarda İşlemler)

2.1. 7

2.2. 14

2.3. 93

2.4. 296

2.5. 891

2.6. 17

2.7. Sadece III.

2.8. 7

2.9. a) 110 b) 20.

2.10. a) 49 b) 14.

2.11. 30

2.12. 324

2.13. a) 3^{10}

b) $6^5 = 7776$ c) 26

d) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8064$

e) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 9 = 6480$

2.14. 1881

2.15. a) 17 b) 19

c) 25 d) 11 e) 26

f) 28 g) 24

2.16. a) 13 b) 33

c) 28

2.17. 10

2.18. a) 7 b) 15 c) 17

2.19. a) 1920

b) $2 \cdot 19 + 1 = 39$.

2.20. 100

2.21. 56

2.22. $7 \cdot (10^{10} - 1)$.

2.23. 4444

2.24. $U = 3$.

2.25. a) 191 900

b) 11100 c) 2601

d) 7220 e) 16093

2.26. 12

2.27. 696.

2.28. 7

2.29. $10^6 + 10^3 + 1 = 1001001$.

2.30. 11

2.31. Kanıt

2.32. 8

2.33. $a^2 + a \cdot b + a \cdot c$

2.34. $a^3 + a^4 - a^2$

2.35. $7 \cdot 10^{10}$

2.36. $B - A$

2.37. 9. kuvveti

2.38. 4996

2.39. 3230

2.40. 19

2.41. 20

2.42. 17

Problemler (Doğal Sayılarda İşlemler)

2.1. 9402

2.2. 26

2.3. a) 252 b) 17

2.4. 196

2.5. 203

2.6. 13

2.7. $10 \cdot 20 = 200$ günde biter.

2.8. 39

2.9. 35

2.10. 5.gün

2.11. 132

2.12. 91

2.13. 20

2.14. 24

2.15. 17

2.16. 16

2.17. 31

2.18. 5

2.19. 62

2.20. $5 \left(\frac{146}{35} = 4, 1 \right)$ olduğundan en az 5 dersliğe ihtiyaç vardır.)

2.21. 6, (252, 403, 574, 765, 976, 736).

2.22. 800

2.23. 6

2.24. 965410

2.25. 37

2.26. 84

2.27. 22

2.28. 700

2.29. 13

2.30. 120

Alıştırmalar (Bölme ve Bölünebilme)

3.1. 258

3.2. 245

3.3. 81

3.4. 9

3.5. 10 çarpanı var. Tam kare olanlar 1, 4 ve 16.

3.6. a) 8 b) 4 c) 4.

3.7. 1

3.8. $2^2 \cdot 5 \cdot 7 = 140$

3.9. 57

3.10. $22 - 7 = 15$.

3.11. 9

3.12. 120 veya 210.

3.13. 42

3.14. Öğrenci sayısı 5'tir. Alp 38 şeker almıştır.

3.15. a) 11 | 132

b) 9 | 144

c) $A | B$ d) $A | C$

e) $12 \nmid 121$

3.16. a) "A sayısı 11'in katıdır" veya "A sayısı 11 ile tam bölünür."

b) "A sayısı 11 ile bölündüğünde 4 kalanını verir."

c) "A sayısı B sayısını bölerse, A sayısı A + B sayısını da böler."

3.17. a) 0,2,4,6,8

b) 0,4,8 c) 3 d) 4.

3.18. 2 ve 3 olamaz.

3.19. 2023^2 .

3.20. a) 1, 4 veya 7 b) 6.

3.21. 9876510

3.22. 1

3.23. 26 ve 62

3.24. 6

3.25. 12

3.26. Sadece e)

3.27. a) 8 b) 5

c) 3 d) 6

3.28. a) 3 b) 0

3.29. 5

3.30. 3

3.31. 0

3.32. 7

3.33. 32

3.34. 1

3.35. 4 veya 6

3.36. 6

3.37. 1

3.38. a) 301 b) 5

3.39. $A = 2$.

3.40. 6

3.41. 987651

3.42. Kuraldan

3.43. a) Evet b) $m = 0$ c) 9 d) 1 e) 98736.

3.44. 4 ve 5. (30 sayısı hem 2 hem de 10 ile bölünür ama 20 ile bölünemez)

3.45. 6, (1, 7, 17, 7·17, 17·17, 7·17·17)

3.46. 1

3.47. a) 6 b) 9.

3.48. $4n, 4n + 1, 4n + 2, 4n + 3$.

3.49. Hepsiyile yazılır.

Problemler (Bölme ve Bölünebilme)

3.1. 8

3.2. 9

3.3. 810

3.4. 8775

3.5. 1

3.6. 936

3.7. 0

3.8. 2 veya 6.

3.9. 25

3.10. 61

3.11. 11

3.12. 4

3.13. 1

3.14. 4

3.15. $A = 5$

3.16. 1

3.17. 2

3.18. 11

Alıştırmalar (Asal Sayılar)

4.1. Tamamı

4.2. 131

4.3. 8 tane. 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

4.4. a) $n = 4$ için 25 b) $n = 19$ için 115.

4.5. 3, 7 ve 31 olmak üzere 3 tane.

4.6. 7 ve 13.

4.7. 3 tane : 3,5 ve 17.

4.8. a) $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ tane. b) 1

4.9. 166

4.10. a) 23 b) 47

4.11. 319

4.12. 3, $n \in \{1, 9, 15\}$

4.13. a) $2^2 3^3$ b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

4.14. a) $2^2 3^3$ b) $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

4.15. 37

4.16. 6

4.17. 7

4.18. 810

4.19. $114 + 1 = 115$

4.20. 11500

4.21. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

4.22. a) 18, b) $18 - 6 = 12$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ dışındakiler.

4.23. 10

4.24. 9

4.25. 14

4.26. 4

4.27. a) 3 b) 3

c) $6\sqrt[4]{3}$ d) $2\sqrt[3]{6}$ e) 6.

4.28. 12

4.29. d)'de $2\sqrt[5]{2^1 3^5}$ olarak ve e) de $2\sqrt[5]{3}$ olarak çıkabilir.

4.30. a) 7 b) 4

Problemler (Asal Sayılar)

4.1. 7 tane

(2, 3, 5, 7, 13, 17, 19.)

4.2. a) $\{3, 5\}$; $\{5, 7\}$; $\{11, 13\}$

b) 6.

4.3. 6

4.4. 0

4.5. $97 + 11 = 108$.

4.6. 5

4.7. a) 5 b) $2^7 = 128$ c) $n = 2^6 3^1 = 192$.

4.8. 14

4.9. a) asal değil

b) asal değil c) asal d) asal değil.

4.10. 8

4.11. 720

4.12. $n = 5$

4.13. 7523

4.14. 115

4.15. Sadece c) ve g) doğru diğerleri yanlıştır.

Alıştırmalar (Ortak Bölen - Ortak Kat)

5.1. 18

5.2. 60

5.3. 3

5.4. 24

5.5. 18

5.6. 9

5.7. EBOB(90,54,72)=18, $5 + 3 + 4 = 12$.

5.8. 27

5.9. 60

5.10. $3 \cdot 16 \cdot 7 = 336$

5.11. $60 - 20 = 40$.

5.12. 60

5.13. 36,54,90 için EKOK= 540, EBOB=18

5.14. a) 63. b) 483

5.15. EBOB= $2 \cdot 3^2$, EKOK= $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$.

5.16. 12

5.17. $k + m + n = 4 + 2 + 1 = 7$

5.18. 93

5.19. Sadece b) doğru

5.20. Sadece a) doğru

5.21. 4

5.22. 29

5.23. EBOB'ları 1'dir.

Problemler (Ortak Bölen - Ortak Kat)

5.1. 8

5.2. 203 veya 77

5.3. 420

5.4. 20

5.5. 54

5.6. 22

5.7. 8

5.8. 80

5.9. 5

5.10. 21

5.11. 97

5.12. a) 99 b) 8

5.13. a) 12 b) 4 c) 0

5.14. a) 3 b) 975

Alıştırmalar (Ardışık Sayıların Toplamı)

6.1. a) 99 b) 50 c) 49 d) 13 e) 20

6.2. 146

6.3. 378

6.4. 425

6.5. 105

6.6. a) 120^3 b) 111 c) 22

6.7. 45

6.8. 112

6.9. 117

6.10. 48

6.11. 613

6.12. 125

6.13. 28

6.14. 244

6.15. a) 66 b) 1225 c) 1159

6.16. $S = 495$

6.17. 101 terim var Toplam : 31007

6.18. 90 sayı vardır. Toplam : 45135

6.19. 47400

6.20. 5051

6.21. 21

6.22. 425

6.23. 13

6.24. 286

6.25. 15161

6.26. 111

6.27. 1

6.28. 3, 5 ve 19

6.29. 7

Problemler (Ardışık Sayıların Toplamı)

6.1. 1800

6.2. 1200

6.3. 190

6.4. 715

6.5. 897

6.6. a) 120 b) 1240 c) 2047 d) 1275

6.7. 1017

6.8. 345

6.9. 0

6.10. 45-inci satırın soldan 10-uncu sayısıdır.

6.11. 1050

6.12. 33

6.13. 31

6.14. 5

6.15. 2

6.16. 30

Alıştırmalar (Kümeler)

7.1. a), b) ve e) kümedir.

7.2. a) 4, b) $4 \in A$ c) $5 \notin A$ d) 2 e) 3

7.3. b), d) ve g) boş kümedir.

7.4. 3	7.29. c)	8.7. 200	9.4. 17	9.31. a) 1, 31
7.5. 1		8.8. -13	9.5. a) 7 b) $\frac{40}{3}$	b) -0, 95
7.6. 3	Problemler (Kümeler)	8.9. -12	9.6. $\frac{-251 + 101}{11}$	9.32. 0, 1582
7.7. 2		8.10. 60	olmalıydı.	9.33. 1, 3
7.8. 7	7.1. 4	8.11. 12	9.7. $\frac{19}{27}$	9.34. 47, 4
7.9. 0	7.2. 39	8.12. $x = 6$, $y = -2$, $z = 10$, $x - y + z = 18$	9.8. $\frac{4}{3}$	9.35. a) Devirli değil b) Devirli değildir.
7.10. $A = \{x : x \text{ tek sayı}, 2 < x < 10\}$	7.3. 1150	8.13. -12	9.9. 26	c) Devirli d) Devirli
7.11. a. 36, b. 16,	7.4. 6	8.14. a) $-2x + 3y + 5$ b) $-15x + 12y + 18$	9.10. a) $\frac{17}{12}$ b) $\frac{1}{32}$	9.36. a) $\frac{25}{9}$ b) $\frac{13}{990}$
c. 5 d. 2, e. 11, f. 7,	7.5. 6	8.15. 3	9.11. D	c) $\frac{19}{18}$ d) $\frac{4}{75}$
g. 14, h. 14, i. 14	7.6. 7	8.16. 4, S= 40000	9.12. a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{3}{8}$	9.37. 25
j. 22, k. 28, l. 22,	7.7. 306	8.17. a) 64, b) -64 c) -8 d) 1 e) 8 f) -4	c) $\frac{4}{15}$ d) $\frac{8}{3}$	9.38. 84
m. 28, n. 5, o.12.	7.8. 14	8.18. -5	9.13. $-\frac{23}{17}$	9.39. 54
7.12.	7.9. 21	8.19. 1	9.14.	9.40. 60
$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$,	7.10. a) 74 b) 26	8.20. 50 böleni vardır ve toplamı 0'dır.	$5 - 2 \div \left(3 - \frac{3}{4}\right)$	9.41. 17
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,	c) 14	8.21. 112	9.15. $\frac{37}{9}$	9.42. 29 veya 22
$A \setminus B = \{1, 2\}$,	7.11. 3	8.22. 25	9.16. $\frac{17}{11}$	Problemler (Rasyonel Sayılar)
$B \setminus A = \{7\}$.	7.12. 99	8.23. a) 7 b) 21 c) 2 d) 0 e) 8 f) 2^5 g) 24	9.17. $\frac{16}{5}$	9.1. $\frac{37}{70}$
7.13. Keman ve bağlama çalıp gitar çalamayanlar.	7.13. 3	8.24. 21 ve 9	9.18. $\frac{77}{60}$	9.2. $\frac{4}{3}$
7.14. 101 ve 11	7.14. a) 101 b) 101 c) 10	Problemler (Tam Sayılar)	9.19. $\frac{29}{18}$	9.3. $-4 < \frac{-91}{23} < -3$
7.15. $(B \cap C) \setminus A$	7.15. 146	8.1. 90	9.20.	9.4. 13
7.16. a) Sınıftaki gözlüklü olmayan mavi gözlü erkek öğrenciler	7.16. 1504	8.2. D)'nin toplamı 1 değildir.	a) $\frac{7}{3} < \frac{31}{12} < \frac{11}{4} < 3$ b) $\frac{4}{3} > \frac{15}{13} > \frac{10}{9} > \frac{12}{11}$	9.5. $\frac{18}{35}$
7.17. 3, (Hatay, Bursa, Yozgat)	7.17. 45	8.3. (A)	9.21. 4	9.6. $\frac{13}{8}$
7.18. a) 78 b) 11 c) 1	7.18. 8	8.4. 11	9.22.	9.7. $d > a > c > b$
7.19. 290	7.19. a) 4 b) 15 c) 107	8.5. 10	$b < a < 0 < d < c$	9.8. 86,25
7.20. 34	7.20. 4	8.6. 0	9.23. 34	9.9. 4
7.21. 10	7.21. 4	8.7. 131	9.24. a) 56 b) 14 c) 120 d) 18 e) 48	9.10. 250
7.22. 63	7.22. 12	8.8. 9 ve -1	9.25. $\frac{11}{30}$	9.11. -0.025
7.23. 3	7.23. 12	8.9. 60	9.26. 27	9.12. $A > 0, B < 0, C < 0$
7.24. 7	7.24. $\{2, 4, 7, 9\}$	8.10. -132	9.27. Sadece a) yanlış	9.13. $\frac{1}{8}$
7.25. 11	7.25. 8	8.11. +1	9.28. a) 0, 0023 b) 0, 0301 c) 520 d) 20300	9.14. $b > a > c$
7.26. a) 47 b) 53 c) 20 d) 13 e) 38	Alıştırmalar (Tam Sayılar)	8.12. 8	e) 0, 000023	9.15. -1, 2
7.27. $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$ ve $\{a, b, c\}$ olmak üzere 8 tanedir.	8.1. a) -1, b) 8 c) -15 d) -112 e) -3 f) 15 g) 11	Alıştırmalar (Rasyonel Sayılar)	9.29. 0, 0275	9.16. $\frac{141}{142}$
7.28. a), b) ve e) yanlış, c) ve d) doğru	8.2. -12, 3, 12, -12 8.3. a)-2, b)+2, c)-2, d)-2 8.4. a) -42, b) 19 c) 23 d) -12 e) 2, f) -6 g) 4	9.1. $\frac{1}{2}$ 9.2. a) $\frac{25}{27}$ b) 42 c) $\frac{2}{9}$ 9.3. 8	9.30. 144, 15 veya 148, 23 olabilir.	9.17. 445
	8.5. 50			9.18. 40
	8.6. -280			9.19. $a < c < d < b$

- 9.23. %83
 9.24. %75
 9.25. %44
 9.26. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$
 9.27. 1
 9.28. %16, 7
 9.29. %30
 9.30. %40
 9.31. D) 500'den 1000'e.
 9.32. %40
 9.33. 55
 9.34. $\frac{22}{45}$
 9.35. 14
 9.36. 30
 9.37. %20

Alıştırılmalar (Cebirsel İfadeler)

- 10.1. a) $15x + 3y + 2$
 b) $8a^2 + 11a + 5$
 c) $x^2 + 4xy + 2y^2$
 10.2. a) $6x - 14y$
 b) $-15a^3$ c) $5x + 5$
 d) $9x - 3y$
 e) $-2x + 6$
 f) $18 - 6x$
 g) $-6x + 10y - 4$
 h) $6x + 2$
 i) $5x + y - 3$
 10.3.
 a) $3x^2 + xy - 10y^2$
 b) $x^2 - 7x + 12$
 c) $x^2 - 4$
 d) $x^4 - 7x^2 + 12$
 e) $a^2 - 7ab + 12b^2$
 f) $a^2 - 7ab + 3a + 12b^2 - 9b$
 g) $8a^3 + b^3$
 10.4. a) $\frac{2-x}{6}$
 b) $\frac{-3x-8}{7}$
 10.5. a) $\frac{41x-28}{10}$
 b) $\frac{13x-16}{12}$

10.6. a) $x - 4$ b) $\frac{3}{4}$

c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1+a}{1+b}$

10.7. 4

10.8. 1

10.9. Her n için doğrudur

10.10. 12

10.11. $\frac{3}{5}$

10.12. a) $4a^2 + 20ab + 25b^2$

b) $9x^2 - 42xy + 49y^2$

10.13. a) $4a^2 - b^2$

b) $4x^2 - 9y^2$

10.14. 600

10.15. 400

10.16. 1. (Sadece 17)

10.17. $\frac{5}{3}$

10.18. 150

10.19. $\{1, 2, 5, 10, -2, -5, -10\}$

10.20. $\{3, 13, 1, -9\}$

Problemler (Cebirsel İfadeler)

10.1. a) $\frac{-1}{6}$ b) $\frac{1}{2x}$

c) $\frac{5}{x^2-1}$ d) $2y$

10.2. 0 ve 3 olamaz.

10.3. 2

10.4. 1112

10.5. 4

10.6. 4

10.7. $\frac{33}{4}$

10.8. $\frac{12}{5}$

10.9. a) 4 b) $\frac{5}{6}$

10.10. $\frac{37}{7}$

Alıştırılmalar (Denklem ve Denklem Çözümü)

11.1. a) $2(x-2) = x-1$

b) $x = 2x-3$

11.2. a) $\frac{31}{3}$ b) $\frac{20}{7}$

c) $\frac{-5}{3}$

11.3. $\frac{1}{3}$

11.4. a) $\frac{12}{5}$ b) $\frac{15}{4}$

c) $\frac{20}{3}$ d) $\frac{12}{5}$

11.5. $\frac{43}{6}$

11.6. $\frac{2}{39}$

11.7. 68

11.8. 38

11.9. $\frac{31}{4}$

11.10. $\frac{1}{2}$

11.11. 40

11.12. 7

11.13. 12

11.14. 45

11.15. 27

11.16. 4

11.17. a) 11

b) 99 c) 77

11.18. $\frac{31}{2}, \frac{-9}{2}$

11.19. $x = 4$

11.20. 0, 5

11.21. 1, $(a, b) = (3, 1)$

11.22. 0

11.23. 30

11.24. 171, 221 veya 102

11.25. 300, 204 veya 111 olabilir.

11.26. 6.

11.27. 13

11.28. $A = 2$

11.29. 495

11.30. $A = 1$

11.31. $B = 4$

11.32. 25

11.33. 29

11.34. 6

11.35. $\frac{11}{5}$

11.36. $A = 1, B = 4$ ve $C = 3$

11.37. 21

11.38. $A = 13, B = 2$

11.39. $x = 7, y = -4$

11.40. 9

11.41. 5

11.42. 6 tane : $x \in \{-6, -5, -4, -3, -2, -1\}$

11.43. 2 tane $\{0, 1\}$

11.44. 12

11.45. 13

11.46.

$-40 \leq x \cdot y \leq 56$

11.47. 7

11.48. 994

11.49. 8

11.50. 495

11.51. 6

11.52. 35

11.53. 138

11.54. 5

Problemler (Denklem ve Denklem Çözümü)

11.1. $\frac{14}{11}$

11.2. 16

11.3. 4

11.4. $x = \frac{1}{3}$

11.5. 2

11.6. $y = \frac{x}{10}$

11.7. $x = 40y$

11.8. 130

11.9. 56

11.10. 29

11.11. 12

11.12. $\frac{5}{8}$

11.13. 20

11.14. 3

11.15. $\frac{5}{4}$

11.16. 17

11.17. 5

11.18. 2

11.19. 2

11.20. 18

11.21. 2

11.22. 42

11.23. 44

11.24. 140

11.25. 2, 5

11.26. 7

11.27. 500

11.28. 225

11.29. III ve IV doğru.

11.30. 6

11.31. 4

11.32. 800

11.33. 24

11.34. 5

11.35. 13

11.36. 27, 28, 29, 30, 31, 32

11.37. 7

11.38. $B = 8, A = 181$

11.39. 9

11.40. 555

11.41. 621

11.42. 10

11.43. 58

11.44. $\frac{12}{7}$

11.45. $\frac{2}{3}$

11.46. 4

11.47. 594

11.48. %75

11.49. $2y - x$

11.50. $\frac{12}{23}$

11.51. $\frac{100}{3}$

11.52. 49

11.53. $\frac{1}{3}$

11.54. 4

11.55. 5

11.56. 55

11.57. 120

Alıştırmalar**(Geometri - Açılar)**

12.1. a) 120° b) 105°

12.2. 22°

12.3. 24°

12.4. $c = 38^\circ$ ve
 $b = a = 142^\circ$

12.5. 58°

12.6. $a = b = 140^\circ$,
 $c = d = e = 40^\circ$

12.7. 70°

12.8. 77°

12.9. 41°

12.10. a) 40° b) 19°

12.11. $y = 130^\circ$ ve
 $x = 15^\circ$

12.12. 25°

12.13. 16°

12.14. 75°

12.15. a) 110°

b) 130° c) 45° d) 20°

12.16. 25°

12.17. $x = 20^\circ$,
 $y = 120^\circ$

12.18. 58°

12.19. 30°

12.20. 140°

12.21. 21°

12.22. 60°

12.23. a ve b
çizilemez.

12.24. 8

12.25. 6

12.26. c kenarı

12.27. c kenarı

12.28. 4

12.29. 75°

12.30. 80°

12.31. 107, 5°

12.32. 12, 5°

12.33. 1080°

12.34. 115°

12.35. 14

12.36. a) 36° b) 72°

c) 144°

12.37. 42°

Problemler**(Geometri - Açılar)**

12.1. 8 veya 64

12.2. 50°

12.3. 135°

12.4. 20°

12.5. 40°

12.6. 70°

12.7. 138°

12.8. 35°

12.9. 60°

12.10. 85°

12.11. 60°

12.12. 15°

12.13. 30°

12.14. 140°

12.15. 35°

12.16. 32°

12.17. 104°

12.18. 17

12.19. 100°

12.20. 1620°

12.21. 240°

12.22. 22°

12.23. 18°

12.24. 75°

12.25. 90°

12.26. 3

Alıştırmalar
(Çevre ve Alan
Hesaplamaları)

13.1. 48

13.2. 5

13.3. 1,5

13.4. 11

13.5. 1098 m

13.6. 238π

13.7. 12

13.8. 38

13.9. 7

13.10. 6

13.11. $\frac{1}{2}$

13.12. 6

13.13. $\frac{12}{5}$ 13.14. $\frac{1}{3}$

13.15. Kanıt

13.16. a) 21 b) 189

13.17. 64

13.18. a) 10 b) 5 c) 8

d) 12 e) 8

13.19. 13

13.20. 750

13.21. 30π

13.22. $\frac{2}{3}$ 13.23. $\mathbb{S} < \mathbb{X} < \mathbb{Y}$ 13.24. $\frac{\pi - 2}{2}$ 13.25. $\frac{4 - \pi}{\pi}$ 13.26. $15 - \frac{7}{2}\pi$

13.27. 8

13.28. 8

13.29. 8

13.30. 8

13.31. 8

13.32. 8

13.33. 8

13.34. 8

13.35. 8

13.36. 8

13.37. 8

13.38. 8

13.39. 8

13.40. 8

13.41. 8

13.42. 8

13.43. 8

13.44. 8

13.45. 8

13.46. 8

13.47. 8

13.48. 8

13.49. 8

13.50. 8

13.51. 8

13.52. 8

13.53. 8

13.54. 8

13.55. 8

13.56. 8

13.57. 8

13.58. 8

13.59. 8

13.60. 8

13.61. 8

13.62. 8

13.63. 8

13.64. 8

13.65. 8

13.66. 8

13.67. 8

13.68. 8

13.69. 8

13.70. 8

13.71. 8

13.72. 8

13.73. 8

13.74. 8

13.75. 8

13.76. 8

13.77. 8

13.78. 8

13.79. 8

13.80. 8

13.81. 8

13.82. 8

13.83. 8

13.84. 8

13.85. 8

13.86. 8

13.87. 8

13.88. 8

13.89. 8

13.90. 8

13.91. 8

13.92. 8

13.93. 8

13.94. 8

13.95. 8

13.96. 8

13.97. 8

13.98. 8

13.99. 8

13.100. 8

13.101. 8

13.102. 8

13.103. 8

13.104. 8

13.105. 8

13.106. 8

13.107. 8

13.108. 8

13.109. 8

13.110. 8

13.111. 8

13.112. 8

13.113. 8

13.114. 8

13.115. 8

13.116. 8

13.117. 8

13.118. 8

13.119. 8

13.120. 8

13.121. 8

13.122. 8

13.123. 8

13.124. 8

13.125. 8

13.126. 8

13.127. 8

13.128. 8

13.129. 8

13.130. 8

13.131. 8

13.132. 8

13.133. 8

13.134. 8

13.135. 8

13.136. 8

13.137. 8

13.138. 8

13.139. 8

13.140. 8

13.141. 8

13.142. 8

13.143. 8

13.144. 8

13.145. 8

13.146. 8

13.147. 8

13.148. 8

13.149. 8

13.150. 8

13.151. 8

13.152. 8

13.153. 8

13.154. 8

13.155. 8

13.156. 8

13.157. 8

13.158. 8

13.159. 8

13.160. 8

13.161. 8

13.162. 8

13.163. 8

13.164. 8

13.165. 8

13.166. 8

13.167. 8

13.168. 8

13.169. 8

13.170. 8

13.171. 8

13.172. 8

13.173. 8

13.174. 8

13.175. 8

13.176. 8

13.177. 8

13.178. 8

13.179. 8

13.180. 8

13.181. 8

13.182. 8

13.183. 8

13.184. 8

13.185. 8

13.186. 8

13.187. 8

13.188. 8

13.189. 8

13.190. 8

13.191. 8

13.192. 8

13.193. 8

13.194. 8

13.195. 8

13.196. 8

13.197. 8

13.198. 8

13.199. 8

13.200. 8

13.201. 8

13.202. 8

13.203. 8

13.204. 8

13.205. 8

13.206. 8

13.207. 8

13.208. 8

13.209. 8

13.210. 8

13.211. 8

13.212. 8

13.213. 8

13.214. 8

13.215. 8

13.216. 8

13.217. 8

13.218. 8

13.219. 8

13.220. 8

13.221. 8

13.222. 8

13.223. 8

13.224. 8

13.225. 8

13.226. 8

13.227. 8

13.228. 8

13.229. 8

13.230. 8

13.231. 8

13.232. 8

13.233. 8

13.234. 8

13.235. 8