

Prof. Dr. Mustafa Özdemir

GELECEĞİN DAHİLERİNE

DAHİMATİK

CEBİR - SAYILAR TEORİSİ - SAYMA

7. Sınıf

ÇÖZÜM KİTABI

American Mathematics
Competitions (AMC 8)

UIMO - PISA - TIMSS KANGURU

TÜBİTAK Olimpiyat Sınavları

Matematik Yarışmaları

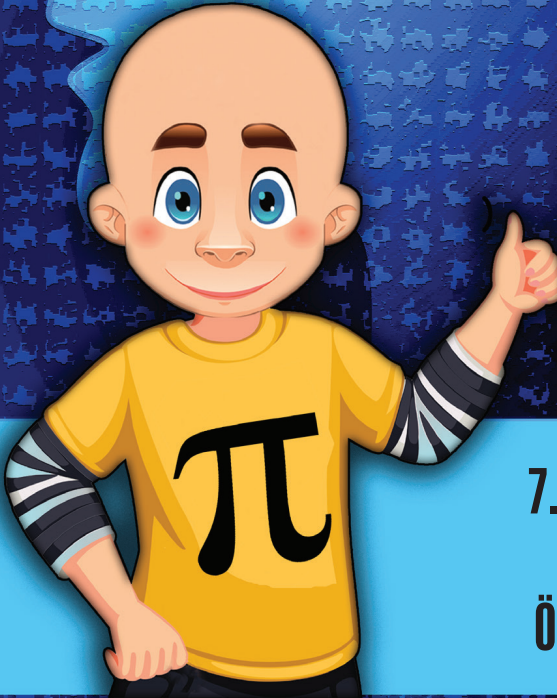
Liselere Giriş Sınavına Hazırlık

530 Çözümlü Örnek

530 Alıştırma

500 Test

Toplam 1560 Soru



**7. SINIF SEVİYESİNE UYGUN OLARAK
MATEMATİĞE MERAKLI
ÖĞRENCİLER İÇİN HAZIRLANMIŞTIR.**

ALTIN NOKTA

Dijital Kitap

Akıllı Tahta

altinkarne.com



Akıllı Tahta için
Karekodu Okutunuz



PDF Çözüm için
Karekodu Okutunuz

Copyright©ALTIN NOKTA
ISBN 978-605-2265-35-2

KAYNAK KİTAPLAR
7. SINIF DAHİMATİK
Prof. Dr. Mustafa Özdemir
mozdemir07@gmail.com

Bu kitabın her hakkı saklıdır.
Tüm hakları ALTIN NOKTA YAYINEVİ'ne aittir.
Kısmen de olsa alıntı yapılamaz. Metinler, kitabı yayımlayan kurumun önceden izni olmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz. Kitapta yer alan oyun, bulmaca, soru, metin ve resimlerin sorumluluğu yazarına/yazarlarına aittir.

Genel Yayın Yönetmeni
Halil İ. AKÇETİN

Yayın Editörü
Leyla GÜNDOĞDU

Dizgi & Kapak
Altın Nokta Grafik

Yayın - Dağıtım
Altın Nokta Basım Yayın Dağıtım
3/18 Sokak No: 2/N BUCA - İZMİR
+90 232 502 52 94 / +90 507 470 24 98

www.altinnokta.com.tr - www.nartest.com.tr
www.kitapana.com.tr - www.omage.com.tr

altinnokta@altinnokta.com.tr - nartest@nartest.com.tr
kitapana@kitapana.com.tr - omage@omage.com.tr

Basım
Birleşik Matbaacılık
14. cadde No:3 Pancar Organize Sanayi Torbalı/İZMİR
Tel: 0 232 433 68 66 Sertifika No: 479892

Önsöz

Bu kitap matematiğe meraklı olan ortaokul öğrencilerinin hem kendilerini geliştirmesi hem de ulusal ve uluslararası yarışmalara hazırlanabilmesi amacıyla hazırlanan Dahimatik kitap serisinin 7. sınıf seviyesine ve matematik olimpiyat müfredatına uygun kitabıdır. Dahimatik serisine ilk kez başlayacak olan 7. sınıf öğrencilerinin öncelikle Dahimatik 6 ile başlamasını tavsiye ederim. Kitapta konu anlatımı özetlendikten sonra, zorluk seviyesi artan örnek ve problemlerle zenginleştirilmiştir. Her konu ile ilgili ulusal ve uluslararası yarışmalarda sorulan sorulardan örnekler verilmiştir. Öğrencilerin çözerken biraz daha düşünmesini gerektirecek ve beynini zorlayacak sorular şekilde sorular seçilmeye çalışılmıştır.

Öğrencilere mesaj : Bu kitapta sana okulda henüz gösterilmemiş ve öğretmenlerinin sana anlatmadığı yeni konular da olacak. Yani, bazı konuları öğrenme işine biraz erken başlıyoruz. Matematiği seven bir küçük dahi olarak, yeni sorular ve problemlerle bazen eğlenecek, bazen zorlanacaksın. Fakat, ilerleyen zamanlarda kendindeki hızlı, analitik düşünce sistemlerinin nasıl geliştiğini fark edeceksin. Bu kitap seviyen için kolay bir kitap değil, ama bilimin en önemli noktalarından biri sabırdır ve çalışmadır. Zorlandığında pes etmemen gerektiğini ve daha çok çalışman gerektiğini en baştan bilmen gerek. Bu kitabı bitirdiysen, ya da bu kitap seni zorlamadıysa, **Dahimatik 7** yerine hemen **Dahimatik 8** ve **Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık kitapları** serisine başlayabilirsin.

Bu kitapta toplam olarak,

i. 530 Çözümlü Örnek,

ii. 530 Yanıtlı Alıştırma

iii. 500 Yanıtlı Test

bulunmaktadır. 1560 soru ile, öğrencinin konuları derinlemesine ve kendi kendine öğrenmebilmesi amaçlanmıştır.

Kitaba Nasıl Çalışmalıyım?

Öncelikle konu başındaki açıklamaları dikkatle not alınız ve okuyunuz. Daha sonra örnek, alıştırmaya ve problemleri çözmeye çalışınız. Her örnek, alıştırmaya ve test sorusunun yanında



biçiminde işaret ve renkli kutular göreceksiniz. Buradaki ♣ sembolü sorunun zorluk derecesini gösterir. ♣ sayısı fazlaştıkça soru daha da zor anlamına gelir. ♣♣♣♣ biçiminde işaretlenmiş bir soru bu kitabın seviyesine göre oldukça zor bir sorudur ve çözmemeniz normaldir.

Örneği İncele	Alıştırmayı Çözmeye Çalış	Test Sorularıyla Kendini Sına
ÖRNEK ♣♣	Alıştırma ♣	Test ♣
Örneği anladıysan kutuyu işaretle	Çözdüysen Kutuyu İşaretle	Çözdüysen Kutuyu İşaretle
Anlamadıysan kutuya "?" koy.	Çözemediysen kutuya "?" koy.	Çözemediysen kutuya "?" koy.
Konunun başındaki bilgileri oku	Örneğin nasıl çözüldüğünü incele	Örneğin nasıl çözüldüğünü incele
Örneği anlamaya çalış.	Kapaktaki karekodu okut ve çözüme git	Kapaktaki karekodu okut ve çözüme git

Bazı Kısaltmalar

LGS	Liselere geçiş Sınavı	FLS	Fen Lisesi Sınavı
UOMO	Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı	AMC8	American Mathematics Competition
UMO	Ulusal Matematik Olimpiyatı (Lise)	AMC10	American Mathematics Competition
UAMO :	Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı	ÖSS :	Üniversite Öğrenci Seçme Sınavı

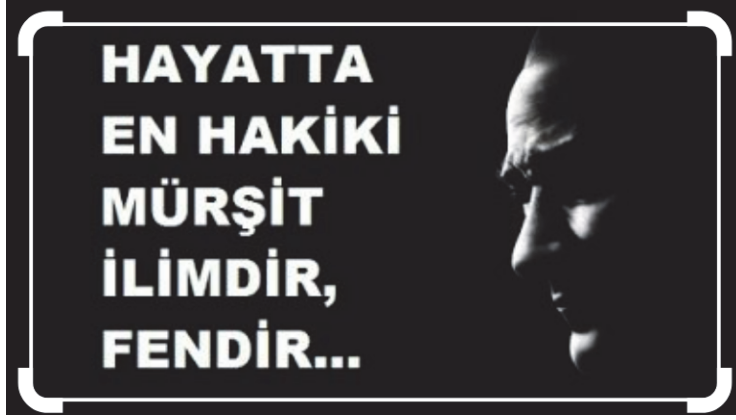
Teşekkür

Kitabın düzeltme aşamasında yaptıkları düzeltmelerle hata oranını en aza indiren ve bana yardımcı olan isimleri aşağıda yazılı alanlarında uzman matematik öğretmenleri ve güzel insanlara çok çok teşekkür ediyorum.

Özcan ASLAN	(Kocaeli Enka Lisesi Mat. Öğr.)	Arzu ARIK	(Kepez BİLSEM Mat.Öğr.)
Gamze AKKAYA	(Antalya Lisesi Mat. Öğr.)	Dr. İskender ÖZTÜRK	(Kepez BİLSEM Mat. Öğr.)
Recep Hakan DÖNMEZ	(Balıkesir Birey Kol. Mat. Öğr.)	Sercan ÇÖMLEK	(Kumluca Sınav Koleji Mat. Öğr.)
Dr. Abdurrahman ÜNAL	(Aksu S. Erten AL Mat. Öğr.)	Dr. Selim ÇOBANOĞLU	(Finike Cumhuriyet MTAL Mat. Öğr.)
Engin KARAMAN	(Salihli Sekine Evren AL Mat. Öğr.)	Özgür BATU	(Yusuf Ziya Öner F.L. Mat. Öğr.)
Saleh SAMEDOV	(Azerbaycan Xezer Univ. M. Öğr.)	Ali Can GÜLLÜ	(İzmir MEB Mat. Öğr.)
Dr. Oğuzhan ÇELİK	(Pamukkale Ün. Öğr. Gör.)	Elif BAŞER	(Ankara Nesibe Aydın Yıldızlar F.L.10)

Prof. Dr. Mustafa Özdemir - Antalya - 2024

EKİM - 2024



Mustafa Kemal Atatürk

Önsöz

Bu kitap matematiğe meraklı olan ortaokul öğrencilerinin hem kendilerini geliştirmesi hem de ulusal ve uluslararası yarışmalara hazırlanabilmesi amacıyla hazırlanan Dahimatik kitap serisinin 7. sınıf seviyesine ve matematik olimpiyat müfredatına uygun kitabıdır. Dahimatik serisine ilk kez başlayacak olan 7. sınıf öğrencilerinin öncelikle Dahimatik 6 ile başlamasını tavsiye ederim. Kitapta konu anlatımı özetlendikten sonra, zorluk seviyesi artan örnek ve problemlerle zenginleştirilmiştir. Her konu ile ilgili ulusal ve uluslararası yarışmalarda sorulan sorulardan örnekler verilmiştir. Öğrencilerin çözerken biraz daha düşünmesini gerektirecek ve beynini zorlayacak sorular şekilde sorular seçilmeye çalışılmıştır.

Öğrencilere mesaj : Bu kitapta sana okulda henüz gösterilmemiş ve öğretmenlerinin sana anlatmadığı yeni konular da olacak. Yani, bazı konuları öğrenme işine biraz erken başlıyoruz. Matematiği seven bir küçük dahi olarak, yeni sorular ve problemlerle bazen eğlenecek, bazen zorlanacaksın. Fakat, ilerleyen zamanlarda kendindeki hızlı, analitik düşünce sistemlerinin nasıl geliştiğini farkedeceksin. Bu kitap seviyen için kolay bir kitap değil, ama bilimin en önemli noktalarından biri sabırdır. Zorlandığında pes etmemen gerektiğini en baştan bilmen gerek. Bu kitabı bitirdiysen, ya da bu kitap seni zorlamadıysa, **Dahimatik 7** yerine hemen **Dahimatik 8** ve **Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık kitapları** serisine başlayabilirsin.

Bu kitapta toplam olarak,

- i. 530 Çözümlü Örnek, ii. 530 Yanıtlı Alıştırma iii. 500 Yanıtlı Test

bulunmaktadır. 1560 soru ile, öğrencinin konuları derinlemesine ve kendi kendine öğrenmebilmesi amaçlanmıştır.

Kitaba Nasıl Çalışmalıyım?

Öncelikle konu başındaki açıklamaları dikkatle not alınız ve okuyunuz. Daha sonra örnek, alıştırma ve problemleri çözmeye çalışınız. Her örnek, alıştırma ve test sorusunun yanında



biçiminde işaret ve renkli kutular göreceksiniz. Buradaki ♠ sembolü sorunun zorluk derecesini gösterir. ♠ sayısı fazlaştıkça soru daha da zor anlamına gelir. ♠♠♠♠ (blue box) biçiminde işaretlenmiş bir soru bu kitabın seviyesine göre oldukça zor bir sorudur ve çözmemeniz normaldir.

Örneği İncele	Alıştırmayı Çözmeye Çalış	Test Sorularıyla Kendini Sına
ÖRNEK ♠♠ (blue box)	Alıştırma ♠ (yellow box)	Test ♠ (green box)
Örneği anladıysan kutuyu işaretle	Çözdüysen Kutuyu İşaretle	Çözdüysen Kutuyu İşaretle
Anlamadıysan kutuya "?" koy.	Çözemediysen kutuya "?" koy.	Çözemediysen kutuya "?" koy.
Konunun başındaki bilgileri oku	Örneğin nasıl çözüldüğünü incele	Örneğin nasıl çözüldüğünü incele
Örneği anlamaya çalış.	Kapaktaki karekodu okut ve çözüme git	Kapaktaki karekodu okut ve çözüme git

Bazı Kısaltmalar

LGS	Liselere geçiş Sınavı	FLS	Fen Lisesi Sınavı
UOMO	Ulusal Ortaokul Matematik Olimpiyatı	AMC8	American Mathematics Competition
UMO	Ulusal Matematik Olimpiyatı (Lise)	AMC10	American Mathematics Competition
UAMO :	Ulusal Antalya Matematik Olimpiyatı	ÖSS :	Üniversite Öğrenci Seçme Sınavı

Teşekkür

Kitabın düzeltme aşamasında yaptıkları düzeltmelerle hata oranını en aza indiren ve bana yardımcı olan isimleri aşağıda yazılı alanlarında uzman matematik öğretmenleri ve güzel insanlara çok çok teşekkür ediyorum.

Özcan ASLAN	(Kocaeli Enka Lisesi Mat. Öğr.)	Arzu ARIK	(Kepez BİLSEM Mat.Öğr.)
Gamze AKKAYA	(Antalya Lisesi Mat. Öğr.)	Dr. İskender ÖZTÜRK	(Kepez BİLSEM Mat. Öğr.)
Recep Hakan DÖNMEZ	(Balıkesir Birey Kol.Mat.Öğr.)	Sercan ÇÖMLEK	(Kumluca Sınav Koleji Mat. Öğr.)
Dr.Abdurrahman ÜNAL	(Aksu S. Erten AL Mat.Öğr.)	Dr.Selim ÇOBANOĞLU	(Finike Cumhuriyet MTAL Mat.Öğr.)
Engin KARAMAN	(Salihli Sekine Evren AL Mat.Öğr.)	Özgür BATU	(Yusuf Ziya Öner F.L. Mat.Öğr.)
Saleh SAMEDOV	(Azerbaycan Xezer Univ. M.Öğr.)	Ali Can GÜLLÜ	(İzmir MEB Mat. Öğr.)
Dr. Oğuzhan ÇELİK	Pamukkale Ün. Öğr. Gör.	Elif BAŞER	(10. Sınıf Öğrencisi)

Prof.Dr. Mustafa Özdemir

mozdemir07@gmail.com

EKİM - 2024



Mustafa Kemal Atatürk

İçindekiler

1	TAM SAYILAR	10
1.1	Mutlak Değer	13
1.2	Negatif Tam Sayı Üs	14
1.3	Tam Bölen Kavramı ve Asal Çarpanlar	15
1.4	Faktöriyel Kavramı	15
1.5	Tam Kare ve Tam Küp Kavramları	16
1.6	Tam Sayı Eşitliklerinin Yorumlanması	17
1.7	KONU SONU TESTİ (Tam Sayılar)(ÇÖZÜMLER)	19
2	RASYONEL SAYILAR	27
2.1	Ondalık Sayı	28
2.2	Devirli Ondalık Sayılar	29
2.3	KONU SONU TESTİ (Rasyonel Sayılar)	30
3	CEBİRSEL İFADELER	34
3.1	Sayı Örüntülerinde Cebirsel İfadeler	34
3.2	Cebirsel İfadelerin Çarpımı	36
3.3	İki Terimli Cebirsel Bir İfadenin Karesini Alma	36
3.4	Cebirsel İfadelerin Tam Kare Yapılması	37
3.5	Cebirsel İfadelerde Ortak Paranteze Alma	39
3.6	Cebirsel Kesirleri Parçalama	40
3.7	Üç Terimli Cebirsel İfadelerin Karesi	41
3.8	İki Tam Karenin Farkının Çarpımsal Yazılışı	42
3.9	Üç Terimli Cebirsel İfadelerin Çarpanları	42
3.10	İki Terimli Cebirsel İfadelerin Küpü	43
3.11	Hesaplama Problemlerini Değişkenler Yardımıyla Basitleştirme	43
3.12	Paydasında Harf Bulunan Cebirsel İfadeler	44
3.13	Mutlak Değerli Cebirsel İfadeler	46
3.14	KONU SONU TESTİ (Cebirsel İfadeler)(Çözümler)	47
4	DENKLEM ve DENKLEM SİSTEMLERİ	53
4.1	Lineer Denklem Sisteminde Özel Durumlar	54
4.2	Denklem Kurma	55
4.3	Ekleme Çıkarma Yardımıyla Çarpanlara Ayırıp Çözme	57
4.4	Denklemleri Yeni Harflerle Basitleştirme	58
4.5	Mutlak Değerli Denklemler	59
4.6	KONU SONU TESTİ (Denklemler ve Denklem Sistemleri)(Çözümler)	60
5	HARFLİ EŞİTSİZLİKLER	67
5.1	Paydasında Harfli İfade Olan Eşitsizlikler	69
5.2	Mutlak Değerli Eşitsizlikler	70
5.3	KONU SONU TESTİ (Eşitsizlikler)(Çözümler)	71
6	ORAN - ORANTI - ORTALAMALAR	75

6.1	Doğru Orantı	76
6.2	Ters Orantı	77
6.3	KONU SONU TESTİ (Oran - Orantı- Ortalamalar) (Çözümler)	78
7	PROBLEM TİPLERİ	86
7.1	Yaş Problemleri	86
7.2	Hız Problemleri	87
7.3	Karışım Problemleri	88
7.4	KONU SONU TESTİ (Problemler)	89
8	ÜSLÜ SAYILAR	97
8.1	Sadeleştirme	97
8.2	Aynı Kuvvetli Sayıların Çarpımı ve Bölümü	98
8.3	Basamak Sayısı Soruları	98
8.4	Üslü Eşitlikler	98
8.5	Üslü Denklemlerde Yeni Değişken Kullanma	99
8.6	Üslü Sayılarda Sıralama	100
8.7	Üslü Eşitsizlikler	100
8.8	Ondalık Sayılarda Kuvvet	101
8.9	KONU SONU TESTİ (Üslü Sayılar)(Çözümler)	102
9	TOPLAMLAR	106
9.1	Gauss Toplam Formülü	107
9.2	Ardışık Sayıların Toplamı	108
9.3	Ardışık Sayıların Toplamı Olarak Yazılabilme	109
9.4	Teleskopik Toplamlar	109
9.5	Karesel Örüntülerde Toplam	111
9.6	Küpsel Örüntülerde Toplam	112
9.7	Genel Terimi Parçalayarak Toplamı Hesaplama	112
9.8	Geometrik Örüntülerde Toplam	113
9.9	Kuadratik Örüntülerde Toplam	115
9.10	Toplam Sembolü	116
9.11	İlginç Soru Çözümleri	117
9.12	KONU SONU TESTİ (Toplamlar)(Çözümler)	119
10	BÖLÜNEBİLME	129
10.1	Kalanlı Bölme	129
10.2	Bölünebilme Kuralları	131
10.3	Aralarında Asal İki Sayının Çarpımına Bölünme	132
10.4	Bazı Bölünebilme Özellikleri	134
10.5	Asal Çarpanlar	136
10.6	Pozitif Bölen Sayısı	138
10.7	Pozitif Bölenlerin Toplamı	140
10.8	Pozitif Bölenlerin Çarpımı	141
10.9	EBOB - EKOK	141
10.10	Öklid Algoritması İle EBOB Bulma	142
10.11	Bir Sayının Euler Değeri	145

10.12	KONU SONU TESTİ (BÖLÜNEBİLME)	146
11	MODÜLER ARİTMETİK	157
11.1	Günlük Hayatta Modüler Aritmetik	157
11.2	Denkliklerin Çözümü	159
11.3	Denklemden Denkleğe Geçiş	159
11.4	Son Rakam Sorularında Mod	160
11.5	Denklik Sistemleri	160
11.6	Üslü İfadelerde Modüler Aritmetik	160
11.7	Tam karelerde kalanlar	162
11.8	Fermat ve Euler Teoremleri	162
11.9	Soru Çözümleri	163
11.10	KONU SONU TESTİ (MODÜLER ARİTMETİK)	166
12	KÖKLÜ SAYILAR	172
12.1	Ondalıklı İfadelerin Karekökü	174
12.2	Köklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma	175
12.3	Köklü İfadelerde Çarpma ve Bölme	175
12.4	Paydayı Rasyonel Yapma	177
12.5	Karekök ve Mutlak Değer İlişkisi	178
12.6	Kareköklü Denklemler	178
12.7	İrrasyonel Sayıların Özellikleri	178
12.8	Yüksek Dereceden Kökler	179
12.9	Köklü İfadelerde Sıralama	180
12.10	Geometride Köklü Sayılar	181
12.11	Özel Açılı Üçgenlerde Kenar Uzunlukları	183
12.12	Köklü İfadelerde Çarpanlara Ayırma	184
12.13	Rasyonel Üslü Denklemlerin Çözümü	185
12.14	Karışık Sorular	186
12.15	KONU SONU TESTİ (Köklü Sayılar)(Çözümler)	187
13	KÜMELER	193
13.1	Kümelerde İşlemler	194
13.2	Alt Küme Kavramı	195
13.3	Bir Kümenin Değili	196
13.4	İçerme - Dışarma İlkesi (İDİ)	196
13.5	Küme İşlemleri ve Bağlaçların İlişkisi	197
13.6	Küme Problemleri	199
13.7	Alt Küme Sayısı	200
13.8	KONU SONU TESTİ (Kümeler)	202
14	SIRALAMA	208
14.1	Tekrarlı Sıralamalar	210
14.2	Genişleterek Sıralama Yöntemi	212
14.3	KONU SONU TESTİ (Sıralamalar)	214
15	SEÇME (KOMBİNASYON)	226

15.1	Birden Fazla Grup Seçme	227
15.2	Kümelerde Seçme ve Alt küme Sayısı	227
15.3	Geometride Seçme (Kesişim Sayıları)	229
15.4	İlginç Kombinasyon Soruları	232
15.5	KONU SONU TESTİ (Seçme)	233
16	DAĞILIM	240
16.1	Farklı Nesneleri Dağıtma	240
16.2	Aynı Olan Nesneleri Dağıtma	242
16.3	KONU SONU TESTİ (Dağılım)	244
17	OLASILIK	249
17.1	Bir Olayın Olasılığı	249
17.2	Birden Fazla Bağımsız Olayın Olasılığı	251
17.3	Karşılaştırmalı Olasılık Soruları	252
17.4	Olasılık Sorularında "ve", "veya" Bağlaçları	252
17.5	Koşullu Olasılık	253
17.6	KONU SONU TESTİ (Olasılık)	254

TAM SAYILAR

Alıştırma 1.1.



Çözüm : a) 11, 13, 15, ..., 33 şeklinde iki basamaklı sayıların sayısı $\frac{33 - 11}{2} + 1 = 12$ tanedir. 1 basamaklı da 5 sayı olduğundan, bu sayı $2 \cdot 12 + 5 = 29$ basamaklıdır.

b) İlk 5 tanesi tekli olacağından, soldan 20'nci rakam için 8 tane çift rakamlı sayı kullanılmalıdır. Buna göre, $11 + 2 \cdot (8 - 1) = 25$ son kullanılacak sayı olur. Böylece 21 rakam kullanılmış olur. 20-inci rakam 2'dir.

$$1 \ 3 \ 5 \ 7 \ 9 \ 11 \ \dots \ 23 \ 25 \Rightarrow 5 + 2 \left(\frac{25 - 11}{2} + 1 \right)$$

c) 15 16 ... 31 33 sayısı $2 \cdot \left(\frac{33 - 15}{2} + 1 \right) = 20$ basamaklıdır. O halde, sağdan 20-nci rakam 1 bulunur.

Alıştırma 1.2.



Çözüm : a) A sayısı üçgensel sayı ise $\frac{n(n+1)}{2}$ değerine eşit olmalıdır. Karesel sayı ise de bir m sayısının karesi olmalıdır.

$$A = \frac{n(n+1)}{2} = m^2$$

eşitliğini sağlayan iki basamaklı karesel sayılara bakalım.

$$m = 4 \Rightarrow n(n+1) = 32 \Rightarrow n \text{ yok,}$$

$$m = 5 \Rightarrow n(n+1) = 50 \Rightarrow n \text{ yok,}$$

$$m = 6 \Rightarrow n(n+1) = 72 \Rightarrow n = 8.$$

O halde, hem karesel hem üçgensel olan en küçük iki basamaklı sayı 36 olur. $36 = 6^2$ ve $1 + 2 + 3 + \dots + 8 = 36$.

b) $1 + 2 + 3 + \dots + 12 + 13 = \frac{13 \cdot 14}{2} = 91$ olduğundan, iki basamaklı en büyük üçgensel sayı 91 olur.

Aıştırma 1.3.**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
& (-1) \cdot [(-25) - (-27)] - 25 \cdot 2 - (-4) \\
& = (-1) \cdot [(-25) + 27] - 25 \cdot 2 - (-4) \\
& = (-1) \cdot 2 - 25 \cdot 2 - (-4) \\
& = -2 - 50 + 4 \\
& = -48
\end{aligned}$$

Aıştırma 1.4.**Çözüm : a)** Artış miktarı 11 olduğundan,

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{n - (76)}{11} + 1 = 21$$

eşitliğinden $n = 296$ elde edilir.**b)** Bu örüntüdeki sayıların toplamı da

$$\text{Toplam} = 21 \cdot \frac{296 + (-76)}{2} = 2310$$

bulunur.

c) Önce ilk terimi kullanarak örüntünün genel terimini bulalım. **Artış miktarı 11** olduğu için,

$$11 \cdot 1 + m = -76 \Rightarrow m = -87$$

olduğundan, bu örüntünün n -inci genel terimi $11n - 87$ olacaktır. Örüntüdeki ilk pozitif terim için $n = 8$ alırsak,

$$11 \cdot 8 - 87 = 1$$

olur. İlk pozitif terim 1'dir ve bu örüntüdeki 8-inci terimdir.

d) $11n - 87$ genel terimi $n = 17$ için

$$11 \cdot 17 - 87 = 100$$

olduğundan, örüntüdeki üç basamaklı en küçük sayı 100 bulunur. Bu terim 17-inci terimdir.

Aıştırma 1.5.**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
\frac{6}{x} \times \frac{4}{y} &= 4 \Rightarrow \frac{24}{x \cdot y} = 4 \\
&\Rightarrow 4 \cdot x \cdot y = 24 \\
&\Rightarrow x \cdot y = 6
\end{aligned}$$

olur. x ve y tam sayı olduğuna göre, bu çarpım

$$1 \cdot 6; \quad (-1) \cdot (-6); \quad 2 \cdot 3; \quad (-2) \cdot (-3)$$

durumlarından biri olabilir. Buna göre, $x + y$ değeri

$$1 + 6 = 7; \quad -1 - 6 = -7,$$

$$2 + 3 = 5, \quad -2 - 3 = -5$$

olabilir.

Aıştırma

1.6.

**Çözüm :** En az değer için

$$a = 1, b = -1 \text{ ve } c = -18$$

alınabilir. Böylece, $a + b + c$ en az -18 olacaktır.

Aıştırma

1.8.



Çözüm : Herhangi bir satırda veya sütunda sadece 1 tane 7 veya -7 olabilir. Bunu yazdıktan sonra çarpım -7 olacak şekilde yan tarafındaki kareye 1 veya -1 tek türlü yazılır. Buna göre, 7 veya -7 sayısını ilk satırda yazmak için 2 kare seçeneği, ikinci satırda ise 1 kare seçeneği vardır. Bu kareleri seçtikten sonra bu karelere 7 veya -7 yazabiliriz. Yani, tabloyu $2 \cdot 2 = 4$ farklı şekilde doldurabiliriz.

7	-1	-7	1	1	-7	-1	7
-1	7	1	-7	-7	1	7	-1

Aıştırma

1.9.



Çözüm : Herhangi bir satırda veya sütunda sadece 1 tane 7 veya -7 olabilir. İlk satırdan 7 veya -7 yazacağımız kareyi 3 şekilde belirleyebiliriz. İkinci satırdan 2 ve üçüncü satırdan tek şekilde belirlenebilir. Böylece, 7 veya -7 yazılacak üç kare 6 farklı şekilde belirlenir. Her belirlenen kareye ya 7 veya -7 yazılabileceğinden

$$6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$$

olası durum vardır. İlk satırda seçilen kareye 7 veya -7 yazılmasına göre incelemeye devam edelim. İlk satırdaki karelerden birinde 7 yazılmışsa diğer karelerde 1 ve -1 olmalıdır ve bu iki farklı şekilde olabilir. İlk satırdaki karelerin birinde -7 varsa diğer karelerin her ikisi birden 1 veya -1 olabilir. Yani, her durumda ilk satırdaki 1 ve -1 sayıları 2 farklı şekilde doldurulabilir. Aşağıda bir örnek dolduruş verilmiştir.

1	7	-1	-1	7	1
7			7		
		-7			-7
-1	-7	-1	1	-7	1
-7			-7		
		-7			-7

Böylece, $48 \times 2 = 96$ farklı şekilde doldurulabilir. Şimdi ikinci satıra geçelim. İlk satır ve ikinci satırda yazılan 7 veya -7 'nin bulunduğu sütun göz önüne alınırsa bu sütundaki son sayı tek şekilde doldurulabilir. Böylece son satırda bulunan sayının 7 veya -7 olmasına göre son karede tek şekilde doldurulabilir. Bu şekilde devam edilirse geri kalan karelerin tek şekilde doldurulacağı görülür.

Aıştırma

1.7.



Çözüm : $3^2 + 4^2 = 25$ olduğunu göz önüne alırsak, (x, y) ikilisi

$$(3, 4); (4, 3); (-3, 4); (4, -3); (-4, 3); (3, -4); (-4, -3); (-3, -4)$$

ikililerinedn biri olabilir. Yani, 8 tam sayı ikilisi vardır.

Alıştırma**1.10.****Çözüm :**

$$\mathcal{L}(3, -2) = \frac{3 - (-2)}{3 \cdot (-2) + 5} = -5$$

elde edilir.

Alıştırma**1.11. UAMO-2024****Çözüm :** Toplamın en büyük değeri :

$$1, 2, 3, 60 = 66$$

en küçük değeri

$$-1, 1, 2, -180 \Rightarrow -178$$

olduğundan $66 - (-178) = 244$ elde edilir.**Mutlak Değer****Alıştırma****1.12.****Çözüm :** $|16 - 2| - 27 - 3| - 49 - 3|4|||$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} |16 - 2| - 27 - 3| - 49 - 12||| &= |16 - 2| - 27 - 183|| \\ &= |16 - 420| = 404 \end{aligned}$$

Alıştırma**1.13.****Çözüm :** $a + 2b = 1$ ve $a - 2b = 3$ olmalıdır. Taraf tarafa toplarsak $2a = 4$ ve $a = 2$ olur.

Negatif Tam Sayı Üs

Alıştırma 1.14.



Çözüm :

$$\frac{3^{-1} + 2^{-3} - 6^{-1}}{2^{-2} - 3^{-2} + 12^{-1}} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{8} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12}} = \frac{21}{16}$$

olduğundan,

$$\left(\frac{3^{-1} + 2^{-3} - 6^{-1}}{2^{-2} - 3^{-2} + 12^{-1}} \right)^{-1} = \frac{16}{21} = \frac{a^2}{b}$$

ve buradan da en küçük $a = 4$ ve $b = 21$ bulunur.
 $a + b = 25$ olur.

Tam Bölen Kavramı ve Asal Çarpanlar

Alıştırma 1.15.



Çözüm : $99A$ biçimindeki sayıları incelersek 995 sayısının koşulu sağlayan en büyük sayı olduğu görülür.

Alıştırma 1.16.



Çözüm : p ve q asal ve $p - q = 4$ olsun. O halde, $p = q + 4$ olacağından bunların toplamı da

$$p + q = q + 4 + q = 2q + 4$$

olacaktır. Bu toplam çift olacağından 207 ve 209 olamaz.

$$2q + 4 = 206 \Rightarrow q = 101 \text{ ve } p = 105$$

olur ki, 105 asal değildir. O halde, 206 'da olamaz.

$$2q + 4 = 208 \Rightarrow q = 102$$

olur ki, 102 asal olmadığından toplamaları 208 'de olamaz.

$$2q + 4 = 210 \Rightarrow q = 103 \text{ ve } p = 107$$

koşulu sağlar. O halde, 210 olabilir.

Alıştırma 1.17. UOMO-B-2019



Çözüm : Üç basamaklı bir asalımsı sayı ABC olsun. $A \cdot B \cdot C$ bir asal sayı olduğundan A, B ve C 'den ikisi 1 'e biri de bir asal sayıya eşittir. Diğer yandan $A + B + C$ toplamının da asal olmasını istiyoruz. Buna göre, iki durum söz konusudur :

$$\{a, b, c\} = \{1, 1, 3\} \text{ veya } \{a, b, c\} = \{1, 1, 5\}.$$

$511 = 7 \times 73$ olduğundan, üç basamaklı en büyük asal sayı 311 , üç basamaklı en küçük asal sayı da 113 bulunur. İstenen yanıt $311 - 113 = 198$ bulunur.

Faktöriyel Kavramı

Alıştırma 1.18.



Çözüm : Bizden istenen sayısının 7 'nin en fazla kaçınıcı kuvvetine bölündüğüdür.

$$\begin{array}{r} 50 \\ 7 \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 50 \\ 1 \end{array} \begin{array}{r} 49 \\ 1 \end{array} \text{ ve } \begin{array}{r} 25 \\ 3 \end{array} \begin{array}{r} 7 \\ 3 \end{array}$$

olduğundan, 7 'nin kuvveti kesrin payında $7 + 1 = 8$, paydasında ise 3 'tür. O halde bölme işlemi yapıldığında 7 'nin $8 - 3 = 5$ 'inci kuvveti kalır. n en fazla 5 olabilir.

Alıştırma 1.19.



Çözüm : Bir sayının sondan basamak sayısı 10 çarpanına, yani 2 ve 5 çarpanına bağlıdır. $201!$ sayısında 2 çarpanının sayısı zaten 5 çarpanının sayısından fazladır. O halde, $201!$ sayısında kaç tane 5 çarpanı olduğunu bulmak yeterli olacaktır.

$$\begin{array}{r} 201 \\ 5 \end{array} \begin{array}{r} 5 \\ 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 201 \\ 25 \end{array} \begin{array}{r} 25 \\ 25 \end{array} \quad \begin{array}{r} 201 \\ 125 \end{array} \begin{array}{r} 125 \\ 125 \end{array}$$

olduğundan, $40 + 8 + 1 = 49$ tane 5 çarpanı vardır ve $201!$ sayısının sondan 49 basamağı sıfırdır.

Tam Kare ve Tam Küp Kavramları**Alıştırma 1.22.****Alıştırma 1.20.****Çözüm :**

$$2! = 1 \times 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4$$

...

$$9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 9$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılırsa

$$1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 8! \times 9! = 2^8 3^7 5^6 4^5 6^4 7^3 8^2 9^1$$

çarpımında tam kare olanları ihmal edersek

$$3^7 4^5 7^3 9^1 = 2^{10} 3^9 7^3$$

elde edilir. Bunlardan 2^{10} sayısı da tam karedir. O halde, bu sayının tam kare olması en az $3 \cdot 7 = 21$ ile bölünmesi gerekir.

Alıştırma 1.21.**Çözüm :**

$$10! = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$= (2 \cdot 5) \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 7 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 2$$

$$= 2^8 3^4 5^2 7$$

elde edilir. Bu değerin tam küp olması için kuvvetlerin 3'ün katı olması gerekir. Bunun için,

$$2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 = 4410$$

sayısı ile çarpılması gerekir. Bu durumda, sayı

$$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$$

sayısının küpü olur.

Tam Sayı Eşitliklerinin Yorumlanması

Aıştırma 1.24.



Çözüm : $d = 13$ ve $a + b + c = 10$ olmalıdır.

$a + b + c = 10$ ise asal sayılardan biri 2 olmalıdır.

$4a + 3b + 2c + d$ 'nin en büyük değerini bulmak istediğimiz için $c = 2$ alalım. Buna göre, $a + b = 8$ olması gerekir ki, $a = 5$ ve $b = 3$ alırsak

$4a + 3b + 2c + d = 4 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 13 = 46$ elde edilir.

Aıştırma 1.23.



Çözüm : $A = 2$ için $B = 0$ ve $C = 4$ olur. A tek sayı olmak zorunda değildir. O halde, I ve II yanlıştır. III doğrudur. $10A$ çifttir. $5C$ çift ise $3B$ sayısı de çift olması gerekir. Yani, C çift ise B de çift olur. IV doğrudur. $10A$ ve $5C$ ifadeleri 5'in katı olduğundan $3B$ sayısı da 5'in katı olması gerekir. V doğrudur. $3B$ ifadesi 3'ün katıdır $10A$ sayısı da 3'ün katı olursa C sayısı da 3'ün katı olması gerekir. VI. yanlıştır. $A = 0$ iken $B = 5$ ve $C = 3$ eşitliği sağlar.

Aıştırma 1.25.



Çözüm : a) Hem $2A$ hem $4C$ hem de 80 terimleri 2 ile bölündüğü için $5B$ terimi de 2 ile bölünmelidir. A 'nın en büyük değeri için $B = 2$ alalım. Böylece,

$$2A + 10 + 4C = 80 \Rightarrow 2A + 4C = 70$$

olur. Eşitliğin her tarafını 2 ile bölersek $A + 2C = 35$ olur. $C = 1$ alırsak, $A = 33$ elde edilir.

b) $B = 14$ alınırsa $2A + 4C = 10 \Rightarrow A + 2C = 5$ eşitliğinden $C = 2$ ve $A = 1$ olur.

Aıştırma

1.26.



Çözüm : Alp'in doğru yaptığı soru sayısı D , yanlış yaptığı soru sayısı Y olsun. O halde, boş bıraktığı soru sayısı da $25 - D - Y$ olacaktır. Puanlama sistemine göre,

$$5 \cdot D - 2 \cdot Y + 1(25 - D - Y) = 48$$

eşitliğinden

$$D = \frac{23 + 3Y}{4}$$

elde edilir. $Y = 11$ alınırsa

$$D = \frac{23 + 3 \cdot 11}{4} = 14$$

olur. Böylece, 14 doğru 11 yanlış ve 0 boş cevabı vardır.

b) Bu kez $Y = 11 - 4 = 7$ almamız gerekecek.

$$D = \frac{23 + 3 \cdot 7}{4} = 11$$

olacaktır. Doğru sayısı en fazla 11 olabilir ki, bu durumda 7 soruyu boş cevaplamıştır.

Aıştırma

1.27.



Çözüm : Verilen iki eşitliği taraf tarafa toplarsak

$$2A + 4B + 2C = 42 \Rightarrow A + 2B + C = 21$$

elde edilir. Bu eşitliği de

$$A + B + C = 21 - B$$

şeklinde yazalım. $A + B + C$ toplamının en küçük değeri için B 'nin en büyük değerini bulmalıyız.

$$2A + 3B = 23$$

eşitliği göz önüne alınırsa, B en fazla 7 olabilir. Bu durumda $A = 1$ ve $C = 6$ olacaktır. Yani, $A + B + C$ en küçük 14 olabilir.

KONU SONU TESTİ (Tam Sayılar)(ÇÖZÜMLER)

Test 1.1



A) 12 B) 21 C) 25 D) 24 E) 20

Çözüm : $a + b$ en fazla $6 + 5 = 11$ ve en az $-7 - 6 = -13$ olabilir. O halde, $a + b$

$$-13, -12, -11, \dots, 9, 10, 11$$

değerlerini alabilir. Bunların sayısı da : $11 - (-13) + 1 = 25$ olur.

Test 1.2



A) 102 B) 111 C) 1055 D) 104 E) 120

Çözüm : $a \cdot b$ çarpımının en büyük değeri

$$a \cdot b = (-8)(-7) = 56$$

en küçük değeri de, $(-8)(6) = -48$ olacaktır.

$$56 - (-48) = 104$$

fazladır.

Test 1.3



A) 42 B) 51 C) 41 D) 61 E) 50

Çözüm : $A - B$ ifadesini

$$(1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \dots + (99 - 100) + 101$$

biçiminde yazabiliriz. Buna göre, geriye

$$\frac{99 - 1}{2} + 1 = 50$$

tane -1 ifadesi ile 101 sayısı kalır. Buradan, $-50 + 101 = 51$ elde edilir.

Test 1.4



A) 142 B) 141 C) 145 D) 143 E) 144

Çözüm : $\mathbb{Z} (A_5)$ değeri, $[-10, 15]$ aralığındaki tam sayıların toplamını gösterdiğinden,

$$\mathbb{Z} (A_5) = -10 - 9 - \dots + 0 + \dots + 10 + 11 + \dots + 15 = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 65$$

bulunur. Benzer şekilde $\mathbb{Z}^+ (A_4)$ için $[-8, 12]$ aralığındaki pozitif tam sayıların toplamını hesaplırsak

$$1 + 2 + \dots + 12 = \frac{12 \cdot 13}{2} = 78$$

elde ederiz. O halde, yanıt $65 + 78 = 143$ elde edilir.

Test 1.5



A) 30 B) 21 C) 31 D) 24 E) 32

Çözüm :

$$129! + 130 \cdot 129! = 129! (1 + 130) = 131 \cdot 129!$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\begin{array}{r|l} 129 & 5 \\ \hline & 25 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 129 & 25 \\ \hline & 5 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 129 & 125 \\ \hline & 1 \end{array}$$

olduğundan son $25 + 5 + 1 = 31$ basamağı sıfırdır.

Test 1.6



A) -16 B) -64 C) -63 D) -62 E) -61

Çözüm : a) $a + b + c$ toplamının en az değeri için üç değer de negatif alınmalıdır. $a = -1$ olursa, $b = -24$ ve $c = -36$ olacağından, en küçük değer,

$$-1 - 24 - 36 = -61$$

olur.

Test 1.7

A) -16 B) -64 C) -32 D) -17 E) -20

Çözüm : $a + b + c$ 'nin en büyük değeri için a en küçük değerini almalıdır.

$$a = -6, b = -4 \text{ ve } c = -6$$

alınırsa, en büyük değer $a + b + c = -6 - 4 - 6 = -16$ olur.**Test** 1.9

A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) 0

Çözüm : $a \cdot b < 0$ ise a veya b 'den biri negatif olmalıdır. $b - c < a - c$ ise $a > b$ bulunur. $b - c > 0$ olduğundan $b > c$ olur.Böylece, $a > b > c$ elde edilir. (I. doğru) a ve b 'den biri negatif olduğundan demek ki a pozitif ve b negatiftir. $b > c$ olduğundan c 'de negatif olması gerekir. $a > 0, b, c < 0$ olduğundan, $a \cdot b \cdot c > 0$ olur. (II. doğru) $a \cdot c - b > 0$ olduğu iddia edilemez (III. yanlış). Bir örnekle gösterelim. $a = 1, c = -4$ ve $b = -1$ için

$$a \cdot c - b = 1 \cdot (-4) - (-1) = -3 < 0$$

olur. $a > 0$ ve $b \cdot c > 0$ olduğundan $a + b \cdot c > 0$ olur. (IV. doğru)**Test** 1.8

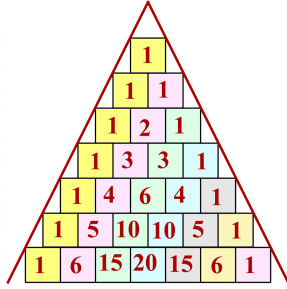
A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 9

Çözüm : İlk iki rakamın toplamı iki basamaklı olmamalıdır. İlk iki rakamdan sonra rakamlar büyüyecektir. Buna göre, aşağıdaki 8 sayı koşula uygundur.

11235, 12358, 21358, 10112

20224, 30336, 40448, 31459

Test 1.10



- A) 2^{100} B) 2^{99} C) 2^{10} D) 2^{101} E) 3^{50}

Çözüm :

0-ıncı satırdaki sayıların toplamı $1 = 2^0$,
 1-inci satırdaki sayıların toplamı $2 = 2^1$,
 2-inci satırdaki sayıların toplamı $4 = 2^2$,
 3-üncü satırdaki sayıların toplamı $8 = 2^3$
 ...

şeklinde devam edersek 100-üncü satırdaki sayıların toplamı 2^{100} olacaktır.

Test 1.11



- A) -16 B) -24 C) -32 D) -40 E) -20

Çözüm : $176 = 2^4 \cdot 11$ olduğundan, üç farklı çift tam sayı

$$a = -44, b = 2 \text{ ve } c = -2$$

alınabilir. Böylece en az toplam

$$a + b + c = -44 + 2 - 2 = -40$$

olur.

Test 1.12 UAMO-2024



- A) 56 B) 84 C) 32 D) 67 E) 60

Çözüm :

$$|n - |-9 - |-25 - |-8||| = 12$$

$$\Rightarrow |n - |-9 - |-25 - 8|| = 12$$

$$\Rightarrow |n - |-9 - |-33|| = 12$$

$$\Rightarrow |n - |-9 - 33|| = 12$$

$$\Rightarrow |n - |-42|| = 12$$

$$\Rightarrow |n - 42| = 12$$

eşitliğinden $n - 42 = 12$ veya $n - 42 = -12$ olabilir.

Buradan, $n = 54$ veya $n = 30$ olabilir. Bunların toplamı da 84 olur.

Test 1.13 UAMO-2024



- A) 555 B) 450 C) 460 D) 520 E) 480

Çözüm : $x \cdot y$ çarpımı en küçük

$$10 \cdot (-5) = -50$$

olabilir. En büyük ise $6 \cdot 10 = 60$ olabilir.

$$-50 \leq x \cdot y \leq 60$$

O halde, $x \cdot y$ çarpımının alabileceği tüm tam sayı değerlerin toplamı

$$51 + 52 + 53 + \dots + 60 = \frac{60 + 51}{2} \cdot (60 - 51 + 1) = 555$$

bulunur.

Test 1.14

- A) 155 B) 250 C) 260 D) 150 E) 180

Çözüm : a)

$$\mathbb{C}(7) = A(7) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30,$$

$$\mathbb{C}(6) = B(6) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

olduğundan,

$$\mathbb{C}(7) + \mathbb{C}(6) = 30 + 120 = 150$$

elde edilir.

Test 1.15

- A) 15 B) 6 C) 5 D) 8 E) 9

Çözüm : n tek sayı olmalıdır. n çift olursa

$$\frac{\mathbb{C}(n+1)}{\mathbb{C}(n)}$$

tam sayı olmaz.

$$\frac{\mathbb{C}(n+1)}{\mathbb{C}(n)} = 120 \Rightarrow \frac{(n+1)n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{A(n)} = 4 \cdot 5 \cdot 6$$

eşitliğine göre, $n+1 = 6$ olursa, $A(n) = A(5) = 2 \cdot 3$ olacağından eşitlik sağlanır. Yani, $n = 5$ bulunur.**Test 1.16 UAMO-2024**

- A) 6 B) 11 C) 8 D) 9 E) 10

Çözüm : Tersten giderek, 400'den 1'e en az işlemle ulaşalım :

$$400 : 2 = 200, \quad 200 : 2 = 100, \quad 100 : 2 = 50.$$

50 'yi 2 'ye bölersek 25 olur ve bundan sonra 1'e ulaşmak için hep 2 çıkarmalıyız. Bu da çok fazla işlem gerektirir. Buna göre de, bu aşamada $50 - 2 = 48$ işlemini yapalım. Daha sonra

$$48 : 2 = 24,$$

$$24 : 2 = 12,$$

$$12 : 2 = 6,$$

$$6 : 2 = 3,$$

$$3 - 2 = 1$$

işlemleriyle 1 elde edilir ve toplam 9 işlem yapılmış olur.

Test 1.17 AMC8-2001

- A) 7425 B) 5724 C) 7254 D) 7542 E) 7254

Çözüm : İstenilen sayı 2 ile başlayan sayılarından birinin katı olabilir. Aksi halde, elde edilecek büyük sayı 8000'den büyük olur.

$$2457 \cdot 2 = 4914, \quad 2475 \cdot 2 = 4950$$

$$2547 \cdot 2 = 5094, \quad 2574 \cdot 2 = 5148$$

$$2745 \cdot 2 = 5490, \quad 2754 \cdot 2 = 5508$$

olduğundan demek ki, istenilen sayı 2 ile başlayan sayıların 2 katı değildir. O halde, 3 katı olanları arayalım. $2475 \cdot 3 = 7425$ olduğu görülebilir. Böylece, yanıt 7425 bulunur.

Test 1.18

- A) 25 B) 24 C) 54 D) 42 E) 36

Çözüm : A veya B 'den en az biri 1'den büyüktür. Ayrıca, $B > A$ olmalıdır.

$A = 1$ ise, $B \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olabilir.

$A = 2$ ise, $B \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olabilir.

$A = 3$ ise, $B \in \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ olabilir.

$A = 4$ ise, $B \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$ olabilir.

$A = 5$ ise, $B \in \{6, 7, 8, 9\}$ olabilir.

$A = 6$ ise, $B \in \{7, 8, 9\}$ olabilir.

$A = 7$ ise, $B \in \{8, 9\}$ olabilir.

$A = 8$ ise, $B \in \{9\}$ olabilir.

O halde, istenen şekilde $1 + 2 + \dots + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 36$ sayı vardır.

Test 1.19

- A) 1025 B) 1023 C) 1024 D) 1000 E) 1001

Çözüm : Rakamları toplamı 7 olan sayıların sayısını rakam sayısına göre bulalım.

1 rakamlı olan 1 tane : 7.

2 rakamlı olan 7 tane : $\{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$.

3 rakamlı olan 28 tane :

1	a	b
---	---	---

 için $a + b = 6$ ise

$ab \in \{06, 15, 24, 33, 42, 52, 60\}$,

2	a	b
---	---	---

 için $a + b = 5$ ise

$ab \in \{05, 14, 23, 32, 41, 50\}$,

3	a	b
---	---	---

 için $a + b = 4$ ise

$ab \in \{04, 13, 22, 31, 40\}$,

4	a	b
---	---	---

 için $a + b = 3$ ise $ab \in \{03, 12, 21, 30\}$,

5	a	b
---	---	---

 için $a + b = 2$ ise $ab \in \{02, 11, 20\}$,

6	a	b
---	---	---

 için $a + b = 1$ ise $ab \in \{01, 10\}$,

7	a	b
---	---	---

 için $a + b = 0$ ise $ab \in \{00\}$.

Yani, 3 basamaklı

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28$$

sayı koşulu sağlar. Böylece, koşulu sağlayan

$$28 + 7 + 1 = 36$$

eleman elde edilir. 38 eleman olabilmesi için iki tane de 4 basamaklı sayı olmalıdır. O halde,

$$1006, 1015$$

sayıları da bu kümede olması gerekir. Ama 1024 sayısı olmamalı. O halde, n en büyük eleman en küçük 1023 olabilir.

Test 1.20

- A) -52 B) -24 C) -54 D) -42 E) -45

Çözüm : Verilen eşitliği

$$y = 2x + z - 38$$

biçiminde yazalım. y 'nin en büyük değeri için x ve z 'nin negatif olduğu da göz önüne alınırsa $x = -1$ ve $z = -2$ alınabilir. Böylece,

$$y = 2(-1) + (-2) - 38 = -42$$

elde edilir.

Test 1.21

- A) 6 B) 7 C) 5 D) 2 E) 4

Çözüm : 7 öğrenci üçer kalem seçeceğinden en az 21 tebeşir olması gerekir. Elimizde 5 renk var. Her renkten 4'er kalem olsaydı toplam

$$5 \cdot 4 = 20$$

kalem olurdu ve 1 öğrenci için 1 kalem eksik kalırdı. O halde, en az bir renkten 5 tane kalem olması gerekir. Yanıt : 5.

Test

1.22

UAMO-2024



A) 48

B) 24

C) 36

D) 60

E) 40

Çözüm : $b(A) = 7$ ise en büyük rakam 7 olmalıdır.

$k(A) = 2$ ise geriye kalan üç rakamın toplamı $25 - 9 = 16$ olmalıdır. 6,5,5 veya 6,6,4 olabilir. Her iki durumda da rakamlarının farklı olması koşulu bozulur.

$k(A) = 3$ ise geriye kalan üç rakamın toplamı $25 - 10 = 15$ olmalıdır. Rakamları birbirinden farklı olması gerektiği için diğer rakamlar 6,5,4 olabilir.

$k(A) \geq 5$ durumu mümkün değildir.

Sonuç olarak koşula uygun sayının rakamları 7, 3, 4, 5, 6 olmalıdır. Son rakamı 4 olan $4! = 24$, son rakamı 6 olan yine $4!$ sayı vardır. O halde, toplam $24 + 24 = 48$ çift sayı bulunabilir.

ABC rakamları sıfırdan farklı üç basamaklı bir doğal sayı olmak üzere,

$$\overrightarrow{ABC} = BCA,$$

$$\overleftarrow{ABC} = ACB,$$

$$\overleftrightarrow{ABC} = CBA$$

biçiminde tanımlanıyor. Bir sayının üstünde kaç defa ok işareti varsa kural en üstteki okun kuralından başlayarak sayıya uygulanıyor. Örneğin,

$$\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{234}} = \overleftrightarrow{\overleftarrow{243}} = \overleftrightarrow{\overrightarrow{432}} = 234$$

olur. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki üç soruyu yanıtlayınız.

Test

1.24



A) 512

B) 215

C) 521

D) 251

E) 152

Çözüm : a) $\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{512}} = \overleftrightarrow{\overleftarrow{521}} = \overleftrightarrow{\overrightarrow{215}} = 512.$

Test

1.23



A) 52

B) 67

C) 54

D) 65

E) 57

Çözüm : $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ olduğundan verilen eşitliği

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot a! = 7 \cdot b^3$$

biçiminde yazabiliriz. Sağ tarafta 7 olduğu için, a en az 7 olmalıdır. Böylece,

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7! = 7 \cdot b^3$$

ise

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = b^3 \Rightarrow 2^6 3^3 5^3 = b^3$$

elde edilir. Buna göre, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ olacaktır. $a + b$ en az 67 olur.

Test

1.25

A) $\frac{74}{75}$ B) $\frac{24}{25}$ C) $\frac{23}{25}$ D) $\frac{73}{75}$ E) $\frac{71}{75}$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{234}} + \overleftrightarrow{\overleftrightarrow{234}}}{\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{234}} + \overleftrightarrow{\overleftrightarrow{234}}} &= \frac{\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{342}} + \overleftrightarrow{\overleftrightarrow{342}}}{\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{432}} + \overleftrightarrow{\overleftrightarrow{243}}} \\ &= \frac{243 + 423}{432 + 243} \\ &= \frac{666}{675} = \frac{74}{75} \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 1.26

- A) 312 B) 345 C) 412 D) 251 E) 221

Çözüm :

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{ABC} + \overleftrightarrow{ABC} &= \overleftrightarrow{BCA} + \overleftrightarrow{ACB} \\
&= ACB + CBA \\
&= 101A + 110C + 11B
\end{aligned}$$

olduğundan en küçük değer için

$$C = 1, A = 2 \text{ ve } B = 3$$

alınırsa,

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{ABC} + \overleftrightarrow{ABC} &= 101 \cdot 2 + 110 \cdot 1 + 11 \cdot 3 \\
&= 345
\end{aligned}$$

elde edilir.

Test 1.27

- A) 5 B) 6 C) 4 D) 3 E) 7

Çözüm :

$$\begin{aligned}
S_1 &= 2! - 1! \\
S_2 &= 3! - 2! \\
&\dots \\
S_9 &= 10! - 9!
\end{aligned}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$S_1 + S_2 + \dots + S_9 = 10! - 1$$

ve $S_1 + S_2 + \dots + S_9 + 1 = 10! = 2^8 3^4 5^2 7$ elde edilir.
Yani, 4 farklı asal çarpanı vardır : 2, 3, 5 ve 7.

Test 1.28

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 7

Çözüm :

$$\begin{aligned}
3^A 9^B 27^C &= 3^{11} \Rightarrow 3^A 3^{2B} 3^{3C} = 3^{11} \\
&\Rightarrow 3^{A+2B+3C} = 3^{11}
\end{aligned}$$

eşitliğinden

$$A + 2B + 3C = 11$$

olması gerekir. C en fazla 3 olabilir. Ama, sayılar pozitif olduğundan $A + 2B = 2$ olamaz.

 $C = 2$ ise,

$$A + 2B = 5 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = 3$$

olacaktır.

 $C = 1$ ise

$$A + 2B = 8 \Rightarrow B = 2 \Rightarrow A = 4$$

olur. $(A, B, C) = (3, 1, 2)$ veya $(4, 2, 1)$ olabilir.**Test 1.29**

- A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 17

Çözüm : Verilen iki eşitliği taraf tarafa toplarsak

$$\begin{aligned}
3A + 2B + 3C &= 40 \Rightarrow 3(A + B + C) = 40 + B \\
&\Rightarrow A + B + C = \frac{40 + B}{3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu toplamın en büyük değeri için B mümkün olduğu kadar büyük alınmalıdır. Ayrıca, 40 ile toplandığında 3 ile tam bölünebilmesi için, 3 ile bölümünden kalan 2 olmalıdır.

$$B + 3C = 17$$

eşitliğine göre, B en fazla 14 olabilir. Bu durumda $C = 1$ ve $A = 3$ olacaktır. Yani, $A + B + C$ en fazla 18 olabilir.

Test

1.30

UAMO-2000



- A) 195 B) 196 C) 198 D) 197 E) 199

Çözüm : Tüm terimlerin çarpımı,

$$n = (5 \cdot 1) \cdot (5 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 3) \cdots (5 \cdot 200) = 5^{200} \cdot (200!),$$

dir. Şimdi, $200!$ sayısının içinde kaç tane 2 olduğu bulunmalıdır.

$$\begin{aligned} k &= \left\lfloor \frac{200}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{200}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{200}{2^7} \right\rfloor \\ &= 100 + 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 \\ &= 197 \end{aligned}$$

bulunur. Yani, $n = 10^{197} \cdot 5^3 \cdot A$ olur. O halde n sayısının sondan 197 basamağı sıfırdır.

Test

1.31

UOMO-B-2016



- A) 5 B) 6 C) 4 D) 3 E) 2

Çözüm : 7 adım sonunda elde edilebilecek en büyük sayı

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 17 \rightarrow 33 \rightarrow 65 \rightarrow 129$$

sayısıdır. Bu durumda da 143 elde edilemez. Diğer yandan, n tek sayısı için $2n - 1$ ve $n + 2$ daima tek sayı olacağından bir çift sayı elde edilemez. Yani 40 sayısı da elde edilemez. Diğer durumlar aşağıdaki gibi elde edilir :

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 17 \rightarrow 19 \rightarrow 21 \rightarrow 23$$

$$1 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 13$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 17 \rightarrow 33 \rightarrow 35 \rightarrow 37$$

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow 17 \rightarrow 33 \rightarrow 65 \rightarrow 67$$

Buradan da cevap 4 olur.

RASYONEL SAYILAR

Alıştırma 2.1.



Çözüm :

$$K = \frac{2 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{5}}{1 + \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{1}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{1}} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$$

Alıştırma 2.2.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} &= \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3} \div 4\right) \cdot \frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{2}{3} \div 4\right) \div 5} = 1 \div (((2 \div 3) \div 4) \div 5) \end{aligned}$$

Alıştırma 2.3.



Çözüm :

$$\begin{aligned} S &= \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \cdots + \frac{1002}{1001} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{1001}\right) \\ &= 999 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{1001} \\ &= 999 + a \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 2.4.



Çözüm :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Alıştırma 2.5.



Çözüm : $y = -5$ olamaz. $2x + 3(-5) - 5$ eşitliğine göre $x = 10$ olamaz.

Alıştırma 2.6.



Alıştırma

2.7.



Ondalık Sayı

Bu konu kısaca özetlenmiş olup, daha ayrıntılı anlatım Dahimatik 6 kitabında bulunabilir.

Çözüm :

$$\frac{7 \cdot 6! + 6!}{7 \cdot 7! + 6!} = \frac{6! (7 + 1)}{6! (49 + 1)} = \frac{8}{50}$$

$$\frac{5! + 6 \cdot 5!}{7!} = \frac{5! (1 + 6)}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{8}{50} - \frac{1}{6} = \frac{-1}{150}$$

olduğundan, yanıt -150 elde edilir.

Devirli Ondalık Sayılar

Bu konu kısaca özetlenmiş olup, daha ayrıntılı anlatım Dahimatik 6 kitabında bulunabilir.

Aıştırma 2.8.



Çözüm : Bölme işlemi yaparak,

$$\frac{105}{101} = 1.\overline{0396}$$

olduğunu görebilirsiniz. O halde, virgülden sonraki **0396** dörtlüsü **25** kez tekrar ede ve **100**-üncü rakamın **6** olduğu görülür.

Aıştırma 2.9.



Çözüm : Verilen toplam

$$4, \bar{a}$$

devirli sayısı ile gösterilebilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{4a - 4}{9} &= \frac{a + 79}{18} \Rightarrow \frac{40 + a - 4}{9} = \frac{a + 79}{18} \\ &\Rightarrow \frac{36 + a}{1} = \frac{a + 79}{2} \\ &\Rightarrow 72 + 2a = a + 79 \\ &\Rightarrow a = 7 \end{aligned}$$

elde edilir.

Aıştırma 2.10.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{58}{21} &= 2 + \frac{16}{21} = 2 + \frac{1}{\frac{21}{16}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{5}{16}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{16}{5}}} \end{aligned}$$

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}}}$$

eşitliğinden $a = 2, b = 1, c = 3$ ve $d = 5$ olur ve

$$a + b + c + d = 2 + 1 + 3 + 5 = 11$$

elde edilir.

Aıştırma 2.11. UAMO-2024



Çözüm :

$$(a + 1 \div (b + 1 \div c)) = \frac{68}{21} = 3 + \frac{5}{21}$$

eşitliğinden $a = 3$ ve $b + 1 \div c = \frac{21}{5} = 4 + \frac{1}{5}$ olur. Buradan, $b = 4$ ve $c = 5$ elde edilir. Yanıt : $3 + 4 + 5 = 12$.

KONU SONU TESTİ (Rasyonel Sayılar)

Test 2.1



- A) 5 B) 6 C) 4 D) $\frac{25}{77}$ E) $\frac{7}{11}$

Çözüm : Her parantezin içindeki toplamı hesaplırsak

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdots \frac{12}{11} = \frac{12}{2} = 6$$

elde edilir.

Test 2.2 FLS-1994



- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 3 E) $\frac{1}{3}$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\frac{3}{2} + \frac{1}{1}}{3} \div \frac{5}{3} &= \frac{\frac{5}{2}}{3} \div \frac{5}{3} = \frac{5}{6} \div \frac{5}{3} \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 2.3



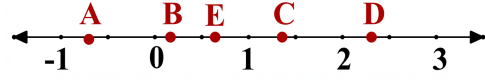
- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{3}$ D) 3 E) $\frac{2}{3}$

Çözüm : İşlem önceliğine dikkat ederek hesaplırsak

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \div \left(1 - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \right) \\ = \frac{1}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

olduğundan $\frac{2}{3}$ sayısının karesidir.

Test 2.4 UAMO-2024



- A) $E \cdot C$ B) $\frac{C}{B}$ C) $\frac{D}{A}$ D) $\frac{C}{A}$ E) $\frac{B}{E}$

Çözüm : $\frac{D}{A}$ negatif olduğundan aralarında en küçük olanıdır. Çünkü diğerleri pozitifdir.

$$\frac{B}{E} < \frac{C}{E} < \frac{C}{B}$$

olacağı açıktır. $\frac{C}{B} > E \cdot C$ olduğundan en büyük olan $\frac{C}{B}$ olur.

Test 2.5 FLS-1990



- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$ D) 3 E) $\frac{3}{2}$

Çözüm : $x = \frac{3}{9}$ ve $y = \frac{6}{9}$ olduğundan,

$$x^{-1} - y^{-1} = \left(\frac{3}{9} \right)^{-1} - \left(\frac{6}{9} \right)^{-1} = \frac{9}{3} - \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

elde edilir.

Test 2.6 AMC8-2022



- A) $\frac{6}{253}$ B) $\frac{1}{253}$ C) $\frac{1}{213}$ D) $\frac{1}{231}$ E) $\frac{2}{231}$

Çözüm :

$$\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \cdots \frac{\cancel{18}}{\cancel{20}} \cdot \frac{\cancel{19}}{\cancel{21}} \cdot \frac{\cancel{20}}{\cancel{22}} = \frac{1 \cdot 2}{21 \cdot 22} = \frac{1}{231}$$

Test 2.7 FLS-1996

- A) 52 B) 48 C) 50 D) 54 E) 56

Çözüm : $\frac{4}{9}$ kesrine denk bir kesir $\frac{4a}{9a}$ ile gösterilebilir.
Buna göre,

$$\frac{4a+2}{9a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8a+4 = 9a \Rightarrow a = 4$$

elde edilir. O halde, $\frac{4}{9}$ 'a denk kesir $\frac{4 \cdot 4}{9 \cdot 4} = \frac{16}{36}$ olduğundan
pay ve paydasının toplamı $16 + 36 = 52$ olur.

Test 2.8 FLS-1994

- A)
- $\frac{3}{5}$
- B)
- $\frac{9}{10}$
- C)
- $\frac{10}{9}$
- D)
- $\frac{3}{2}$
- E)
- $\frac{5}{3}$

Çözüm : $0, \bar{x} = \frac{x}{9}$ ve $0, \bar{y} = \frac{y}{9}$ yazılırsa,

$$\frac{\frac{x}{10} + \frac{y}{10}}{\frac{x}{9} + \frac{y}{9}} = \frac{\frac{x+y}{10}}{\frac{x+y}{9}} = \frac{x+y}{10} \cdot \frac{9}{x+y} = \frac{9}{10}$$

elde edilir.

Test 2.9 FLS-1993

- A) 20 B) 30 C) 20,5 D) 30,5 E) 21

Çözüm :

$$\frac{0, b0b}{0, 0b0b} + \frac{a, b}{0, ab} + \frac{0, ab}{0, 0ab} = \frac{b0b0}{b0b} + \frac{ab0}{ab} + \frac{ab0}{ab}$$

$$= 10 + 10 + 10 = 30$$

elde edilir.

Test 2.10 FLS-1994

- A) 20 B) 10,5 C) 10 D) 20,5 E) 21

Çözüm :

$$\frac{a, b}{0, ab} - \frac{c0, d}{c, 0d} + \frac{ef, ef}{e, fef} = \frac{ab0}{ab} - \frac{c0d0}{c0d} + \frac{efef0}{efef}$$

$$= 10 - 10 + 10 = 10$$

elde edilir.

Test 2.11

- A)
- $\frac{173}{130}$
- B)
- $\frac{186}{143}$
- C)
- $\frac{133}{176}$
- D)
- $\frac{23}{66}$
- E)
- $\frac{113}{156}$

Çözüm : İkinci ve üçüncü kesir 1'den büyük diğer kesirler ise 1 den küçüktür. 1'den büyük olanları kendi arasında küçük olanları da kendi arasında sıralayalım.

$$1 - \frac{113}{156} = \frac{43}{156}, \quad 1 - \frac{23}{66} = \frac{43}{66},$$

$$1 - \frac{133}{176} = \frac{43}{176}$$

olduğundan,

$$\frac{43}{66} > \frac{43}{156} > \frac{43}{176} \Rightarrow \frac{23}{66} < \frac{113}{156} < \frac{133}{176}$$

olur. Diğer yandan,

$$\frac{186}{143} - 1 = \frac{43}{143}, \quad \frac{173}{130} - 1 = \frac{43}{130}$$

olduğundan, $\frac{173}{130} > \frac{186}{143}$ olacaktır. Böylece,

$$\frac{173}{130} > \frac{186}{143} > \frac{133}{176} > \frac{113}{156} > \frac{23}{66}$$

elde edilir.

Test 2.12

- A) 10 B) 0 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 2

Çözüm :

$$A(4) = 4 - \frac{20}{4+1} = 0$$

olduğundan çarpımın sonucu 0'dır.

Test 2.13

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Çözüm :

$$\frac{6a+4}{3a+1} = \frac{6a+2+2}{3a+1} = 2 + \frac{2}{3a+1}$$

eşitliğinin bir tam sayı olması için $3a+1$ sayısı 2'nin bir böleni olmalıdır.

$$3a+1=2 \Rightarrow a \notin \mathbb{Z},$$

$$3a+1=1 \Rightarrow a=0 \left(\frac{1}{a} \text{ kesri tanımsız olur} \right)$$

$$3a+1=-1 \Rightarrow a \notin \mathbb{Z}$$

$$3a+1=-2 \Rightarrow a=-1 \left(-\frac{2}{1+\frac{1}{a}} \text{ kesri tanımsız olur} \right)$$

olduğundan verilen ifade $a \in \mathbb{Z}$ için tam sayı olamaz. Yanıt : 0.**Test 2.14**

- A) 14 B) 77 C) 55 D) 21 E) 35

Çözüm : 11 ve 7 asal sayıdır ve bunları sadeleştirmek mümkün olmayacağı için kesrin payına koymamız gerekir. Diğer sayıları sadeleştirecek şekilde pay ve paydaya aşağıdaki gibi koyabiliriz.

$$\frac{11 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10} = 77$$

Böylece, bu değer en az 77 olabilir.

Test 2.15 UOMO-2000

- A) 42 B) 58 C) 55 D) 52 E) 41

Çözüm : x, y ve z pozitif tam sayılar olduklarından,

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = 2 + \frac{4}{13} = 2 + \frac{1}{\frac{13}{4}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}$$

eşitliğinden, $x = 2, y = 3$ ve $z = 4$ elde edilir. O halde, $z^3 - xy = 58$ olur.**Test 2.16 UOMO-2000**

- A) 120 B) 210 C) 180 D) 21 E) 60

Çözüm : Herhangi, $a : b : c : \dots : z$ ifadesinde, a ve b hariç diğer tüm sayıları parantezler kullanarak pay veya paydadan istediğimiz yere koymamız mümkündür. a kesrin kesrin "payın"da, b ise "payda"sındadır. Buna göre, en büyük sayıyı bulmak istediğimiz için,

$$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2} = 180$$

elde ederiz. Bunu parantezlerle ise,

$$1 : (((2 : 3) : 4) : 5) : 6 = 180$$

şeklinde gösterebiliriz.

Test 2.17

A) 1 B) 7 C) 5 D) 2 E) 3

Çözüm : $c + d = 1 + 2 = 3$ paydanın en küçük değeridir. $17 + 18 = 35$ olduğundan, kesrin payı 3 ile bölünebilen 35'ten küçük en büyük tam sayı olmalıdır. 33 olabilir. Bu durumda,

$$\frac{33}{3} = 11$$

elde edilebilecek en büyük tam sayı değeridir. Bu değeri

$$33 = 18 + 15 = 17 + 16$$

olduğundan 2 şekilde elde edebiliriz.

Test 2.18

A) 4 B) 7 C) 8 D) 1 E) 3

Çözüm :

a ve b aralarında asal olduğundan $(a, b) = 1$ olur ve $\frac{a}{b}$ kesrinin sadeleşmemesi gerekir.

$$a \cdot b = 7! = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

yazalım. Aynı asal çarpanın tüm kuvvetiyle (üssüyle) beraber ya a ya da b sayısının çarpanı olması gerekir. Aksi halde sadeleşir. Buna göre,

2^4 sayısı ya a 'nın ya da b 'nin çarpanı olabilir.

3^2 sayısı ya a 'nın ya da b 'nin çarpanı olabilir.

5 sayısı ya a 'nın ya da b 'nin çarpanı olabilir.

7 sayısı ya a 'nın ya da b 'nin çarpanı olabilir.

Yani, kuvvetiyle birlikte her asal çarpan için 2 seçenek var. O halde, $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ kesir oluşturulur. Ama burada bir şeyi unuttuk. Kesirin basit kesir olmasını yani $a < b$ olmasını istiyoruz. 16 kesrin yarısında $a > b$, yarısında $a < b$ olduğundan 8 tane $\frac{a}{b}$ basit kesir yazılabilir.

Test 2.19 UAMO-2006

A) 14 B) 13 C) 15 D) 11 E) 12

Çözüm : $20 = 2^2 \cdot 5$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $16 = 2^4$, $14 = 2 \cdot 7$, $12 = 2^2 \cdot 3$ ve $10 = 2 \cdot 5$

eşitliklerinden 7, 3 ve 2'lerin toplam sayılarının sırasıyla, 1, 3 ve 11, yani tek sayılar olduğu görülür. Demek ki, parantezler nasıl konulursa konulsun (yani sadeleştirmeler nasıl yapılırsa yapılsın), en az bir 2, bir 3 ve bir 7 kalacaktır. O halde denklemi sağlayan x ve y sayıları için, $x + y$ 'nin en küçük olması istenirse, $x = 7$ ve $y = 2 \cdot 3 = 6$ (ya da $x = 6$, $y = 7$) alınmalıdır. Örnek olarak,

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{20 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 6}{18 \cdot 10 \cdot 16 \cdot 7} \\ &= 20 : 18 : (16 : 14 : 12) : 10 : (7 : 6) \end{aligned}$$

alınabilir. (Parantezler bulunmayan yerde bölme işlemi sıra ile yapılır).

Test 2.20A) 9 B) $\frac{25}{3}$ C) $\frac{7}{5}$ D) $\frac{23}{6}$ E) $\frac{23}{3}$ **Çözüm :**

$$\frac{3^2 - 2^2}{3} = \frac{(3 - 2)(3 + 2)}{3} = \frac{5}{3},$$

$$\frac{4^2 - 3^2}{5} = \frac{(4 - 3)(4 + 3)}{5} = \frac{7}{5},$$

$$\frac{5^2 - 4^2}{7} = \frac{(5 - 4)(5 + 4)}{7} = \frac{9}{7},$$

⋮

$$\frac{13^2 - 11^2}{23} = \frac{(13 - 12)(13 + 12)}{23} = \frac{25}{23},$$

eşitlikleri taraf tarafa çarpılrsa

$$\frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \frac{9}{7} \cdots \frac{23}{21} \cdot \frac{25}{23} = \frac{25}{3}$$

elde edilir.

CEBİRSEL İFADELER

Alıştırma 3.1.



Çözüm : a) $5x + 4 - 3y - 7x + 3x - 2 = x - 3y + 2$

b) $5a + 7 - (-7a^2) - 6a - 3a^2 - 2$

Çözüm : b) $5a + 7 + 7a^2 - 6a - 3a^2 - 2 = 4a^2 - a + 5$

c) $5x - (-4) - (3y - 7x) - (-3x + 2)$

Çözüm : c) $15x - 3y + 2$

d) $3(5x - (-4)) - 2(3y - 7x) - 5(3x - 2)$

Çözüm : d) $14x - 6y + 22$

Alıştırma 3.2.



Çözüm :

$$\begin{aligned} K &= 11a - 6b + 3c \\ &= 11(a + 5) - 6(b - 3) + 3(c - 7) \\ &= \underbrace{11a - 6b + 3c}_K + 52 \end{aligned}$$

olduğundan 52 artar.

Alıştırma 3.3.



Çözüm : $1 \cdot 5 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + \dots + 19 \cdot 23 = a$ diyelim.

$$S = 1 \cdot (5 + 3) + 3 \cdot (7 + 3) + \dots + 19 \cdot (23 + 3)$$

$$= K + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + \dots + 19 \cdot 3$$

$$= K + 3(1 + 3 + 5 + \dots + 19)$$

$$= K + 3 \cdot \left(\frac{19 - 1}{2} + 1 \right) \left(\frac{19 + 1}{2} \right)$$

$$= K + 300$$

elde edilir.

Alıştırma 3.4.



Çözüm : $2a + 3b + 5c = 100$ ifadesi 3 ile genişletilirse $6a + 9b + 15c = 300$ olur.

$$5a + 9b + 12c = 300 - a - 3c = 300 - (a + 3c)$$

ifadesinin en büyük değerini alması $(a + 3c)$ 'nin en küçük değerini alması durumunda mümkün olur. $c = 1$ ise, $2a + 3b = 95$ olmalıdır. b 'nin tam sayı olabilmesi için a değeri 1'den farklı en küçük 4 olabilir. Buradan,

$$5a + 9b + 12c = 300 - (4 + 3) = 293$$

alabileceği maksimum değer olur.

Sayı Örüntülerinde Cebirsel İfadeler

Alıştırma 3.5.



Çözüm :

a) Artış miktarı 6 olan bir aritmetik örüntü.

b) Yinelemeli örüntü

c) Ortak çarpanı 2 olan bir geometrik örüntü.

d) Ortak çarpanı $\frac{1}{3}$ olan bir geometrik örüntü.

e) Artış miktarı, 5, 10, 15, 20, ... şeklinde aritmetik arttığından kuadratik örüntüdür.

f) Artış miktarı -7 olan aritmetik örüntü.

Aıştırma 3.6.**Çözüm :** a)

$$a_n = 99 + 4(n - 1) = 99 + 4n - 4 = 4n + 95$$

$$b) a_{100} = 4 \cdot 100 + 95 = 495$$

Aıştırma 3.7.**Çözüm :** a) Bu yinelemeli örüntü $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ eşitliğiyle devam eder.

$$a_{12} = a_{10} + a_{11} \Rightarrow 199 = a_{11} + 76 \Rightarrow a_{11} = 123$$

bulunur. O halde,

$$a_{13} = a_{11} + a_{12} = 123 + 199 = 322$$

olur.

Aıştırma 3.8.**Çözüm :** Genel terimi $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$ şeklindedir. Buna göre,

$$\begin{aligned} \frac{a_{10} + a_{11}}{a_{12}} &= \frac{5 \cdot 2^9 + 5 \cdot 2^{10}}{5 \cdot 2^{11}} \\ &= \frac{5 \cdot 2^9 (1 + 2)}{5 \cdot 2^9 \cdot 2^2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

elde edilir.

Aıştırma 3.9.**Çözüm :** $a_{10} = 10$ ve $a_{30} = 150$ verilmiş. $a_{30} - a_{10} = 140$ dir ve a_{10} 'dan a_{30} 'a kadar 20 kez artış yapılır. O halde, bu aritmetik örüntünün artış miktarı

$$\frac{140}{20} = 7$$

olur. Buna göre, $a_n = (n - 1) 7 + a_1$ yazılabilir. $a_{10} = 10$ ise,

$$a_{10} = (10 - 1) 7 + a_1 = 10 \Rightarrow a_1 = -53$$

elde edilir. O halde, $a_{41} = (41 - 1) 7 - 53 = 227$ bulunur.**Aıştırma 3.10.****Çözüm :**

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & 7 & , & 17 & , & 31 & , & 49, \dots \\ \text{6 artış} & & \text{10 artış} & & \text{14 artış} & & \text{18 artış} & & \end{array}$$

olduğundan artış miktarları 6, 10, 14, 18, ... biçiminde bir aritmetik örüntü oluşturmaktadır. Yani, bu bir kuadratik örüntüdür. O halde, genel terimi $a_n = a \cdot n^2 + b \cdot n + c$ biçimindedir.

$$a_1 = 1 \Rightarrow 1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c,$$

$$a_2 = 7 \Rightarrow 7 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c,$$

$$a_3 = 17 \Rightarrow 17 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c,$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ 4a + 2b + c = 7 \\ 9a + 3b + c = 17 \end{cases}$$

eşitliklerinden a , b ve c 'yi bulmalıyız. İlk eşitliği ikinci ve üçüncü eşitlikten çıkarırsak

$$\begin{cases} 3a + b = 6 \\ 8a + 2b = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 6 \\ 4a + b = 8 \end{cases}$$

olur. Son eşitliklerden de ilkinii ikinciden çıkarırsak $a = 2$ olur. Böylece, $b = 0$ ve $c = -1$ elde edilir. O halde, $a_n = 2n^2 - 1$ bulunur. $a_{20} = 2 \cdot 20^2 - 1 = 799$ olur.

Cebirsel İfadelerin Çarpımı

İki Terimli Cebirsel Bir İfadenin
Karesini Alma

Alıştırma 3.11.



Çözüm :

$$\begin{aligned}
& (5a - 4) \cdot (2a - 5 + 3a^2) \\
&= 5a(2a - 5 + 3a^2) - 4(2a - 5 + 3a^2) \\
&= 15a^3 + 10a^2 - 25a - 8a + 20 - 12a^2 \\
&= 15a^3 - 2a^2 - 33a + 20
\end{aligned}$$

olduğundan verilen ifade

$$15a^3 - 2a^2 - 33a + 20 - 15a^3 + 33a = 20 - 2a^2$$

olur.

Alıştırma 3.12.



Çözüm : a) $(2a - 7b)^2 = 4a^2 - 28ab + 49b^2$.

b) $\left(3x + \frac{5}{2}y\right)^2$

Çözüm : b) $\left(3x + \frac{5}{2}y\right)^2 = 9x^2 + 15xy + \frac{25}{4}y^2$.

Alıştırma 3.13.



Çözüm : $a_n = 5n^2 - 6n + 3$ ise

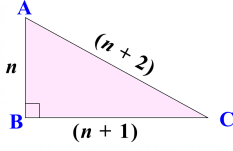
$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 5(n+1)^2 - 6(n+1) + 3 \\
&= 5(n^2 + 2n + 1) - 6n - 6 + 3 \\
&= 5n^2 + 4n + 2
\end{aligned}$$

olur.

$$a_{n+1} - a_n = 99,$$

$$(5n^2 + 4n + 2) - (5n^2 - 6n + 3) = 10n - 1$$

eşitliklerine göre, $10n - 1 = 99$ ve buradan $n = 10$ bulunur.

Alıştırma**3.14.****Çözüm :**

$$(n + 2)^2 = (n + 1)^2 + n^2$$

$$n^2 + 4n + 4 = n^2 + 2n + 1 + n^2$$

eşitliğinden, $n^2 - 2n - 3 = 0$ ve $n^2 - 2n = 3$ elde edilir.

Cebirsel İfadelerin Tam Kare Yapılması

Bazen verilen cebirsel bir ifadenin tam kare yapılması sorunun çözümünü kolaylaştırabilir. Örneğin,

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

olur.

Bir tam karenin asla negatif olamayacağını da unutmayınız.

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$$

eşitliğini,

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$$

biçiminde yazarsak, tam kareler toplamı 0 ise toplanan her terimin 0 olması gerekir. O halde, $x = 1$ ve $y = -2$ bulunur.

Alıştırma**3.15.**

Çözüm : a) $(2a + 5b)^2$.

b) $9x^2 - 42xy + 49y^2$

Çözüm : b) $(3x - 7y)^2$.

c) $9x^2 - 2xy + \frac{y^2}{9}$

Çözüm : c) $(3x - y/3)^2$.

d) $x^2y^2 - 4xy + 4$

Aıştırma

3.16. UOMO-B-2019



Çözüm : Verilen eşitliği

$$x^2y^2 - 2xy + 1 = 25 \Rightarrow (xy - 1)^2 = 25$$

biçiminde yazabiliriz.

$$xy - 1 = 5 \text{ veya } xy - 1 = -5$$

olabilir. Fakat, x ve y pozitif olduğundan $xy = 6$ olabilir.
O zaman,

$$(x, y) \in \{(1, 6), (6, 1), (2, 3), (3, 2)\}.$$

olabilir ki, $x + y$ 'nin alabileceği değerler 7 veya 5 bulunur.

Aıştırma

3.18.



Çözüm : a) $-x^2 + 4x + 17 = -(x - 2)^2 + 21$ olduğundan en büyük değer 21 olur.

b) $-x^2 + x - 17 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - 17$ olduğundan en büyük değer $\frac{1}{4} - 17 = -\frac{67}{4}$ olur.

Aıştırma

3.19.



Çözüm : a) $x^2 + 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 + 4$ biçiminde yazarsak $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 + 4$ olduğundan en küçük değeri $x = -2$ ve $y = -3$ iken 4 olur.

b) $x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 3y + \frac{9}{4} + 17 - \frac{1}{4} - \frac{9}{4}$ biçiminde yazarsak $(x + 1/2)^2 + (y - 3/2)^2 + \frac{29}{2}$ olduğundan en küçük değeri $x = -1/2$ ve $y = 3/2$ iken $\frac{29}{2}$ olur.

Aıştırma

3.20.



Aıştırma

3.17.



Çözüm : a) $x^2 + 4x + 17 = (x + 2)^2 + 13$ olduğundan en küçük değer 13 olur.

b) $x^2 + 3x + 17 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 17 - \frac{9}{4}$ olduğundan en küçük değer $17 - \frac{9}{4} = \frac{59}{4}$ olur.

Çözüm : a) $x^2 + 4xy + 4y^2 + y^2 + 6y + 9 + 8$ biçiminde yazarsak $(x + 2y)^2 + (y + 3)^2 + 8$ olduğundan en küçük değeri $y = -3$ ve $x = 6$ iken 8 olur.

b) $x^2 + xy + y^2 - 3y + 17$ ifadesini

$$\begin{aligned} & \left(x^2 + xy + \frac{y^2}{4}\right) + \frac{3y^2}{4} - 3y + 17 \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y^2}{4} - y + 1\right) + 14 \\ &= \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{y}{2} - 1\right)^2 + 14 \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. O halde, en küçük değeri $y = 2$ ve $x = -1$ iken 14 olur.

Aıştırma**3.21. UOMO-B-2021****Çözüm :** $b = -3a - 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 &= a^2 + (-3a - 1)^2 \\
&= 10a^2 + 6a + 1 \\
&= 10 \left(a^2 + \frac{3}{5}a + \frac{9}{100} \right) + 1 - \frac{9}{10} \\
&= 10 \left(a + \frac{3}{10} \right)^2 + \frac{1}{10} \\
&\geq \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitlik $a = -3/10, b = -1/10$ durumunda sağlanır.**Cebirsel İfadelerde Ortak Paranteze Alma****Aıştırma****3.22.****Çözüm :** a) $4a(2 + 5b)$.b) $9x^2y - 18xy^2$ **Çözüm :** b) $9xy(x - 2y)$.c) $(a - 1)x + (a - 1)y$ **Çözüm :** c) $(a - 1)(x + y)$.d) $(a - 1)(x + 1) + (a - 1)(y - 2)$ **Çözüm :** d) $(a - 1)(x + 1 + y - 2) = (a - 1)(x + y - 1)$.e) $9x^2y - x^2y^2 + x^3$ **Çözüm :** e) $x^2(x + 9y - y^2)$.**Aıştırma****3.23.****Çözüm :**

$$\begin{aligned}
xy + 3 - y &= 6xy + 3x + y \Rightarrow 3 - 2y = 5xy + 3x \\
&\Rightarrow x(5y + 3) = 3 - 2y \\
&\Rightarrow x = \frac{3 - 2y}{5y + 3}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 3.24.

Çözüm : $6x - 10y - 35z = 0$ ifadesini $2x - y$ ile $y + 5z$ terimleri olacak şekilde düzenleyelim.

$$\begin{aligned} 6x - 3y - 7y - 35z &= 0 \\ \Rightarrow 3(2x - y) - 7(y + 5z) &= 0 \\ \Rightarrow 3(2x - y) &= 7(y + 5z) \\ \Rightarrow \frac{2x - y}{y + 5z} &= \frac{7}{3} \end{aligned}$$

olur. $2x - y$ ile $y + 5z$ aralarında asal olduğundan

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ y + 5z = 3 \end{cases}$$

olur. Bu iki eşitliği taraf tarafa toplarsak $2x + 5z = 10$ elde edilir.

Alıştırma 3.25.

Çözüm : a) $\frac{12x^2 - 3yx - 6zx}{4x - y - 2z} =$
 $\frac{3x(4x - y - 2z)}{(4x - y - 2z)} = 3x$

b) $\frac{6a^2 + 4a}{3a^2 + 2a}$

Çözüm : b) $\frac{6a^2 + 4a}{3a^2 + 2a} = \frac{2a(3a + 2)}{a(3a + 2)} = 2$

c) $\frac{(2x + 3) + a(2x + 3)}{(2x + 3) + b(2x + 3)}$

Çözüm : c) $\frac{(2x + 3) + a(2x + 3)}{(2x + 3) + b(2x + 3)} =$
 $\frac{(2x + 3)(1 + a)}{(2x + 3)(1 + b)} = \frac{1 + a}{1 + b}$

d) $\frac{ax + ay + bx + by}{x + y}$

Çözüm : d) $\frac{a(x + y) + b(x + y)}{x + y} =$
 $\frac{(x + y)(a + b)}{(x + y)} = a + b$

Cebirsel Kesirleri Parçalama**Alıştırma 3.26.**

Çözüm : Kesiri parçalarsak

$$\begin{aligned} m &= \frac{14n + 13}{7n + 2} = \frac{2(7n + 2) + 9}{(7n + 2)} \\ &= \frac{2(7n + 2)}{(7n + 2)} + \frac{9}{7n + 2} = 2 + \frac{9}{7n + 2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ifadenin tam sayı olması için, $\frac{9}{7n + 2}$ tam sayı olmalıdır. Buradan

$$7n + 2 \notin \{-1, 1, 3, -3, -9\}$$

olamaz. Fakat, $n = 1$ iken $7n + 2 = 9$ olabilir. O halde, $m = 3$ bulunur. Eşitliği sağlayan (m, n) tam sayı ikilisi sadece $(3, 1)$ ikilisidir.

Alıştırma 3.27. UOMO-2002

Çözüm : Önce x veya y değişkenini yalnız bırakalım.
 $5(x + y) = xy$ ise,

$$x = \frac{5y}{y - 5} = \frac{5y - 25 + 25}{y - 5} = 5 + \frac{25}{y - 5}$$

eşitliğine göre, $x \in \mathbb{Z}$ olması için,

$$y - 5 \in \{\mp 1, \mp 5, \mp 25\}$$

olmalıdır. O halde, 6 tane (x, y) sıralı ikilisi vardır.

Alıştırma 3.28. UMO - 2004

Çözüm : Önce x veya y değişkenini yalnız bırakalım.
 $2x + 5y = xy - 1$ ise,

$$y = \frac{2x + 1}{x - 5} = \frac{2x - 10 + 11}{x - 5} = 2 + \frac{11}{x - 5}$$

eşitliğine göre, y tam sayı olması için, $x - 5 = \mp 1$, veya ∓ 11 olabilir. Buradan 4 tane (x, y) çifti elde edilir.

Alıştırma 3.29.**Çözüm :** Eşitliğin hem sol tarafı

$$\frac{3n+5}{3} = n + \frac{5}{3},$$

hem sağ tarafı ise

$$\frac{n}{2} + \frac{3n+10}{6} = \frac{3n+3n+10}{6} = \frac{6n+10}{6} = n + \frac{5}{3}$$

değerine eşittir. Yani, verilen eşitlik her n tam sayısı için doğrudur.

Payda eşitlenerek her iki tarafın aynı olduğu görülerek de çözülebilirdi.

Alıştırma 3.30.**Çözüm :**

$$\begin{aligned} \frac{5y+24}{y+3} - \frac{x-3}{x+3} &= \frac{(5y+15)+9}{y+3} + \frac{6-(x+3)}{x+3} \\ &= 5 + \frac{9}{y+3} + \frac{6}{x+3} - 1 = 4 + 3 \left(\frac{2}{x+3} + \frac{3}{y+3} \right) \\ &= 4 + 3 \cdot 11 = 37 \end{aligned}$$

Üç Terimli Cebirsel İfadelerin Karesi

- $(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+xz+yz)$
- $(x-y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(-xy+xz-yz)$
- $(x+y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy-xz-yz)$
- $(x+2y+3z)^2 = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 2(2xy+3xz+6yz)$
- $(x-2y+1)^2 = x^2 + 4y^2 + 1 + 2(-2xy+x-2y)$

Alıştırma 3.31.

Çözüm : a) $(a+b-2c)^2$ b) $(a-b+2)^2$
c) $(a+2b-3)^2$

İki Tam Karenin Farkının Çarpımsal Yazılışı

★ Üstteki örnekte,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

olduğunu gördük. Bu tür eşitliklere matematikte **özdeşlik** denir. Böyle bir ifade ile karşılaştığımızda eşitliğin sağ tarafındakinin yerine soldakini, soldakinin yerine de sağdakini yazabiliriz. Bu özdeşliği özellikle sadeleştirme veya denklem çözmede cebirsel kareler farkını çarpımsal haline getirirken kullanabiliriz. Örneğin,

$$4x^2 - y^2 \text{ yerine } (2x - y)(2x + y)$$

yazılabilir.

Alıştırma 3.32.



Çözüm : a) $\left(2a - \frac{b}{3}\right) \left(2a + \frac{b}{3}\right)$.

b) $25x^2z^2 - 9x^2y^2$

Çözüm : b) $(5xz - 3xy)(5xz + 3xy)$.

c) $(3n + 1)^2 - (3n - 2)^2$

Alıştırma 3.33.



Çözüm :

$$\begin{aligned} 7^4 - 3^4 &= (7^2)^2 - (3^2)^2 \\ &= \underbrace{(7^2 - 3^2)}_{(7-3)(7+3)} (7^2 + 3^2) \\ &= (7 - 3)(7 + 3)(7^2 + 3^2) \\ &= 4 \cdot 10 \cdot 58 = 4 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 29 \end{aligned}$$

olduğundan 29 elde edilir.

Üç Terimli Cebirsel İfadelerin Çarpanları

Alıştırma 3.34.



Çözüm : a) $x^2 + 2x - 8 = (x - 2)(x + 4)$

b) $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$

c) $x^2 + 8x + 12 = (x + 2)(x + 6)$

d) $x^2 - 4x - 12 = (x + 2)(x - 6)$

e) $x^2 + 11x - 12 = (x - 1)(x + 12)$

f) $x^2 - 13x + 12 = (x - 1)(x - 12)$

g) $x^2 - 11x + 18 = (x - 2)(x - 9)$

h) $x^2 - 10x + 24 = (x - 6)(x - 4)$ i)

$x^2 - 2xy - 24y^2 = (x + 4y)(x - 6y)$

j) $x^2 - 4xy + 4y^2 = (x - 2y)(x - 2y)$

Alıştırma 3.35.



Çözüm :

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 - 2ab - 3b^2} = \frac{(a - b)(a + b)}{(a + b)(a - 3b)} = \frac{a - b}{a - 3b}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{a - b}{a - 3b} = \frac{11^2 - 7^2}{11^2 - 3 \cdot 7^2} = \frac{72}{-26} = \frac{-36}{13}$$

bulunur.

İki Terimli Cebirsel İfadelerin Küpü

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}(a + b)^3 &= (a + b)(a + b)^2 \\ &= (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\end{aligned}$$

elde edilir.

Buna uygun olarak, iki terimli cebirsel bir ifadenin küpünü kolayca bulabiliriz. Örneğin,

$$\begin{aligned}(2x + 3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 3.36.



Çözüm : a) $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$
b) $8x^3 - 6x^2 + 3x/2 - 1/8$

Hesaplama Problemlerini Değişkenler Yardımıyla Basitleştirme

Alıştırma 3.37.



Çözüm :

$$\begin{aligned}K &= \frac{(444444 - 333333)(444444 + 333333)}{(333333 - 222222)(333333 + 222222)} \\ &= \frac{111111 \cdot 777777}{111111 \cdot 555555} = \frac{7}{5}\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 3.38.



Çözüm : $1999 = a$ diyelim. Böylece,

$$\begin{aligned}S &= a^3 + 3 \cdot a^2 + 3 \cdot a + 1 + 1000 \\ &= (a + 1)^3 + 1000 \\ &= 2000^3 + 1000 \\ &= 8\,000\,000\,000 + 1000 \\ &= 8\,000\,001\,000\end{aligned}$$

elde edilir. 8 rakamı 0'dır.

Alıştırma 3.39.



Çözüm : $11 = a$ diyelim. Bu durumda verilen ifade

$$a(a + 1)(a + 2)(a + 3) + 1$$

biçimine dönüşür. Bu eşitliği açacağız.

$$\underbrace{a(a + 3)}_{a^2 + 3a} \cdot \underbrace{(a + 1)(a + 2)}_{a^2 + 3a + 2} + 1$$

eşitliğinde de bu kez $a^2 + 3a = b$ diyelim. Bu durumda, verilen ifade

$$b(b + 2) + 1 = b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$$

biçimine dönüşür. O halde, verilen sayı $b + 1$ 'in yani $a^2 + 3a + 1$ 'in yani

$$11^2 + 3 \cdot 11 + 1 = 155$$

sayısının karesidir.

Aıştırma

3.40.



Çözüm : $9998 = a$ diyelim. Bu durumda verilen ifade

$$3a^2 + (a + 4)^2 - (a - 2)^2$$

biçimine dönüşür. Bu eşitliği düzenlersek

$$3a^2 + 12a + 12 = 3(a + 2)^2$$

olur. $a + 2 = 10000 = 10^4$ olduğundan verilen ifadenin değeri $3 \cdot 10^8$ bulunur.

Paydasında Harf Bulunan Cebirsel İfadeler

Aıştırma 3.41. 2000-AMC-10

Çözüm : Verilen ifadeyi düzenleyip, $a \cdot b$ çarpımını gördükçe $a \cdot b$ yerine $a - b$ yazalım.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - a \cdot b &= \frac{a^2 + b^2}{ab} - (a - b) \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a - b} - \frac{(a - b)^2}{a - b} \\ &= \frac{a^2 + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{a - b} \\ &= \frac{2ab}{a - b} \\ &= \frac{2(a - b)}{a - b} = 2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Aıştırma 3.43.

Çözüm : $(n - 2)(n + 2) = n^2 - 4$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{12n + 20}{n^2 - 4} - \frac{1}{\underset{(n-2)}{n + 2}} &= \frac{12n + 20}{n^2 - 4} - \frac{n - 2}{n^2 - 4} \\ &= \frac{12n + 20}{n^2 - 4} + \frac{-n + 2}{n^2 - 4} = \frac{12n + 20 - n + 2}{n^2 - 4} \\ &= \frac{11n + 22}{(n - 2)(n + 2)} = \frac{11(n + 2)}{(n - 2)(n + 2)} \\ &= \frac{11\cancel{(n + 2)}}{(n - 2)\cancel{(n + 2)}} = \frac{11}{n - 2} \end{aligned}$$

olduğundan $n - 2 \in \{1, 11, -1, -11\}$ ve buradan $n \in \{3, 13, 1, -9\}$ bulunur.

Aıştırma 3.42.

Çözüm :

$$\begin{aligned} K(n) &= \frac{1 + n}{\underset{(3)}{n}} + \frac{n - 3}{3n} + \frac{1}{\underset{(n)}{3}} \\ &= \frac{3 + 3n}{3n} + \frac{n - 3}{3n} + \frac{n}{3n} \\ &= \frac{3 + 3n + n - 3 + n}{3n} = \frac{5n}{3n} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Mutlak Değerli Cebirsel İfadeler

Alıştırma 3.44.



Çözüm : $a < b < c < 0$ ise, $a - b < 0$, $a + b + c < 0$ ve $c - a > 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} & |a - b| + |a + b + c| + |c - a| \\ &= -(a - b) - (a + b + c) + c - a \\ &= -a + b - a - b - c + c - a \\ &= -3a \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 3.45.



Çözüm : $a < 0$ ve $c > 0$ ise $ac < 0$, $|a| = -a$, $|c| = c$, $|ac| = -ac$ olur. O halde,

$$\begin{aligned} \frac{a}{|a|} + \frac{c}{|c|} + \frac{ac}{|ac|} &= \frac{a}{-a} + \frac{c}{c} + \frac{ac}{-ac} \\ &= -1 + 1 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

elde edilir.

KONU SONU TESTİ (Cebirsel İfadeler)(Çözümler)

Test 3.1 AMC10-12-2001



A) S B) $S + 12$ C) $2S + 12$ D) $2S + 6$ E) $S + 6$

Çözüm : İki sayının a ve b olduğunu ve $a + b = S$ olduğunu varsayalım. O zaman istenen toplam

$$2(a + 3) + 2(b + 3) = 2(a + b) + 12 = 2S + 12 \text{ olur.}$$

Test 3.2 AMC10-2001



A) 4 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) 1 E) 3

Çözüm :

$$x = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot (-x) + 2 = -1 + 2 = 1$$

Test 3.3 AMC-10-2002



A) 7 B) $\frac{7}{2}$ C) 3 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm :

$$(2x + 3)(x - 4 + x - 6) = 0 \Rightarrow (2x + 3)(2x - 10) = 0$$

eşitliğinden $x = -3/2$ veya $x = 5$ olur. Bunların toplamı da $\frac{-3}{2} + 5 = \frac{7}{2}$ elde edilir.

Test 3.4



A) 4 B) 7 C) 8 D) 1 E) 0

Çözüm : AB bir narsistik sayı olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} AB = A^2 + B^2 &\Rightarrow 10A + B = A^2 + B^2 \\ &\Rightarrow 10A - A^2 = B^2 - B \\ &\Rightarrow A(10 - A) = B(B - 1) \end{aligned}$$

eşitliğinin sağlanması gerekiyor. Sağ taraf bir çift sayıdır. O halde, A rakamı çift olmalıdır. $A \in \{2, 4, 6, 8\}$ değerleri için

$$2 \cdot 8, 4 \cdot 6, 6 \cdot 4, 8 \cdot 2$$

çarpımlarının hiç biri ardışık iki sayının çarpımı değildir. Buna göre, iki basamaklı narsistik sayı yoktur.

Test 3.5 AMC10-12-2001



A) 9 B) 7 C) 8 D) 1 E) 3

Çözüm : $N = ab$ olsun. Yani onlar basamağı a ve birler basamağı b olsun.

$$N = 10a + b$$

yazılabilir. Buradan

$$10a + b = ab + a + b \Rightarrow 9a = ab$$

elde edilir. $a \neq 0$ olduğundan, $b = 9$ bulunur. Yani N 'nin birler basamağı 9'dur.

Test 3.6

- A) 4 B) 12 C) 8 D) 18 E) 6

Çözüm : Kesiri parçalayalım.

$$\frac{abx + bcy + acz}{abc} = \frac{abx}{abc} + \frac{bcy}{abc} + \frac{acz}{abc}$$

$$= \frac{x}{c} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 12$$

bulunur.

Test 3.7

- A)
- $\frac{1}{15}$
- B)
- $\frac{4}{15}$
- C)
- $\frac{8}{15}$
- D) 1 E)
- $\frac{3}{5}$

Çözüm : İlk kesri parçalayalım ve ikinci kesri kullanalım.

$$\frac{a+b+c}{b} = \frac{13}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{b} + \frac{c}{b} = \frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{13}{5} - \frac{1}{(3)} - \frac{4}{(15)} - \frac{3}{(5)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{39 - 15 - 20}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{15}$$

bulunur.

Test 3.8

- A)
- $\frac{1}{5}$
- B)
- $\frac{4}{5}$
- C)
- $\frac{8}{5}$
- D) 1 E)
- $\frac{3}{5}$

Çözüm : $\frac{b}{a} = 2$ ise $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ olur. $\frac{b}{c} = x$ diyelim.

$$\frac{4a + 2b + 3c}{b} = 9 \Rightarrow 4 \cdot \frac{a}{b} + 2 + 3 \cdot \frac{c}{b} = 9$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 + 3 \cdot \frac{1}{x} = 9$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{3}{x} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} = 5 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

bulunur.

Test 3.9 UİMO - 1997

- A)
- $\frac{1}{15}$
- B)
- $\frac{4}{15}$
- C)
- $\frac{8}{15}$
- D) 1 E)
- $\frac{3}{5}$

Çözüm : İlk kesri parçalayalım ve ikinci kesri kullanalım.

$$\frac{a+b+c}{b} = \frac{13}{5} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{b} + \frac{c}{b} = \frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + 1 + \frac{4}{3} = \frac{13}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{13}{5} - \frac{1}{(3)} - \frac{4}{(15)} - \frac{3}{(5)}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{39 - 15 - 20}{15}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4}{15}$$

bulunur.

- A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 12

Çözüm : Verilen eşitlik,

$$\frac{a-c}{b+c} + \frac{b-a}{c+a} + \frac{c-b}{a+b} = 1$$

$$\frac{a+b-b-c}{b+c} + \frac{b+c-c-a}{c+a} + \frac{c+a-a-b}{a+b} = 1$$

$$\frac{a+b}{b+c} - 1 + \frac{b+c}{c+a} - 1 + \frac{c+a}{a+b} - 1 = 1$$

biçiminde düzenlenirse,

$$\frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{c+a} + \frac{c+a}{a+b} = 4$$

bulunur.

Test 3.10

- A) 3, 01 B) 3, 02 C) 3 D) 3, 03 E) 2, 99

Çözüm :

$$\begin{aligned}
\blacktriangle(n) &= \frac{3n}{n+1} + \frac{6n}{(n+1)^2} + \frac{6}{(n+1)^2} \\
&= \frac{3n^2 + 3n + 6n + 6}{(n+1)^2} \\
&= \frac{3(n^2 + 3n + 2)}{(n+1)^2} \\
&= \frac{3(n+1)(n+2)}{(n+1)^2} = \frac{3(n+2)}{n+1}
\end{aligned}$$

eşitliğinden, $\blacktriangle(299) = 3, 01$ olur.**Test 3.12**

- A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 1

Çözüm :

$AA = 10A + A = 11A$, $AB = 10A + B$, $BA = 10B + A$ yazılırsa,

$$5(AA) = 3(AB + BA)$$

$$5 \cdot 11A = 3(10A + B + 10B + A)$$

eşitliğinden,

$$55A = 3(11A + 11B) \Rightarrow 55A = 33A + 33B$$

olur. Buradan,

$$55A - 33A = 33B \Rightarrow 22A = 33B$$

bulunur. Her tarafı 11 ile bölelim. Böylece,

$$\frac{22A}{11} = \frac{33B}{11} \Rightarrow 2A = 3B \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{3}{2}$$

olur. Böylece,

$$A = 3, B = 2; \quad A = 6, B = 4; \quad A = 9, B = 6$$

olabilir. Yani, AB sayısı 32, 64 ve 96 olabilir.**Test 3.11 UAMO-2024**

- A)
- $\frac{98}{303}$
- B)
- $\frac{98}{101}$
- C)
- $\frac{49}{303}$
- D)
- $\frac{49}{101}$
- E)
- $\frac{99}{101}$

Çözüm : Burada $A = C - 1$ ve $D = B - 1$ olduğunu hemen görmek mümkündür. O halde, bizden istenen

$$A \cdot B - C \cdot D = (C - 1)B - C(B - 1)$$

değeridir. Bu ifadeyi sadeleştirsek

$$A \cdot B - C \cdot D = CB - B - CB + C = C - B$$

elde edilir. C eşitliğinden B eşitliğini çıkarırsak

$$C - B = \frac{1}{3} - \frac{1}{101} = \frac{98}{303}$$

bulunur.

Test 3.13

- A) 2 B) 6 C) 3 D) 4 E) 1

Çözüm :

$$AB + BA = 176 \Rightarrow 10A + B + A + 10B = 176$$

$$\Rightarrow 11A + 11B = 176$$

$$\Rightarrow 11(A + B) = 176$$

$$\Rightarrow A + B = 16$$

olduğunda AB sayısı 88, 79, 97 sayıları olabilir.**Test 3.14**

- A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 5

Çözüm :

$$AB = 8(A + B) \Rightarrow 10A + B = 8A + 8B$$

$$\Rightarrow 2A = 7B$$

eşitliğinden $A = 7, B = 2$ olur. O halde, $27 \div 9 = 3$ olur.

Test 3.15 UOMO-B-2019

- A) $\frac{4}{21}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{1}{21}$ D) $\frac{2}{21}$ E) $\frac{1}{7}$

Çözüm : 1. dakikanın sonunda sütün $\frac{1}{2}$ si, 2. dakika sonunda sütün

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

'lük kısmı kalır. 4. dakika sonunda sütün

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

'lük kısmı kalır. Buna göre, n . dakika sonunda sütün $\frac{1}{n+1}$ lik kısmı kaldığını iddia edebiliriz. Gerçekten de, $(n+1)$. dakika sonunda sütün

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

kısmı kalacaktır. Buna göre cevap $\frac{1}{21}$ olur.

Test 3.16

- A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 5

Çözüm :

DOĞRU a) $x + y > 0$ olduğundan $|x + y| = x + y$.

YANLIŞ b) $y - x > 0$ olduğundan $|y - x| = y - x$.

DOĞRU c) $x - y < 0$ olduğundan

$$|x - y| = -(x - y) = -x + y.$$

YANLIŞ d) $x + y < 0$ olduğundan

$$|x + y| = -(x + y) = -x - y.$$

YANLIŞ e) $x - y < 0$ ve $x - y - 3 < 0$ olduğundan

$$|x - y - 3| = -(x - y - 3) = -x + y + 3.$$

YANLIŞ f) $y - x > 0$ olduğundan

$$|y - x| = y - x$$

Buna göre, doğru olanlar sadece a) ve c)'dir.

Test 3.17

- A) 0 B) a C) b D) 4 E) $\frac{a}{b}$

Çözüm : $|b| = b$ ve $b \neq 0$ ise $b > 0$ olur. $|a| \leq -a$ ise $a < 0$ olur. Buna göre,

$$3a - 2b < 0 \Rightarrow |3a - 2b| = -3a + 2b$$

$$2b - a > 0 \Rightarrow |2b - a| = 2b - a$$

$$4a < 0 \Rightarrow |4a| = -4a$$

olacağından,

$$\begin{aligned} K &= \frac{|3a - 2b| + |2b - a| - |3a|}{|b|} \\ &= \frac{-3a + 2b + 2b - a - (-4a)}{b} \\ &= 4 \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 3.18

- A) 0 B) 3 C) 5 D) 4 E) 7

Çözüm : Verilen ifadeyi üç durumda incelemeliyiz.

i) $x < -2$ olursa

$$\begin{aligned} |3x + 6| + |x - 3| &= -3x - 6 - x + 3 \\ &= -4x - 3 > 5. \end{aligned}$$

ii) $-2 < x < 3$ olursa,

$$\begin{aligned} |3x + 6| + |x - 3| &= 3x + 6 - x + 3 \\ &= 2x + 9 \\ &\Rightarrow 5 < 2x + 9 < 15 \end{aligned}$$

iii) $x > 3$ olursa

$$\begin{aligned} |3x + 6| + |x - 3| &= 3x + 6 + x - 3 \\ &= 4x + 3 > 15 \end{aligned}$$

olur. Bu üç duruma göre, verilen ifadenin en küçük değeri $x = -2$ iken 5 olarak bulunur.

Test 3.19 UAMO-8-2024

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) $\frac{1}{3}$

Çözüm : $x + 1 = x^3$ değerini yerine yazarsak,

$$\frac{x^4 + x + 1}{x^6} = \frac{x^4 + x^3}{x^6}$$

$$= \frac{x + 1}{x^3} = \frac{x^3}{x^3} = 1$$

elde edilir.

Test 3.20 UOMO-B- 2018

- A) 2 B) 1 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm : Verilen ifadeyi düzenlersek

$$a^2 - 5a + b^2 + 5b = 2ab \Rightarrow (a^2 - 2ab + b^2) - 5(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)^2 - 5(a - b) = 0$$

$$\Rightarrow (a - b)(a - b - 5) = 0$$

olur. O halde, $a - b = 0$ veya $a - b = 5$ olur.

Test 3.21 UMO-B- 2014

- A) 6 B) 8 C) 5 D) 4 E) 7

Çözüm : $a + b = n$ ve $a^2 + b^2 = n + 26$ ise,

$$(a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2$$

$$= 2n + 52 - n^2$$

$$= 53 - (n^2 - 2n + 1)$$

olmalı. O halde

$$(n - 1)^2 < 53$$

olur. O zaman n nin alabileceği en büyük tam sayı değer 8 dir.

Test 3.22

- A) 256 B) 157 C) 156 D) 128 E) 144

Çözüm : $a + 2b + 3c = 80$ ise $2a + 4b + 6c = 160$ olur.

$$2a + 3b + 5c = 160 - b - c$$

ifadesinin en büyük değerini alması $(b + c)$ 'nin en küçük değerini alması durumunda mümkün olur. $b = 1$ ve $c = 2$ alınırsa,

$$2a + 3b + 5c = 157$$

alabileceği maksimum değer olur.

Test 3.23 UMO - 2009

- A) -256 B) -72 C) -64 D) -128 E) -144

Çözüm :

$$\overbrace{x(x+4)(x+8)(x+12)} = (x^2 + 12x)(x^2 + 12x + 32)$$

eşitliğinde,

$$x^2 + 12x + 16 = A$$

diyelim. Bu durumda, verilen çarpım

$$(A - 16)(A + 16) = A^2 - 256$$

olacaktır. $A^2 \geq 0$ olduğundan, verilen ifadenin en küçük değeri -256 bulunur.

Test

3.24



A) 11 B) 12 C) 10 D) 14 E) 15

Çözüm : Verilen ifadeleri denkleme çevirelim. Bir a sayısının b sayısına uzaklığı $|a - b|$ ile gösterilir.

★ " b sayısının, a ve c 'ye olan uzaklıkları toplamı 11'dir." cümlesini

$$|b - a| + |b - c| = 11$$

biçiminde,

★ " c sayısının, b ve a 'ya olan uzaklıkları toplamı 16'dır." cümlesini

$$|c - b| + |c - a| = 16$$

biçiminde yazabiliriz. $a = -3$ ve b ile c **pozitif** tam sayılar olduğundan,

$$|b - a| = |b + 3| = b + 3,$$

$$|c - a| = |c + 3| = c + 3$$

olacaktır. $c > b$ veya $c < b$ olabilir.

$c > b$ ise, verilen denklemler

$$b + 3 - b + c = 11 \Rightarrow c = 8$$

$$c - b + c + 3 = 16 \Rightarrow b = 3$$

olur ki, $b + c = 11$ elde edilir.

$c < b$ ise, verilen denklemler

$$b - c + c + 3 = 16 \Rightarrow b = 13$$

$$b + 3 + b - c = 11 \Rightarrow c = 18$$

olur ki, $c < b$ kabul edip çözmüştük. Bu olamaz. O halde, $b + c = 11$ elde edilir.

DENKLEM ve DENKLEM SİSTEMLERİ

Alıştırma 4.1.



Çözüm : Her iki tarafta kesirlerin paylarını düzenlersek

$$\frac{3x + 8}{4} = \frac{4x - 5}{5}$$

olur. İçler dışlar çarpımı yaparsak

$$15x + 40 = 16x - 20 \Rightarrow x = 60$$

elde edilir.

Alıştırma 4.2.



Çözüm : Her iki tarafta kesirlerin paylarını düzenlersek

$$\frac{-n - 6x + 2my}{2} = \frac{kx - 21 + 7y}{7}$$

olur. İçler dışlar çarpımı yaparsak

$$-7n - 42x + 14my = 2kx - 42 + 14y$$

elde edilir. Her x, y için doğru olması için her iki taraftaki benzer terimlerin katsayıları eşit olmalıdır. Buna göre,

$$-7n = -42, \quad -42 = 2k, \quad 14m = 14$$

eşitliklerinden $n = 6, m = 1$ ve $k = -21$ elde edilir.

$$n + m + k = 6 + 1 - 21 = -14 \text{ olur.}$$

Alıştırma 4.3.



Çözüm :

$$x^2 = 4 \text{ veya } x^2 = 9$$

olabilir. Buradan, $x = \pm 2$ ve $x = \pm 3$ olabilir.

Alıştırma 4.4.



Çözüm : $(3x - 5)$ parantezine alırsak

$$(3x - 5)(5x - 3 + 2x + 7) = 0,$$

$$(3x - 5)(7x + 4) = 0$$

olur. Buna göre, $x = \frac{5}{3}$ veya $x = -\frac{4}{7}$ elde edilir.

Alıştırma 4.5.



Çözüm : Bu ifadeyi

$$x^2 - 3x - 4 = (x + 1)(x - 4) = 0$$

biçiminde yazarsak $x = -1$ veya $x = 4$ bulunur.

$$\text{ÇK} = \{-1, 4\}.$$

Alıştırma 4.6.



Çözüm : İlk iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$x + z + 2y = 2(x + z),$$

olur. $x + z = 48$ olduğundan,

$$48 + 2y = 2(48) \Rightarrow 2y = 48 \Rightarrow y = 24$$

bulunur.

Alıştırma 4.7.

Çözüm : a) x değeri 1 veya 2 olabilir. $x = 1$ ise $3y = 6$ ve $y = 2$ olur. $(1, 2)$ bir çözümdür. $x = 2$ ise, $3y = 2$ olur. Bunu sağlayan bir pozitif tam sayı yoktur. O halde, tek çözüm $(1, 2)$ çözümüdür.

b) $x = k$ diyelim. Bu durumda,

$$3y = 10 - 4k \Rightarrow y = \frac{10 - 4k}{3}$$

olur. Yani, çözüm kümesi

$$\text{Ç.K.} = \left\{ (x, y) = \left(k, \frac{10 - 4k}{3} \right) : k \in \mathbb{Q} \right\}$$

olur. k yerine istenilen rasyonel sayı yazılırsa verilen denklemi sağlayacaktır. k sonsuz değer alabilir. O halde, bu denklemin sonsuz çözümü vardır.

Alıştırma 4.8.

Çözüm : $B = A + C$ olduğunu diğer iki denklemde kullanırsak

$$\begin{cases} 3A + A + C + 5C = 17 \\ 2(A + C) - 7A + C = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A + 6C = 17 \\ 3C - 5A = 11 \end{cases}$$

olur. İlk denklemden ikinci denklemin 2 katını çıkarırsak

$$(4A + 6C) - 2(3C - 5A) = 17 - 2 \cdot 11 \Rightarrow 14A = -5$$

eşitliğinden $A = \frac{-5}{14}$ bulunur.

Alıştırma 4.9.

Çözüm : Bu üç denklemi taraf tarafa çarparsak

$$(x \cdot y \cdot z)^2 = 12^2 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = 12$$

olur. O halde,

$$x = \frac{x \cdot y \cdot z}{y \cdot z} = \frac{12}{6} = 2,$$

$$y = \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot z} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2},$$

$$z = \frac{x \cdot y \cdot z}{x \cdot y} = \frac{12}{3} = 4$$

olduğundan, $x + 2y + 3z = 2 + 3 + 12 = 17$ bulunur.

Alıştırma 4.10.**Alıştırma 4.10. AMC-8-2008**

Çözüm : Kolilerin ağırlığı x, y ve z olsun.

$$\begin{cases} x + y = 122 \\ x + z = 125 \\ y + z = 127 \end{cases}$$

eşitliklerini taraf tarafa toplarsak

$$2(x + y + z) = 374$$

ve buradan $x + y + z = 187$ bulunur.

Alıştırma 4.11.**Çözüm :**

$$(4a^2 + 4a + 1) - b^2 = 13$$

eşitliğinden

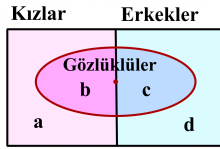
$$(2a + 1)^2 - b^2 = 13$$

$$(2a + 1 - b)(2a + 1 + b) = 13$$

eşitliğinden

$$\begin{cases} 2a + 1 - b = 1 \\ 2a + 1 + b = 13 \end{cases} \text{ veya } \begin{cases} 2a + 1 - b = 13 \\ 2a + 1 + b = 1 \end{cases}$$

elde edilir. Her iki sistemde taraf tarafa toplanırsa $4a = 12$ eşitliğinden $a = 3$ olur. İlk denklem sisteminde $b = 6$, ikinci denklem sisteminde de $b = -6$ olur. O halde, $(a, b) = (3, 6)$ veya $(3, -6)$ olabilir.

Alıştırma 4.12.**Çözüm :** Aşağıdaki gibi şema çizelim.

Verilenlerden $b + c = 11$, $a = 2c + 5$, $d = 2b - 3$ yazılabilir.

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 2c + 5 + b + c + 2b - 3 \\ &= 3b + 3c + 2 \\ &= 3(b + c) + 2 \\ &= 3 \cdot 11 + 2 = 35 \end{aligned}$$

elde edilir.

Lineer Denklem Sisteminde Özel Durumlar

Alıştırma 4.13.**Çözüm :**

$$\frac{a - 2}{6} = \frac{1}{a + 3} \neq \frac{2}{-2}$$

eşitliğinden $(a - 2)(a + 3) = 6$ olursa çözüm kümesi boş küme olacaktır.

$$\begin{aligned} a^2 + a - 6 &= 6 \Rightarrow a^2 + a - 12 = 0 \\ &\Rightarrow (a - 3)(a + 4) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden $a = 3$ ve $a = -4$ olabilir.

Alıştırma 4.14.**Çözüm :** Sonsuz çözüm olması için

$$\frac{a - 2}{1} = \frac{a^2}{a + 3} = \frac{2}{b}$$

olmalıdır. Buna göre

$$\begin{aligned} \frac{a - 2}{1} &= \frac{a^2}{a + 3} \Rightarrow a^2 + a - 6 = a^2 \Rightarrow a = 6, \\ \frac{a - 2}{1} &= \frac{2}{b} \Rightarrow \frac{6 - 2}{1} = \frac{2}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olursa sonsuz çözüm olur. $a + b = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$ olur.

Denklem Kurma

Alıştırma 4.15.



Çözüm : Çubuğun uzunluğuna n diyelim.

$$\begin{aligned}\frac{n}{20} - \frac{n}{30} &= 1 \Rightarrow \frac{3n - 2n}{60} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{n}{60} = 1 \\ &\Rightarrow n = 60 \text{ cm}\end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 4.16.



Çözüm : Sıra sayısı x olsun. O halde,

$$\text{Öğrenci Sayısı} = 3x + 7 = 4(x - 2)$$

olacaktır. Bu denklem çözülürse $x = 15$ elde edilir. O halde, öğrenci sayısı $4 \cdot 13 = 52$ bulunur.

Alıştırma 4.17.



Çözüm : Sayılara x ve y diyelim. Verilen ilk ifadeden

$$\begin{aligned}(x + y) - (x - y) &= 12 \Rightarrow x + y - x + y = 12 \\ &\Rightarrow 2y = 12 \\ &\Rightarrow y = 6\end{aligned}$$

olur. İkinci ifadeye göre ise $x \cdot y = 15$ verilmiş.

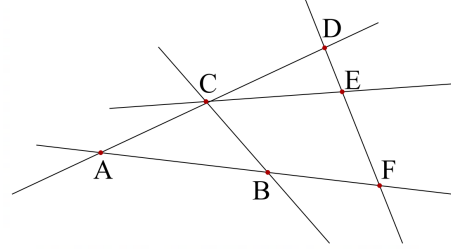
$$x \cdot y = 15 \Rightarrow 6 \cdot x = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

elde edilir. Bunların toplamı da :

$$6 + \frac{5}{2} = \frac{17}{2}$$

olur.

Alıştırma 4.18. AMC-8-2020



Çözüm : A, B, F, D ve E noktalarından 2, C noktasından 3 doğru geçtiğine göre,

$$2A + 3B + 2C + 2D + 2E + 2F = 47$$

elde edilir. $\{A, B, C, D, E, F\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ olduğundan,

$A + B + C + D + E + F = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ olacaktır. O halde, $2 \cdot 21 + B = 47$ denkleminde $B = 5$ bulunur.

Alıştırma 4.19. AMC8-2015



Çözüm : Altıncı sınıfların sayısı x , dokuzuncu sınıfların sayısı y olsun. Böylece,

$$\frac{y}{3} = \frac{2x}{5} \Rightarrow y = \frac{6x}{5}$$

eşitliği vardır. Bizden istenen

$$\frac{\frac{y}{3} + \frac{2x}{5}}{y + x}$$

oranıdır. Bu eşitlikte $y = \frac{6x}{5}$ yazalım. $\frac{y}{3} = \frac{2x}{5}$ olduğundan,

$$\frac{\frac{2x}{5} + \frac{2x}{5}}{\frac{6x}{5} + x} = \frac{\frac{2x}{5} + \frac{2x}{5}}{\frac{6x}{5} + \frac{5x}{5}} = \frac{\frac{4x}{5}}{\frac{11x}{5}} = \frac{4}{11}$$

elde edilir.

Ekleme Çıkarma Yardımıyla Çarpanlara Ayırıp Çözme

Aıştırma 4.20. UMO - 2004 ♣♣ 

Çözüm :

$$xy - 2x - 5y = 1 \Rightarrow x(y - 2) - 5(y - 2) = 11$$

$$\Rightarrow (y - 2)(x - 5) = 11$$

eşitliğine göre, $y - 2 \in \{\pm 1, \pm 11\}$ olabilir. Çarpımları 11 olacak şekilde $(x - 5)$ değeri de tek türlü belirlenir. Buradan 4 tane (x, y) çifti elde edilir.

Aıştırma 4.21. UAMO - 2010 ♣♣ 

Çözüm : $\frac{x + y - 1}{xy} = \frac{1}{3}$ denkleminde

$$xy - 3x - 3y = -3 \text{ ve buradan da}$$

$$(x - 3)(y - 3) = 6$$

olur. O halde, iki durum olabilir.

1) $x - 3 = 1$, $y - 3 = 6$ olursa, $(x, y) = (4, 9)$ bulunur.

2) $x - 3 = 2$, $y - 3 = 3$ olursa, $(x, y) = (5, 6)$ olur. Simetriden dolayı, $(x, y) = (9, 4)$ ve $(x, y) = (6, 5)$ diğer iki çözümdür.

Aıştırma 4.22. UAMO - 1997 ♣♣ 

Çözüm : $xy + 3x - 5y = (x - 5)(y + 3) + 15$ olarak yazılırsa, denklem

$$(x - 5)(y + 3) = 17 - 15 = 2$$

olur. Buradan,

$$\begin{array}{ll} x - 5 = -1, & y + 3 = -2 \text{ veya} \\ x - 5 = 1, & y + 3 = 2 \text{ veya} \\ x - 5 = -2, & y + 3 = -1 \text{ veya} \\ x - 5 = 2, & y + 3 = 1 \end{array}$$

olabileceğinden, denklemin tam sayılarda dört çözümü vardır.

Denklemleri Yeni Harflerle Basitleştirme

Alıştırma 4.23.



Çözüm : $3^x = a$ diyelim. $9^x = a^2$ olur. Buradan

$$a^2 - \frac{a}{3} = 0 \Rightarrow a \left(a - \frac{1}{3} \right) = 0$$

eşitliğinden $a = 0$ veya $a = \frac{1}{3}$ elde edilir. $3^x = a = 0$ olamaz. $3^x = a = \frac{1}{3}$ eşitliğinden de $x = -1$ elde edilir. Ç.K. = $\{-1\}$ bulunur.

Alıştırma 4.24.



Çözüm : $(x^2 + 4x + 1) = a$ diyelim. Buradan

$$a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a + 2)(a - 1) = 0$$

eşitliğinden $a = 1$ veya $a = -2$ elde edilir.

$$a = x^2 + 4x + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + 4x = 0$$

eşitliğinden $x = 0$ veya $x = -4$ bulunur.

$$a = x^2 + 4x + 1 = -2 \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \\ \Rightarrow (x + 3)(x + 1) = 0$$

eşitliğinden $x = -1$ veya $x = -3$ bulunur. Ç.K. = $\{-1, -3, -4, 0\}$ bulunur.

Alıştırma 4.25.



Çözüm : $2^x = a$ ve $3^y = b$ diyelim. Böylece, verilen sistem

$$\begin{cases} 2a + 4b = 68 \\ a + 4b = 52 \end{cases}$$

sistemine dönüşür. Taraf tarafa çıkarırsak $a = 68 - 52 = 16$ eşitliğinden $2^x = 16$ ve $x = 4$ bulunur. $a = 16$ iken $a + 4b = 52$ eşitliğinden $4b = 52 - 16 = 36$ ve $b = 9$ olur. $3^y = 9$ eşitliğinden de $y = 2$ elde edilir. O halde, denklemin tek çözümü $(4, 2)$ bulunur.

Alıştırma 4.26.



Çözüm : $y^2 = x^2(x - 3)$ eşitliğinde $x - 3 = k^2$ diyelim. $x = k^2 + 3$ olur. Buradan,

$$y^2 = (k^2 + 3)^2 k^2 \Rightarrow y = k(k^2 + 3)$$

elde edilir.

Mutlak Değerli Denklemler

Alıştırma 4.27.



Çözüm : a)

$$2x - 5 = \frac{11}{3} \Rightarrow x = \frac{13}{3},$$

$$2x - 5 = \frac{-11}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

olduğundan $\frac{13}{3} + \frac{2}{3} = 5$ olur.

b) $|2x - 5| + (y + 2)^2 = 0$ ise $x = \frac{5}{2}$ ve $y = -2$ olur.

$x - y = \frac{5}{2} + 2 = \frac{9}{2}$ bulunur.

Alıştırma 4.28.



Çözüm : $||3 - 2x| - 5| = 10$ ise

$$|3 - 2x| - 5 = 10 \text{ veya } |3 - 2x| - 5 = -10$$

$$|3 - 2x| = 15 \text{ veya } |3 - 2x| = -5 \text{ (ÇK}=\emptyset\text{)}$$

olduğundan $|3 - 2x| = 15$ denklemini çözmeliyiz.

$$3 - 2x = 15 \text{ veya } 3 - 2x = -15$$

eşitliklerinden $x = -6$ ve $x = 9$ elde edilir. Bunların toplamı da 3 olur.

KONU SONU TESTİ (Denklemler ve Denklemler Sistemi)(Çözümler)

Test 4.1 AMC10-12-2001



- A) 0,02 B) 0,04 C) 2 D) 1 E) 0,03

Çözüm : Ondalık bir sayıda ondalık virgüldü dört basamak sağa kaydırmak, bu sayıyı 10000 ile çarpmakla aynı şeydir. Ondalık sayıya x denilirse,

$$10000 \cdot x = 4 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = \frac{4}{10000}$$

denklemini elde edilir. Buradan,

$$x = \frac{2}{100} = 0,02$$

bulunur.

Test 4.2



- A) 10 B) 12 C) 2 D) 6 E) 9

Çözüm : $y - z = x$ ise $x + z = y$ ve $x - y = z$ olur. O halde bizden istenen

$$(y - z)(x - y)(x + z) = x \cdot z \cdot y$$

değeridir ki bu değer zaten 12 olarak verilmiş.

Test 4.3



- A) 4 B) $\frac{13}{3}$ C) $\frac{23}{3}$ D) $\frac{14}{3}$ E) 5

Çözüm : $x - \frac{1}{2}$ uzunluğu 5 kısma ayrılıp, bu kısımlardan 2 tanesi $\frac{1}{2}$ değerine eklenirse $\frac{13}{6}$ oluyormuş. O halde,

$$\frac{1}{2} + \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{5} = \frac{13}{6}$$

denklemini çözülürse $x = \frac{14}{3}$ elde edilir.

Test 4.4 AMC8-2010



- A) 12 B) 11 C) 13 D) 14 E) 15

Çözüm : Üçgenin kenarları n , $n + 1$ ve $n + 2$ olsun. O halde, çevresi

$$n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3$$

olur. O halde, problemde

$$n = \frac{30(3n + 3)}{100}$$

yazılabilir. Bu denklem çözülürse

$$100n = 90n + 90 \Rightarrow 10n = 90 \Rightarrow n = 9$$

elde edilir. Buna göre, en uzun kenar $9 + 2 = 11$ olur.

Test 4.5 AMC8-2010



- A) 220 B) 240 C) 200 D) 260 E) 300

Çözüm : Kitabın sayfa sayısı x olsun. Birinci gün sonunda okunmayan kısım

$$\frac{4x}{5} - 12,$$

ikinci gün sonunda okunmayan kısım

$$\frac{3}{4} \left(\frac{4x}{5} - 12 \right) - 15 = \frac{3x}{5} - 24$$

ve üçüncü gün sonunda okunmayan kısım

$$\frac{2}{3} \left(\frac{3x}{5} - 24 \right) - 18 = \frac{2x}{5} - 34$$

olur. Bu değer 62'ye eşitmiş. O halde,

$$\frac{2x}{5} - 34 = 62 \Rightarrow 2x - 170 = 310 \Rightarrow x = 240$$

elde edilir.

Test 4.6 AMC8-2011

- A) 3, 2 B) 3, 3 C) 3, 5 D) 3, 6 E) 3, 1

Çözüm : Emil'in taksiyle gittiği yol x km olsun. İlk yarım km'den sonra kat ettiğini km $x - 0,5$ olacaktır. Buna göre,

$$10 = 2,4 + 0,2 \cdot \frac{x - 0,5}{0,1} + 2$$

denklemini yazılır. Buradan,

$$5,6 = 2(x - 0,5) \Rightarrow 2,8 = x - 0,5 \Rightarrow x = 3,3 \text{ km}$$

elde edilir.

Test 4.8

- A) 42 B) 44 C) 36 D) 40 E) 48

Çözüm : Tüm öğrencilerin sayısı x olsun. Verilenlerden aşağıdaki tabloyu hazırlayabiliriz.

(Burada, kızların $\frac{3}{4}$ 'ü okçuysa, $\frac{1}{4}$ 'ü koşucu, erkeklerin $\frac{1}{4}$ 'ü okçuysa $\frac{3}{4}$ 'ü koşucudur.)

Kız	Okçu Kız	Koşucu Kız	Koşucu Antalya'lı Kız
$\frac{x}{5}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{x}{5} = \frac{3x}{20}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{x}{5} = \frac{x}{20}$	$\frac{x}{20} \div 2 = \frac{x}{40}$
Erkek	Okçu Erkek	Koşucu Erkek	Koşucu Antalya'lı Erkek
$\frac{4x}{5}$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{4x}{5} = \frac{x}{5}$	$\frac{3}{4} \cdot \frac{4x}{5} = \frac{3x}{5}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{3x}{5} = \frac{x}{2}$

Buna göre, Antalya'lı öğrencilerin sayısı :

$$\frac{3x}{20} + \frac{x}{5} + \frac{x}{40} + \frac{x}{2} = 35$$

denkleminde $x = 40$ bulunur.

Test 4.9

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm :

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 - 13 &= y^2 \Rightarrow (x - 2)^2 - 13 = y^2 \\ &\Rightarrow (x - 2)^2 - y^2 = 13 \\ &\Rightarrow (x - 2 - y)(x - 2 + y) = 13 \end{aligned}$$

eşitliğinden

1. $x - y - 2 = 1$ $x + y - 2 = 13$
2. $x - y - 2 = -1$ $x + y - 2 = -13$
3. $x - y - 2 = 13$ $x + y - 2 = 1$
4. $x - y - 2 = -13$ $x + y - 2 = -1$

durumları olabilir. 1 durumunda ki eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$1. \quad 2x - 4 = 14 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow y = 6$$

elde edilir. Benzer şekilde

2. $x = -5$ $y = -6$
3. $x = 9$ $y = -6$
4. $x = -51$ $y = 6$

bulunur. Yani, 4 farklı tam sayı ikilisi vardır.

Test 4.7 AMC8-2002

- A)
- $\frac{3}{4}$
- B)
- $\frac{1}{3}$
- C)
- $\frac{1}{6}$
- D)
- $\frac{1}{2}$
- E)
- $\frac{1}{4}$

Çözüm : Orhan her arkadaşından eşit miktarda para almış. Her arkadaşından x lira almış olsun. O halde, ilk başta Mirza'nın $5x$ lirası, Lale'nin $4x$ lirası ve Nedim'in $3x$ lirası var demektir. Gruptaki toplam tutar $12x$ liradır. Orhan'da toplamda $3x$ lira olduğundan istenen oran

$$\frac{3x}{12x} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Test 4.10

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 12

Çözüm :

$$xy - 3x - 6y = 0 \Rightarrow x(y - 3) - 6(y - 3) = 18$$

$$\Rightarrow (y - 3)(x - 6) = 18$$

eşitliğinden $x - 6$ değeri

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm 18\}$$

olmak üzere 12 değer alabilir. x değerlerine bağlı olarak her defasında $y - 3$ 'de tek değer alacaktır. O halde, bu denklemin tam sayılarda 12 çözümü vardır.

Test 4.11

- A) 0 B) 2 C) 3 D) 4 E) 3

Çözüm : $x^2 + y^2 + xy + 3x - 1 + 4z = 0$ eşitliğini 4 ile çarparak ifadeleri tam kare yapmaya çalışalım. Buradan

$$4x^2 + 4xy + 4y^2 + 12x - 4 + 16z = 0,$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 3x^2 + 12x - 4 - 16z = 0,$$

$$(x + 2y)^2 + 3(x^2 + 4x + 4) - 16 + 16z = 0,$$

$$(x + 2y)^2 + 3(x + 2)^2 + 16(z - 1) = 0$$

elde edilir. $z \geq 1$ olduğundan soldaki hiç bir terim negatif olamaz. O halde, bu toplamın 0 olabilmesi her birinin 0 olması durumunda mümkündür. $z = 1$, $x = -2$ ve $y = 1$ olduğundan $x + y + z = 0$ elde edilir.

Test 4.12

- A) 18 B) 20 C) 19 D) 24 E) 17

Çözüm :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2(ab + ac + bc)$$

özdeşliğini kullanacağız.

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} + \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x} + \frac{z}{x} \cdot \frac{x}{y}\right)$$

$$25 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}\right)$$

$$25 = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} + 2 \cdot 3$$

eşitliğinden, $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} = 19$ bulunur.

Test 4.13 UOMO-2017

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm : Verilen eşitlikte paydaları eşitleyip içler-dışlar çarpımı yaparsak,

$$xy - 9y + 9x = 0$$

elde ederiz. Buradan, eşitliğin her iki tarafından 81 çıkarırsak,

$$(x - 9)(y + 9) = -81$$

olduğu görülür. x ve y pozitif tam sayı olduğundan, sadece $y + 9 = 27$, $x - 9 = -3$ ve $y + 9 = 81$, $x - 9 = -1$ olabilir. Sonuç olarak, $(x, y) = (6, 18)$ veya $(x, y) = (8, 72)$ olacağından cevap 2 olur.

Test

4.14 UOMO-B-2016



A) 10 B) 20 C) 13 D) 14 E) 16

Çözüm : Verilen denklemi her iki tarafını $12mn$ ile çarparsak

$$4n + 3m + 15 = 6mn$$

olur. Buradan,

$$6mn - 3m - 4n - 2 = 17$$

$$3m(2n - 1) - 2(2n - 1) = 17$$

eşitliğinden

$$(3m - 2)(2n - 1) = 17$$

yazılabilir. Bu eşitliğe göre, m tam sayı iken $3m - 2 = 17$ olamaz. O halde, $2n - 1 = 17$ olmalıdır. Buradan

$$\begin{cases} 3m - 2 = 1 \\ 2n - 1 = 17 \end{cases} \Rightarrow m = 1 \text{ ve } n = 9$$

elde edilir. Yanıt : $1 + 9 = 10$.

Test

4.15



A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 16

Çözüm : Verilen eşitlik tam kareler şeklinde yazılırsa

$$(x^2 - 16x + 64) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 6z + 9) = 0,$$

$$(x - 4)^2 + (y - z)^2 + (z - 3)^2 = 0$$

olur. O halde, her bir tam kare 0 olmalıdır. Buradan $x = 4$, $z = y = 3$ ve $x + y + z = 10$ olur.

Test

4.16 UAMO-2007



A) 0 B) 2 C) 1 D) 4 E) 8

Çözüm : $(y - x)(y + x) = 51 + 6y$ eşitliği düzenlenirse, sırasıyla

$$(y^2 - 6y + 9) - x^2 = 60,$$

$$(y - 3 - x)(y - 3 + x) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$$

olur. $(y - 3 - x)$ ve $(y - 3 + x)$ çarpanlarından her ikisi de ya tek çift ya tektir. Fakat sağ tarafın çift olmasından dolayı her ikisi de çift olmalıdır. O halde,

$$\begin{cases} y - 3 - x = \pm 2 \\ y - 3 + x = \pm 30 \\ y - 3 - x = \pm 10 \\ y - 3 + x = \pm 6 \end{cases}, \begin{cases} y - 3 - x = \pm 30 \\ y - 3 + x = \pm 2 \\ y - 3 - x = \pm 6 \\ y - 3 + x = \pm 10 \end{cases}$$

denklem sistemlerinden, denklemin tam sayılarda 8 çözümü olduğu görülür.

Test

4.17 UAMO-2001



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm : $\begin{cases} 2y = 4 - x^2 \\ 2x = 4 - y^2 \end{cases}$ denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(y - x)(2 - (y + x)) = 0$$

olur. $y - x = 0$ ve $y + x = 2$ durumlarının herbiri için denklemin iki çözümü vardır. Dolayısıyla, denklemin 4 çözümü vardır.

Test 4.18 UAMO-2003**A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6**

Çözüm : Bu denklem sisteminde, $x + y = u$ ve $\frac{x}{y} = v$ denilirse,

$$\begin{cases} u + v = 8 \\ u \cdot v = 15 \end{cases}$$

denklem sistemi elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} u(8 - u) &= 15 \Rightarrow u^2 - 8u + 15 = 0 \\ &\Rightarrow u_1 = 3, u_2 = 5 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $x + y$ 'nin alabileceği en küçük değer 3 olur.

Test 4.19 UAMO-2006**A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6**

Çözüm : $a^2 = n - 210$ ve $b^2 = n + 210$ dersek,

$$b^2 - a^2 = 420 \Rightarrow (b - a)(b + a) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

olur. $(b - a)$ ve $(b + a)$ sayılarının "tekliği-çiftliği" aynı olduğundan yalnızca, aşağıdaki 4 durum sağlanabilir.

$b - a$	$b + a$
2	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 3$	$2 \cdot 5 \cdot 7$
$2 \cdot 5$	$2 \cdot 3 \cdot 7$
$2 \cdot 7$	$2 \cdot 3 \cdot 5$

Test 4.20**A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0**

Çözüm :

$$x^3 < xyz < x + xy + xyz = 1001$$

eşitsizliğine göre, $x < 10$ elde edilir.

$$x(1 + y + yz) = 1001 = 7 \times 11 \times 13$$

ve $1 < x$ olduğundan $x = 7$ olmalıdır. Buradan,

$$y + yz = y(z + 1) = 142 = 2 \times 71$$

olur ki çözüm yoktur.

Test 4.21**A) 10 B) 12 C) 13 D) 14 E) 11**

Çözüm : Eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$4(a + b + c) = 48$$

olduğundan

$$a + b + c = 12$$

olur. Birinci denklemde bu denklemi çıkartırsak

$$a = -2$$

bulunur. İkinci denklemde çıkartırsak

$$b = 3$$

bulunur. İkinci denklemde çıkartırsak

$$c = 11$$

olur. O halde,

$$5a + 3b + c = 5(-2) + 3 \cdot 3 + 11 = 10$$

olur.

Test

4.22 UOMO-B-2016



A) 6 B) 12 C) 3 D) 4 E) 8

Çözüm :

$$21a + 1 = k^2 \quad \text{ve} \quad 24a + 4 = (k + 1)^2$$

olsun. Bu iki eşitlikten a yalnız bırakılırsa

$$a = \frac{k^2 - 1}{3 \cdot 7} = \frac{(k + 1)^2 - 4}{3 \cdot 8}$$

olur. Buradan

$$8k^2 - 8 = 7(k + 1)^2 - 38 \Rightarrow k^2 - 14k + 13 = 0$$

$$\Rightarrow (k - 1)(k - 13) = 0$$

eşitliğinden $k = 1$ ve $k = 11$ elde edilir. O halde,

$$a = \frac{k^2 - 1}{21}$$

değeri

$$a = \frac{1^2 - 1}{21} = 0 \quad \text{veya} \quad a = \frac{13^2 - 1}{21} = 8$$

elde edilir.

Test

4.23 UOMO-B-2015



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 8

Çözüm : Bir n iyi sayısının basamak sayısı en az 2 olmalıdır.i) $n = \overline{AB}$ ise

$$A \cdot B = (10A + B) - (A + B)$$

eşitliğinden,

$$A \cdot B = 9 \cdot A \Rightarrow B = 9$$

elde edilir. O halde,

$$19, 29, \dots, 89$$

olmak üzere 8 iyi sayı bulunur.

ii) $n = \overline{ABC}$, ve

$$A \cdot B \cdot C = 100A + 10B + C - (A + B + C)$$

eşitliğinden de

$$A \cdot B \cdot C = 99A + 9B$$

elde edilir. Bu eşitlikte $B = 9$ ve $C = 8$ olsa bile

$$72A = 99A + 9B \Rightarrow B = -3A$$

olur. Yani, $B \cdot C \leq 72$ olduğundan çözüm olamaz. Basamak sayısı 3'ten fazla ise, yine aynı şekilde çözüm olmadığı görülebilir.

Sonuç olarak 8 tane iyi sayı vardır.

Test

3.24 AMC10A-2015



A) 20 B) 30 C) 10 D) 25 E) 15

Çözüm : Eşitlikteki kareli ifadeleri açarsak

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x \\ x = y^2 - 4y \end{cases}$$

olur. Taraf tarafa çıkarırsak

$$y - x = x^2 - y^2 - 4(x - y) \Rightarrow x^2 - y^2 = 3(x - y)$$

$$\Rightarrow (x - y)(x + y) = 3(x - y)$$

$$\Rightarrow x + y = 3$$

olur. Taraf tarafa toplayalım

$$x + y = x^2 + y^2 - 4(x + y) \Rightarrow x^2 + y^2 = 3(x + y) = 15$$

elde edilir.

Test

3.25 UOMO-2015



A) 0 B) 3 C) -5 D) -4 E) 5

Çözüm :

$$5(a^2 + b^2) - 8ab - 6a = (2a - b - 2)^2 + (a - 2b + 1)^2 - 5$$

$$\geq -5$$

olur. Eşitlik

$$(a, b) = \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

iken sağlanır.

Test

3.26 UOMO-B-2016



A) -1 B) -3 C) -2 D) -4 E) -5

Çözüm : Eşitliği sol ve sağ tarafı açılırsa

$$x^2 + (x+2)^2 + x^2(x+2)^2 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 4$$

$$(x^2 + 2x - 2)^2 = x^4 + 4x^3 - 8x + 4$$

olduğundan, bu ifadenin eşitliğinden

$$6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 6x(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ ve } x = -2$$

elde edilir. O halde verilen denklemleri sağlayan x gerçel sayılarının toplamı -2 olur.

HARFLİ EŞİTSİZLİKLER

Aıştırma 5.1.



Çözüm :

$$\begin{aligned} 3x - 7 &\leq 11 + 5x \Rightarrow -18 \leq 5x - 3x \\ &\Rightarrow -18 \leq 2x \Rightarrow -9 \leq x \\ &\Rightarrow x \in \{-9, -8, \dots, -1\} \end{aligned}$$

Aıştırma 5.2.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &< \frac{1}{5-3x} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 7 > 5-3x \geq 2 \\ &\Rightarrow 2 > -3x \geq -3 \\ &\Rightarrow -2 < 3x \leq 3 \\ &\Rightarrow \frac{-2}{3} < x \leq 1 \end{aligned}$$

olduğundan sadece $x = 0$ ve $x = 1$ tam sayıları eşitsizliği sağlar.

Aıştırma 5.3.



Çözüm :

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{2x+1}{5} \Rightarrow 5 \geq 2x+1 \Rightarrow 4 \geq 2x \Rightarrow 2 \geq x \\ \frac{2x+1}{5} &< 7 \Rightarrow 2x+1 < 35 \Rightarrow x < 17 \end{aligned}$$

olduğundan, $2 \leq x$ her iki eşitsizliği de sağlayan rakamlar sadece 0 ve 1'dir.

Aıştırma 5.4.



Çözüm : İkinci eşitsizlik -1 ile çarpılırsa

$$\begin{cases} 3x + y + 6z > 23 \\ x - y + 4z < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + 6z > 23 \\ -x + y - 4z > -8 \end{cases}$$

olur. Böylece taraf tarafa toplama yaparsak

$$2x + 2y + 2z > 15 \Rightarrow x + y + z > \frac{15}{2}$$

olduğundan, $x + y + z$ en küçük 8 olabilir.

Aıştırma 5.5. UIMO - 2010



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{5}{14} &< \frac{n}{21} < \frac{5}{12} \text{ eşitsizliğinin her tarafını } 21 \text{ ile çarparsak,} \\ \frac{15}{2} &< n < \frac{35}{4} \Rightarrow 7,5 < n < 8,75 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $n = 8$ olmalıdır.

Aıştırma 5.6. UOMO-2006



$$\text{Çözüm : } \frac{15}{39} < \frac{6}{n} < \frac{7}{13} \text{ eşitsizliğinden,}$$

$$\frac{78}{7} < n < \frac{78}{5}$$

eşitsizliği elde edilir. $n \in \mathbb{Z}$ için, $11 < n < 16$ olmalıdır. O halde, $n \in \{12, 13, 14, 15\}$ bulunur.

Aıştırma

5.7. UOMO-2009



Çözüm : $12 < (n/5) < 21$ ise,

$$60 < n < 105$$

bulunur. $n/5$ kesrinin sadeleştirilememesi için, n sayısı 5 ile aralarında asal olmalıdır. Buna göre, n sayısı, 5'in katı olmamalıdır. Buna göre, istenen şekildeki n sayılarının toplamı,

$$\begin{aligned} & (61 + 62 + \dots + 103 + 104) \\ & - (65 + 70 + \dots + 100) \\ & = 2970 \end{aligned}$$

bulunur. Fakat, biz $n/5$ şeklindeki kesirlerin toplamını aradığımız için, istenen yanıt $2970/5 = 594$ bulunur.

Aıştırma

5.8. UOMO-2009



Çözüm : $11a - \frac{1}{a} = b - \frac{11}{b}$ eşitliğini,

$$11 \left(a + \frac{1}{b} \right) = \left(b + \frac{1}{a} \right)$$

şeklinde yazalım. Bu eşitlikte, parantez içlerinde paydalar eşitlenip sadeleştirmeler yapılsa $b = 11a$ elde edilir. Buna göre, $a + b < 121$ olduğundan,

$$(a, b) \in \{(1, 11), (2, 22), (3, 33), \dots, (9, 99), (10, 110)\}$$

olabilir ki, bunların sayısı da 10'dur.

Aıştırma

5.9.



Çözüm : Önce, verilen cebirsel ifadeyi parçalayalım.

$$\frac{10x + 3y}{x \cdot y} = \frac{10\cancel{x}}{\cancel{x} \cdot y} + \frac{3\cancel{y}}{x \cdot \cancel{y}} = \frac{10}{y} + \frac{3}{x}$$

yazılabilir.

$$5 \leq x \leq 10 \Rightarrow \frac{1}{5} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{3}{10} \leq \frac{3}{x} \leq \frac{3}{5},$$

$$2 \leq y \leq 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{5} \Rightarrow 2 \leq \frac{10}{y} \leq 5$$

eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2 + \frac{3}{10} \leq \frac{10}{y} + \frac{3}{x} \leq 5 + \frac{3}{5}$$

elde edilir. O halde, verilen ifadenin sadece alabileceği tam sayı değerleri 3, 4 ve 5 olur.

Aıştırma

5.10.



Çözüm : Verilenlerden

$$\begin{cases} 7A + 4B + 4C > 77 \\ A < 23 + 2B + 2C \end{cases}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\begin{cases} 7A + 4B + 4C > 77 \\ -A + 2A + 2B > -23 \end{cases}$$

yazılıp taraf tarafa toplanırsa, $6A + 6B + 6C > 54$ eşitsizliğinden $A + B + C > 9$ elde edilir. O halde, üçünün yaşları toplamı en az 10 olur.

Aıştırma 5.11.

Çözüm : Doğal sayıya **D**, ondalık sayıya **O** diyelim.

$$> 23$$

$$< 31$$

elde edilir. Eşitsizlikler aynı yönlü olmadığı için taraf tarafa toplayamayız. Aynı yönlü olarak yazarsak

$$> 23$$

$$31 >$$

olur. Taraf tarafa toplarsak,

$$O + D + 31 > O + 3D + 23 \Rightarrow 8 > 2D$$

eşitsizliğinden $8 > 2D$ elde edilir. O halde, **D** en fazla **3** olabilir.

Paydasında Harfli İfade Olan Eşitsizlikler

Aıştırma 5.12.

Çözüm : a) Her x gerçel sayısı için, $3^x > 0$ ve $x^2 + 1 > 0$ olduğundan verilen eşitsizliğin sadeleştirilmiş biçimi doğrudur.

b) Her x gerçel sayısı için $2^{-x} > 0$ ve $x^2 + 2x + 2 > 0$ olduğundan sadeleştirme doğrudur. $x^2 + 2x + 2 > 0$ olduğunu $(x + 1)^2 + 1 > 0$ biçiminde görebiliriz.

c) Kesrin payını $x^2 (x - 3)$ biçiminde yazabiliriz. $x^2 \geq 0$ olduğu için eşitsizlikte atabiliriz ama $x = 0$ durumunda eşitlik sağlanacağı için not etmek gerekirdi. Paydadaki ifade ise atılırken $x \neq 2$ olduğu not edilmelidir. O halde, bu ifade

$$x - 3 \leq 0 \cup \{x = 0, x \neq 2\}$$

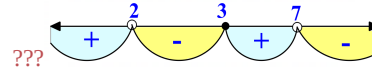
şeklinde kısaltılabilir.

Aıştırma 5.13.

Çözüm : 3^x , $(x - 5)^2$ ve $(x - 8)^2$ çarpanlarını atabiliriz. Ama eşitlik durumu da olduğu için $x = 5$ 'in çözüm olabileceğini not edelim.

$$\frac{(x - 3)}{(x - 2)(7 - x)} \geq 0$$

elde edilir. Her bir çarpandaki en büyük dereceli terimin işaretleri çarpılırsa "-" bulunur. Çarpanların kökleri **2, 3, 7** olduğundan



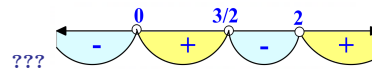
olur. Böylece, eşitsizliği sağlayan pozitif tam sayılar **{1, 3, 4, 5, 6}** olarak bulunur.

Aıştırma 5.14.

Çözüm : Sağ tarafı 0 olacak şekilde tüm terimleri sola geçirelim ve düzenleyelim.

$$\begin{aligned} \frac{x-3}{2x-3} + \frac{x-1}{1} < 0 &\Rightarrow \frac{x-3+(x-1)(2x-3)}{2x-3} < 0 \\ \Rightarrow \frac{2x^2-4x}{2x-3} < 0 &\Rightarrow \frac{2x(x-2)}{2x-3} < 0 \end{aligned}$$

Her bir çarpandaki en büyük dereceli terimin işaretleri çarpılırsa "+" bulunur. Çarpanların kökleri **0, 2, 3/2** olduğundan



olur. Böylece, eşitsizliği sağlayan $(-\infty, 0)$ ve $(3/2, 2)$ aralığında pozitif tam sayı yoktur.

Mutlak Değerli Eşitsizlikler

KONU SONU TESTİ (Eşitsizlikler)(Çözümler)

Test 5.1



A) 167 B) 144 C) 156 D) 166 E) 168

Çözüm : $x \cdot y$ çarpımı en küçük

$$8 \cdot (-11) = -88$$

olabilir. En büyük ise $(-7) \cdot (-11) = 77$ olabilir. Buna göre,

$$-88 \leq x \cdot y \leq 77$$

olacaktır. O halde, $77 - (-88) + 1 = 166$ tam sayı değeri olabilir.

Test 5.2



A) 10 B) 3 C) 2 D) 6 E) 5

Çözüm :

$$\frac{3x + 5y}{xy} = \frac{3}{y} + \frac{5}{x}$$

biçiminde yazılabilir.

$$3 \leq x \leq 8 \Rightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{5}{8} \leq \frac{5}{x} \leq \frac{5}{3},$$

$$5 \leq y \leq 7 \Rightarrow \frac{1}{7} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{3}{7} \leq \frac{3}{y} \leq \frac{3}{5}$$

eşitsizliklerinin toplamından

$$\frac{59}{56} \leq \frac{3}{y} + \frac{5}{x} \leq \frac{34}{15} \Rightarrow \frac{3x + 5y}{xy} = 2$$

olabilir.

Test 5.3



A) 3838 B) 3939 C) 4040 D) 4141 E) 4000

Çözüm : Alp ve Berk'in boylarını isimlerinin baş harfiyle göstereyim.

$$87,3 < A < 101 \Rightarrow 86,3 < A - 1 < 100$$

$$98 < B < 123,7 \Rightarrow 100 < B + 2 < 125,7$$

elde edilir. Böylece,

$$8630 < (A - 1)(B + 2) < 12570$$

bulunur ve istenen çarpım 8631, 8632, ..., 12569 doğal sayıları olabilir ki bunların sayısı da

$$12569 - 8631 + 1 = 3939$$

bulunur.

Test 5.4 UAMO-1998



A) 10 B) 8 C) 2 D) 6 E) 5

Çözüm : $x^2 - y < -1$ ve $x^2 + y < 5$ eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak,

$$0 \leq x^2 < 2 \Rightarrow x \in \{0, \pm 1\}$$

bulunur. Diğer yandan,

$$1 + x^2 < y < 5 - x^2$$

olacağından, verilen eşitsizlikleri sağlayan tam 5 tane tam sayı ikilisi vardır: $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(0, 4)$, $(1, 3)$, $(-1, 3)$.

Test 5.5

- A) 12 B) 10 C) 8 D) 6 E) 5

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{7}{13} < \frac{a}{a+b} < \frac{6}{11} &\Rightarrow \frac{13}{7} > \frac{a+b}{a} > \frac{11}{6} \\ &\Rightarrow \frac{13}{7} > 1 + \frac{b}{a} > \frac{11}{6} \\ &\Rightarrow \frac{13}{7} - 1 > \frac{b}{a} > \frac{11}{6} - 1 \\ &\Rightarrow \frac{6}{7} > \frac{b}{a} > \frac{5}{6} \\ &\Rightarrow \frac{36}{42} > \frac{b}{a} > \frac{35}{42} \\ &\Rightarrow \frac{72}{84} > \frac{b}{a} > \frac{70}{84} \end{aligned}$$

yazılırsa, $a = 84$ iken $b = 71$ tek değerdir. $a > 84$ olması durumunda 1'den fazla b değeri olacaktır. O halde, en büyük a değeri 84 olduğundan yanıt 12 bulunur.

Test 5.6

- A) 16 B) 14 C) 15 D) 13 E) 17

Çözüm : $a > 0$ ise

$$\begin{aligned} |3a + 2|a|| \geq 11 &\Rightarrow |3a + 2a| \geq 11 \\ &\Rightarrow 5a \geq 11 \\ &\Rightarrow a \geq \frac{11}{5} \end{aligned}$$

elde edilir. $a < 0$ olursa

$$\begin{aligned} |3a + 2|a|| \geq 11 &\Rightarrow |3a - 2a| \geq 11 \\ &\Rightarrow |a| \geq 11 \\ &\Rightarrow -a \geq 11 \\ &\Rightarrow a \leq -11 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, $-11 < a < \frac{11}{5} = 2,2$ aralığındaki tam sayılar koşulu sağlamazlar.

$$\{-10, -9, -8, \dots, 0, 1, 2\}$$

yani 13 tam sayı vardır.

Test 5.7

- A) 10 B) 11 C) 9 D) 12 E) 13

Çözüm : a ve b tam sayı ise

$$|a - b|$$

ifadesinin en büyük değeri için, a en büyük b en küçük ya da, a en küçük b en büyük alınmalıdır.

$$a = 3 \text{ ve } b = -7 \text{ alınır, } |a - b| = |3 - (-7)| = 10,$$

$$a = -5 \text{ ve } b = 4 \text{ alınır, } |a - b| = |-5 - 4| = 9,$$

olduğundan $|a - b|$ en fazla 10 olabilir.

Test 5.8

- A) 10 B) 11 C) 9 D) 12 E) 13

Çözüm : a ve b reel sayı ise a ve b için tam sayı olarak çözemeyiz. İkinci eşitsizliği -1 ile çarpalım. Yönlerin değişmesi gerektiğini unutmayınız.

$$-\frac{11}{2} < a \leq \frac{7}{2}$$

$$-\frac{9}{2} < -b \leq \frac{15}{2}$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak

$$-10 < a - b \leq 11$$

elde edilir. Bu durumda $|a - b|$ en fazla 11 olabilir.

Test 5.9 UAMO-2005

A) 7 B) 11 C) 9 D) 12 E) 8

Çözüm :

$$\frac{m+k}{nk} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{m+k}{k} = m \Rightarrow \frac{m}{k} = m-1$$

$$\Rightarrow k = \frac{m}{m-1}$$

olur. k tam sayı olduğundan, $m-1 = 1 \Rightarrow m = 2$ olmalıdır. Demek ki,

$$\frac{1}{7} \leq \frac{2}{n} < \frac{1}{3}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif n 'lerin sayısını bulmalıyız. Yukarıdaki eşitsizlikten $6 < n \leq 14$ elde edilir. Buradan, $n = 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$ bulunur.

Test 5.10 UAMO-2001

A) 754 B) 761 C) 772 D) 771 E) 773

Çözüm :

$$|x| + |y| \leq 20$$

eşitsizliğinde,

$x = 0$ olursa, $|y| < 20$ eşitsizliğini sağlayan $2 \cdot 19 + 1 = 39$ çözüm vardır ve

$y = 0$ olursa, $|x| < 20$ eşitsizliğini sağlayan 39 çözüm vardır.

$(0, 0)$ çözümü iki kez sayıldığından, eşitsizliğin $x \cdot y = 0$ 'ı sağlayan tam çözümleri sayısı $2 \cdot 39 - 1 = 77$ 'dir.

Şimdi $x \cdot y \neq 0$ 'ı sağlayan çözümlerin sayısını bulalım.

(x, y) ikilisi çözüm olduğunda, $(-x, y)$, $(x, -y)$ ve $(-x, -y)$ ikilileri de çözüm olacağından, sadece $1 \leq x \leq 18$ ve $1 \leq y \leq 18$ eşitsizliklerini sağlayan (x, y) çözümlerinin sayısını bularak 4 ile çarpabiliriz. Böylece, eşitsizliğin pozitif (x, y) çözüm ikililerinin sayısı:

$$18 + 17 + 16 + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{1+18}{2} \cdot 18 = \frac{18 \cdot 19}{2}$$

olur. Dolayısıyla, eşitsizliğin tüm çözümlerinin sayısı:

$$77 + 4 \cdot \frac{18 \cdot 19}{2} = 77 + 2 \cdot 18 \cdot 19 = 77 + 684 = 761$$

olarak bulunur.

Test 5.11 UAMO-1997

A) 9 B) 11 C) 10 D) 12 E) 8

Çözüm : Kitabın fiyatı x lira olsun. $x \geq 37$ olduğu açıktır. Birincinin $x - 14$, ikincinin $x - 37$ ve üçüncünün $x - 25$ lira parası varmış. Paralarının toplam miktarı kitabın değerinden küçük olduğundan

$$(x - 14) + (x - 37) + (x - 25) < x$$

eşitsizliğinden $x < 38$ elde edilir. $x \geq 37$ ve $x \leq 37$ eşitsizliklerinden $x = 37$ olur ve dolayısıyla rakamları toplamı $3 + 7 = 10$ olur.

Test 5.10 UAMO-2001

A) 754 B) 761 C) 772 D) 771 E) 773

Çözüm :

$$|x| + |y| \leq 20$$

eşitsizliğinde,

$x = 0$ olursa, $|y| < 20$ eşitsizliğini sağlayan $2 \cdot 19 + 1 = 39$ çözüm vardır ve

$y = 0$ olursa, $|x| < 20$ eşitsizliğini sağlayan 39 çözüm vardır.

$(0, 0)$ çözümü iki kez sayıldığından, eşitsizliğin $x \cdot y = 0$ 'ı sağlayan tam çözümleri sayısı $2 \cdot 39 - 1 = 77$ 'dir.

Şimdi $x \cdot y \neq 0$ 'ı sağlayan çözümlerin sayısını bulalım.

(x, y) ikilisi çözüm olduğunda, $(-x, y)$, $(x, -y)$ ve $(-x, -y)$ ikilileri de çözüm olacağından, sadece $1 \leq x \leq 18$ ve $1 \leq y \leq 18$ eşitsizliklerini sağlayan (x, y) çözümlerinin sayısını bularak 4 ile çarpabiliriz. Böylece, eşitsizliğin pozitif (x, y) çözüm ikililerinin sayısı:

$$18 + 17 + 16 + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{1+18}{2} \cdot 18 = \frac{18 \cdot 19}{2}$$

olur. Dolayısıyla, eşitsizliğin tüm çözümlerinin sayısı:

$$77 + 4 \cdot \frac{18 \cdot 19}{2} = 77 + 2 \cdot 18 \cdot 19 = 77 + 684 = 761$$

olarak bulunur.

Test 5.12 UOMO-B-2018

A) 9 B) 11 C) 10 D) 12 E) 8

Çözüm : Eşitsizliği

$$x(2x + a) - b < 0$$

biçiminde yazalım. Çözüm kümesi $(-2, 2018)$ ise, -2 'den küçük bir değer yazıldığında bu eşitsizlik sağlanmaz. Yani, $x(2x + a) - b$ negatif olmaz. -2 ile 2018 arasında değer yazılınca ise sağlanır. Yani $x(2x + a) - b$ negatif olur. O halde, $x = -2$ değeri

$$x(2x + a) - b = 0$$

ifadesinin bir köküdür. Buna göre,

$$(-2)(-4 + a) - b = 0 \Rightarrow 2a + b = 8$$

elde edilir.

Test

5.13 UOMO-B-2018



A) 3836 B) -3836 C) 3636 D) -3838 E) 3838

Çözüm :

Bu eşitsizliğin çözüm kümesi $(-1, 1919)$ açık aralığı ise,
 $x = -1$ ve $x = 1919$ değerleri

$$2x^2 + xa - b = 0$$

denkleminin kökleridir. Buna göre,

$$2x^2 + xa - b = 2(x + 1)(x - 1919)$$

biçiminde yazılırsa:

$$2x^2 + xa - b = 2x^2 - 3836x - 3838$$

olur. Bu eşitliğe göre a değeri -3836 olur.

ORAN - ORANTI - ORTALAMALAR

Aıştırma 6.1.



Çözüm : Matematik dersinden $7k$ kişi geçmiş ve $3k$ kişi kalmıştır. Toplam $10k = 40$ kişi olduğundan $k = 4$ olur. O halde, $3 \cdot 4 = 12$ kişi kalmıştır.

Aıştırma 6.2.



Çözüm : $\frac{a}{2} = \frac{2b}{5} = \frac{c}{7} = 2k$ eşitliğini kullanarak a, b ve c değişkenlerini k cinsinden yazalım.

$$a = 4k, \quad b = 5k \quad \text{ve} \quad c = 14k$$

yazılırsa,

$$\begin{aligned} 2a - 5b + 3c &= 75 \Rightarrow 2(4k) - 5(5k) + 3(14k) = 75 \\ &\Rightarrow 25k = 75 \\ &\Rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

olur. Buradan, $b = 5k = 5 \cdot 3 = 15$ elde edilir.

Aıştırma 6.3.



Çözüm : Verilenlerden

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{6}, \quad \frac{y}{z} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{30}, \quad \frac{y}{z} = \frac{30}{54}$$

yazılabilir. Buradan, $x = 5k, y = 30k$ ve $z = 54k$ yazılırsa,

$$\frac{4x^2 + y^2}{z^2 - y^2} = \frac{4 \cdot 25k^2 + 900k^2}{(z - y)(z + y)} = \frac{1000k^2}{24k \cdot 84k}$$

eşitliğinde gerekli sadeleştirmeler yapılsa $\frac{125}{252}$ elde edilir.

Aıştırma 6.4.



90

A

B

60

C

D

Çözüm : Verilen ilk dört kareden

$$2A = 90 + B, \quad 2B = A + 60$$

yazılabilir. İkinci eşitliğin iki katıyla birinci eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$4B = B + 90 + 120 = 210 \Rightarrow 3B = 210 \Rightarrow B = 70$$

olur. $B = 70$ ise $A = 80, C = 50$ ve $D = 40$ elde edilir. Böylece,

$$A + B + C + D = 80 + 70 + 50 + 40 = 240$$

elde edilir.

Aıştırma 6.5.



Çözüm :

$$A.O. = \frac{a + b}{2} = \frac{16 + 36}{2} = 26,$$

$$G.O. = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24,$$

$$H.O. = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{1}{16} + \frac{1}{36}} = \frac{288}{13} \simeq 22$$

olarak bulunur. O halde,

$$A.O. > G.O. > H.O.$$

elde edilir.

Alıştırma 6.6.

Çözüm : $A.O. = \frac{x+y}{2} = 7,5$ ise $x + y = 15$,

$G.O. = \sqrt{x \cdot y} = 6$ ise $x \cdot y = 36$ olmalıdır. Bu iki eşitliği taraf tarafa bölersek

$$\frac{x+y}{xy} = \frac{15}{36} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{15}{36}$$

elde edilir. O halde, harmonik ortalamaları

$$H.O. = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = \frac{2}{\frac{15}{36}} = \frac{24}{5}$$

elde edilir.

Alıştırma 6.8.

Çözüm : Bir koyuna $60 \cdot 50 = 3000$ gün yetecek kadar yem vardır. n gün sonra 36 koyun satılsın. Bu n gün boyunca 60 koyun yem yiyeceğinden bu miktar $n \cdot 60$ günlük azalır ve geriye 1 koyuna

$$3000 - 60 \cdot n$$

gün yetecek kadar yem kalır. n gün sonra geriye $60 - 36 = 24$ koyun kalmıştır ve bu yem miktarı bu 24 koyuna 40 gün yetmelidir. Buradan,

$$\frac{3000 - 60 \cdot n}{24} = 40$$

eşitliğinden $n = 34$ bulunur.

Doğru Orantı**Alıştırma 6.7. AMC8-2009**

Çözüm : Her defasında diğer malzemelerin fazla olduğu varsayalım.

★ 5 porsiyon sıcak çikolata için 2 kare çikolata kullanıyorsa, 5 çikolata ile $\frac{5}{2} \cdot 5 = 12,5$ porsiyon sıcak çikolata yapabilir.

★ 5 porsiyon sıcak çikolata $\frac{1}{4}$ bardak şeker kullanılıyorsa, 2 bardak şeker ile, $\frac{2}{1/4} \cdot 5 = 40$ porsiyon sıcak çikolata yapabilir.

★ 5 porsiyon sıcak çikolata 4 bardak süt kullanılıyorsa, 7 bardak süt ile, $\frac{7}{4} \cdot 5 = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$ porsiyon sıcak çikolata yapabilir. :

Sonuç olarak, yapabileceği maksimum çikolata porsiyonu şeker miktarına göre belirlidir ve $8\frac{3}{4} = 8,75$ porsiyondur.

Alıştırma

6.9. Ters Orantı



Çözüm : Dönme sayısı ile diş sayısı ters orantılıdır. Yani, diş sayısı arttıkça dönme sayısı azalır. Çarklardaki diş sayılarına sırasıyla x , y ve z diyelim. Buna göre,

$$2x = 3y = 7z = 42k$$

yazılırsa $x = 21k$, $y = 14k$ ve $z = 6k$ olur.

$$21k - 6k = 75 \Rightarrow 15k = 75 \Rightarrow k = 5,$$

bulunur. O halde, en küçük olan çarkta $6 \cdot 5 = 30$ diş vardır.

KONU SONU TESTİ (Oran - Orantı- Ortalamalar) (Çözümler)

Test 6.1



A) 144 B) 112 C) 126 D) 155 E) 124

Çözüm : Verilenlerden

$$\frac{M}{B} = \frac{5}{9} \quad \text{ve} \quad \frac{B}{S} = \frac{8}{7}$$

yazılabilir. Her iki eşitlikte de **B** oranlanmıştır. Her iki eşitlikte de **B** oranını aynı sayı ile burada 72 ile ifade edebilmek için oranları genişletelim. Bunun için ilk kesri 8 ile, ikinci kesri 9 ile genişletebiliriz.

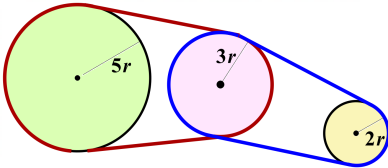
$$\frac{M}{B} = \frac{5}{9} = \frac{40}{72} \quad \text{ve} \quad \frac{B}{S} = \frac{8}{7} = \frac{72}{63}$$

oranlarına göre, $M = 40k$, $B = 72k$ ve $S = 63k$ yazılabilir. Toplam 350 top varsa,

$$M + B + S = 40k + 72k + 63k = 175k = 350$$

ise $k = 2$ alınması gerekir. $S = 63 \cdot 2 = 126$ sarı top vardır.

Test 6.2



A) 40 B) 45 C) 44 D) 42 E) 48

Çözüm : Devir sayısı ile makaranın çevre uzunluğu ve dolayısıyla da yarıçap ters orantılıdır. Makaraların büyükten küçüğe doğru devir sayıları sırasıyla a , b ve c olsun. Buna göre,

$$5a = 3b = 2c = 30k$$

yazılabilir. $a = 6k$, $b = 10k$ ve $c = 15k$ olduğundan, toplam devir sayısı

$$6k + 10k + 15k = 31k = 93$$

eşitliğinden $k = 3$ olur. O halde, en küçük olan $15 \cdot 3 = 45$ devir tamamlamış olur.

Test 6.3



A) $\frac{26}{31}$ B) $\frac{27}{31}$ C) $\frac{22}{31}$ D) $\frac{24}{31}$ E) $\frac{23}{31}$

Çözüm : Her bir eşitlikte içler dışlar çarpımı yapalım.

$$\begin{cases} 5a = 3b + 3c, \\ 3b = 2a + 2c \end{cases}$$

olur. Bu eşitliklerde bir tane değişkeni yok edelim. Mesela c değişkenini yok edelim.

$$\begin{cases} 2(5a = 3b + 3c) \\ 3(3b = 2a + 2c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a = 6b + 6c \\ 9b = 6a + 6c \end{cases}$$

taraf tarafa çıkarılırsa

$$10a - 9b = 6b - 6a \Rightarrow 16a = 15b \Rightarrow a = \frac{15}{16}b$$

elde edilir. $3b = 2a + 2c$ eşitliğinden de

$$c = \frac{3b - 2a}{2} = \frac{3b - \frac{30}{16}b}{2} = \frac{9}{16}b$$

olur. O halde,

$$\frac{c+a}{a+b} = \frac{\frac{9}{16}b + \frac{15}{16}b}{\frac{15}{16}b + b} = \frac{24}{31}$$

bulunur.

Test 6.4 AMC8-2018



A) 11 veya 12 B) 10 veya 11 C) 13 veya 14 D) 12 veya 13 E) 9 veya 10

Çözüm : Soruya göre,

$$9 < B < 18$$

yazabiliriz. Ortalamayı, yani

$$\frac{11 + 13 + B}{3} = \frac{24 + B}{3}$$

değerini bulmak istiyoruz. Buna göre,

$$9 < B < 18 \Rightarrow 9 + 24 < B + 24 < 18 + 24$$

$$\Rightarrow 33 < B + 24 < 42$$

$$\Rightarrow \frac{33}{3} < \frac{B + 24}{3} < \frac{42}{3}$$

$$\Rightarrow 11 < \frac{B + 24}{3} < 14$$

olduğundan, ortalama 11 ile 14 arasında olacaktır. Yani, ortalama 12 veya 13 olabilir.

Test 6.5

- A) 20 B) 22 C) 21 D) 19 E) 23

Çözüm : 26 yaşındaki 1 kişinin kırmızı kart ile çıkarılması ortalamayı değiştirmez. 10 kişinin yaş ortalaması 26 ise yaşları toplamı 260 olur. Maç sonunda futbol takımının yaş ortalaması 23 ise yaşları toplamı 230 olacaktır. O halde, oyuna sonradan giren 5 oyuncunun yaşları toplamı çıkan oyuncuların yaşları toplamından 30 daha azdır. Çıkan oyuncuların yaşları toplamı 127 ise, giren oyuncuların yaşları toplamı da $127 - 30 = 97$ olur.

$$19 + 19 + 19 + 19 + 21 = 97$$

olduğundan, büyük olan en az 21 yaşındadır.

Test 6.6

- A) $\frac{18}{11}$ B) $\frac{12}{11}$ C) $\frac{6}{11}$ D) $\frac{10}{11}$ E) $\frac{9}{11}$

Çözüm : Her tarafı ab ile bölelim.

$$\frac{6}{b} + \frac{6}{a} = 11 \Rightarrow \text{H.O.} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{11}{6}} = \frac{12}{11}$$

elde edilir.

Test 6.7

- A) 30 B) 25 C) 28 D) 24 E) 27

Çözüm : $\frac{x}{9} = \frac{y}{5} = \frac{16}{x-y} = k$ diyelim. $x = 9k$, $y = 5k$ ve $x - y = \frac{16}{k}$ olur. Bu üç eşitlikten de

$$4k = \frac{16}{k} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$$

elde edilir. $x + y = 18 + 10 = 28$ olur.

Test 6.8

- A) 3 B) 2, 5 C) 5 D) 4 E) 3, 5

Çözüm : Ön ve arka teker çevre uzunlukları sırasıyla $2k$ ve $5k$ olsun. Traktör 150 metre devir yaptığında ön tekerlek $\frac{150}{2k}$, arka tekerlek de $\frac{150}{5k}$ devir yapar.

$$\frac{150}{2k} - \frac{150}{5k} = 30 \Rightarrow \frac{75}{k} - \frac{30}{k} = 30$$

$$\Rightarrow \frac{45}{k} = 30 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

elde edilir. O halde, ön tekerleğin uzunluğu $2 \cdot \frac{3}{2} = 3$ metre olur.

Test 6.9

- A) $\frac{65}{9}$ B) $\frac{65}{7}$ C) 9 D) 8 E) $\frac{65}{8}$

Çözüm : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{b}{c} = k$ diyelim. Verilen eşitliğin hem pay hem de paydasını b ile bölelim.

$$\frac{a+b}{b+c} = 8 \Rightarrow \frac{\frac{a}{b} + 1}{1 + \frac{c}{b}} = 8 \Rightarrow \frac{k+1}{1+\frac{1}{k}} = 8$$

eşitliğinden $k = 8$ elde edilir. O halde,

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = k + \frac{1}{k} = 8 + \frac{1}{8} = \frac{65}{8}$$

elde edilir.

Test 6.10

- A) 3 B) 8 C) 9 D) 7 E) 6

Çözüm : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{b}{c} = k$ ise

$$\frac{a+d}{b+c} = \frac{bk+d}{b+dk} = \frac{\frac{bk}{c} + \frac{d}{c}}{\frac{b}{c} + \frac{dk}{c}} = \frac{k^2 + \frac{1}{k}}{k+1} = k - 1 + \frac{1}{k} = 8,$$

eşitliğinden $k + \frac{1}{k} = 9$ olur. O halde,

$$\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = k + \frac{1}{k} = 9$$

elde edilir.

Test 6.11

- A) 300 B) 800 C) 500 D) 400 E) 600

Çözüm : Traktör 1,8 km yol almıştır. O halde, hem ön hem de arka tekerlek 1,8 km yol alacaktır. Tekerleklerin çevre uzunluklarını bulursak sırasıyla,

$$\text{Ç. (ön)} = 2\pi r = 2 \cdot 3 \cdot 40 = 240 \text{ cm,}$$

$$\text{Ç. (arka)} = 2\pi r = 2 \cdot 3 \cdot 60 = 360 \text{ cm,}$$

olacaktır. 1,8 km = 180000 cm olduğundan, arka tekerlek

$$\frac{180000}{360} = 500$$

devir (tam dönüş) yapar.

Test 6.12

- A) 4, 3 B) 4, 2 C) 4, 1 D) 4, 4 E) 3, 5

Çözüm : Ön tekerlek 750 metreyi 300 tam dönüş ile aldığına göre, ön tekerleğin uzunluğu

$$\frac{750}{300} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ metredir.}$$

Arka tekerleğinin çevre uzunluğu ön tekerleğinin çevre uzunluğundan 1,8 metre fazla ise arka tekerleğin çevresi de $2,5 + 1,8 = 4,3$ metre olur.

Test 6.13

- A) 3 B) 8 C) 2 D) 4 E) 1

Çözüm : En az sınavla notunu yükseltmesi için diğer sınavlardan 100 veya 100'e yakın notlar alması gerekecektir. x sınava girsin ve bunlardan 100 alsın.

$$\frac{100 \cdot x + 30}{x + 1} = 85 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$$

olur. O halde, 3 sınav yeterli olmaz. En az 4 sınava girmesi gerekir.

Test 6.14

- A) 90 B) 95 C) 94 D) 92 E) 85

Çözüm : İlk sınavla birlikte notlarının toplamı

$$85 \cdot 5 = 425$$

olur. İlk sınav notu 30 ise geri kalan 4 sınavdan alacağı notların toplamı 395 olacaktır. Sınavın üçünden 100 alırsa, sınavların birinden en az 95 alması gerekir.

Test 6.15

- A) 3 B) 8 C) 2 D) 4 E) 1

Çözüm : İlk eşitliğe göre

$$3x = 2y + 2z \Rightarrow 3x - 2y - 2z = 0,$$

ve ikinci eşitliğe göre

$$4y = x + z \Rightarrow x - 4y + z = 0$$

olur. $\frac{x}{z}$ oranını aradığımız için y değişkenlerini yok edecek şekilde ilk eşitliği 2 ile çarpıp taraf tarafa çıkaralım.

$$6x - 4y - 4z = 0,$$

$$x - 4y + z = 0$$

ise $5x = 5z \Rightarrow x = z$ ve $x/z = 1$ elde edilir.**Test 6.16**

- A) 240000 B) 210000 C) 300000 D) 260000 E) 250000

Çözüm : Verilenlerden

$$\frac{A}{6} = \frac{B}{8} = \frac{C}{10} = k \text{ ise } A + B + C = 24k$$

olacaktır. Paylaştırılan para $24k$ ve en küçüğünün aldığı para da $6k$ olur. 2 yıl sonra yaşlarıyla doğru orantılı olarak paylaştırılırsa

$$\frac{A}{8} = \frac{B}{10} = \frac{C}{12} = m$$

eşitliğinden, paylaşılan para

$$A + B + C = 8m + 10m + 12m = 30m$$

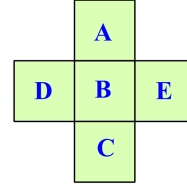
ve en küçüğünün aldığı para da $8m$ olur. Soruda

$$8m - 6k = 4000 \text{ ve } 30m = 24k \Rightarrow 5m = 4k$$

eşitliklerinden $m = 8000$ olur. O halde, paylaştırılan para

$$30m = 30 \cdot 8000 = 240000$$

liradır.

Test 6.17

- A) 36 B) 80 C) 60 D) 48 E) 72

Çözüm : Verilenlerden

$$\frac{D}{2} = \frac{B}{5} = \frac{E}{3} = k \text{ ve } 4A = 5B = 3C = m$$

olacaktır. Her ikisinde de ortak olan B değeridir. İlk eşitliğe göre B değeri 5'in katı olması gerekir. Fakat $4A = 5B = 3C$ eşitliğine göre de B değeri hem 3 hem de 4 ile tam bölünmelidir. O halde, B en az $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ alınabilir.

Test 6.18

- A) 30 B) 12 C) 21 D) 15 E) 11

a ve b sayıları sırasıyla 3 ve 2 sayıları ile doğru orantılıysa

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{2} = k$$

yazılabilir. b ve c sayıları da sırasıyla 5 ve 4 sayıları ile ters orantılıysa

$$5b = 4c = m$$

yazılabilir. İkinci eşitliğe göre b sayısı en küçük 4 olabilir. Bu durumda $c = 5$ ve $a = 6$ olacaktır. Böylece, $a + b + c = 6 + 4 + 5 = 15$ en küçük değerdir.

Test 6.19

- A) 510 B) 480 C) 460 D) 448 E) 810

Çözüm : Her bir parantez içindeki kesri parçalayalım.

$$\left(\frac{a}{b} + 3\right) \left(2\frac{c}{d} + 3\right) \left(4\frac{e}{f} + 3\right) = 6 \cdot 9 \cdot 15 = 810$$

elde edilir.

Test 6.20 AMC8-2006

- A) 456 B) 480 C) 460 D) 448 E) 510

Çözüm : Berk ve Can'ın okuma hızlarına göre okuyacağı sayfa sayıları

$$45 \cdot B = 30 \cdot C = k$$

biçiminde orantılıdır. Toplam 760 sayfa okuyacaklarından,

$$\begin{aligned} B + C = 760 &\Rightarrow \frac{k}{45} + \frac{k}{30} = 760 \\ &\Rightarrow \frac{75k}{45 \cdot 30} = 760 \\ &\Rightarrow \frac{k}{18} = 760 \\ &\Rightarrow k = 18 \cdot 760 \end{aligned}$$

bulunur. O halde,

$$C = \frac{k}{30} = \frac{18 \cdot 760}{30} = 456 \text{ sayfa}$$

okuması gerekir. Soruya göre, Can'ın okuması gereken son sayfanın numarası 456 olur.

2. yol : Can'ın okuduğu sayfa sayısı C ise Berk'in okuduğu sayfa sayısı da $760 - C$ olur. Berk bir sayfayı 45 saniyede ve Can bir sayfayı 30 saniyede okuyabiliyorsa ve aynı süre kitap okumaları için

$$30 \cdot C = 45(760 - C)$$

eşitliği olmalıdır. Şimdi bu eşitlikte sağ taraftaki parantezi dağıtarak açalım.

$$30 \cdot C = 45 \cdot 760 - 45 \cdot C \Rightarrow 75 \cdot C = 45 \cdot 760$$

Şöler. Her tarafı 75 ile bölerek sadeleştirelim.

$$C = \frac{45 \cdot 760}{75} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 152 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 5} = 3 \cdot 152 = 456$$

olur. Yani, Can 456 sayfa okuması gerekir.

Test 6.21 AMC8-2006

- A) 5600 B) 7500 C) 6000 D) 7200 E) 7600

Çözüm : Okudukları sayfa sayılarını isimlerinin baş harfleriyle gösterelim. Alp 20, Berk 45 ve Can 30 sn'de 1 sayfa okuyorsa, aynı sürede okumaları için $20A = 45B = 30C = k$ olması gerekir. Toplam 760 sayfa olduğundan,

$$A + B + C = 760 \text{ ve } \frac{k}{20} + \frac{k}{45} + \frac{k}{30} = 760$$

eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \frac{k}{20} + \frac{k}{45} + \frac{k}{30} &= 760 \Rightarrow \frac{19 \cdot k}{180} = 760 \\ &\Rightarrow k = 7200 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, Alp,

$$A = \frac{7200}{20} = 360 \text{ sayfa}$$

okur. Her sayfayı 20 sn'de okuyorsa 360 sayfayı $20 \cdot 360 = 7200$ sn'de okur.

Test 6.22 UOMO-B-2019

- A) 10 B) 8 C) 2 D) 6 E) 5

Çözüm : Siyah taşın ağırlığı a , n tane beyaz taşın ağırlıkları ortalaması da b olsun.

$$a - b = 18$$

olur. n tane beyaz taşın ağırlığı nb olduğundan siyah taşın ağırlığı tüm taşların ağırlıkları ortalamasından ise 15 fazla

$$a - \frac{a + nb}{n + 1} = 15$$

eşitliği vardır. $a = 18 + b$ yazılırsa,

$$18 + b - \frac{18 + b + nb}{n + 1} = 15 \Rightarrow \frac{18n}{n + 1} = 15$$

eşitliğinden $n = 5$ elde edilir. Masada 6 taş vardır.

Test

6.23 UOMO-B-2022



A) 7 B) 3 C) 2 D) 6 E) 5

Çözüm : 10 sayının a tanesi 1, b tanesi 2, c tanesi 3 olsun. Sayıların en az yarısı 3 ise, $a + b \leq c$ olacaktır. Bizden istenen

$$a + b + c = 12 \text{ ve } a + b \leq c$$

olmak üzere, sayıların küpler toplamının sayıların toplamına oranının en küçük değeridir. Yani,

$$\frac{a + 8b + 27c}{a + 2b + 3c} = \frac{7b + 26c + 12}{b + 2c + 12}$$

oranıdır.

$$\begin{aligned} \frac{7b + 26c + 12}{b + 2c + 12} &= \frac{7(b + 2c + 12) + 12c - 72}{b + 2c + 12} \\ &= 7 + \frac{72 - 12c}{b + 2c + 12} \end{aligned}$$

olduğundan, bu oran $c = 6$ iken en küçük değerini alır. Bu değer de 7 olabilir.

Test

6.24 UOMO-B-2019



A) 10 B) 13 C) 9 D) 11 E) 12

Çözüm : x, y ve z için y sayısı sol ve sağındaki sayıları ortalamasından 1 eksikse

$$y = \frac{x + z}{2} - 1 \Rightarrow z = 2y + 2 - x$$

olur. Buna göre,

$$10, a, b \text{ için } b = 2a + 2 - 10$$

$$a, b, c \text{ için, } c = 2b + 2 - a$$

$$b, c, d \text{ için, } d = 2c + 2 - b$$

$$c, d, e \text{ için, } e = 2d + 2 - c$$

$$d, e, 22 \text{ için, } 22 = 2e + 2 - d$$

olur. Buradan,

$$b = 2a - 8 \Rightarrow c = 3a - 14$$

$$\Rightarrow d = 4a - 18$$

$$\Rightarrow e = 5a - 20$$

$$\Rightarrow 22 = 6a - 20$$

olur ve Buna göre, $a = 7$ ve $d = 4 \cdot 7 - 18 = 10$ olur.

Test

6.25



A) 10 B) 13 C) 9 D) 11 E) 12

Çözüm : Alp'in yaşı a , Berk'in yaşı b olsun. Alınan şeker miktarı yaşlarıyla doğru orantılıysa

$$\frac{Alp}{a} = \frac{Berk}{b} = k$$

yazılabilir. O halde, $Alp = ka$ ve $Berk = kb$ şeker alır.

$$ka + kb = 99 \Rightarrow k = \frac{99}{a + b} \Rightarrow Alp = \frac{99a}{a + b}$$

şeker alır. Alınan şeker miktarı yaşlarıyla ters orantılıysa

$$Alp \cdot a = Berk \cdot b = k$$

yazılabilir. Bu durumda, $Alp = \frac{k}{a}$ ve $Berk = \frac{k}{b}$ şeker alır.

$$\frac{k}{a} + \frac{k}{b} = 99 \Rightarrow \frac{k(a + b)}{ab} = 99 \Rightarrow k = \frac{99ab}{a + b}$$

olduğundan

$$Alp = \frac{99ab}{a(a + b)} = \frac{99b}{a + b}$$

şeker alır.

$$\frac{99b}{a + b} - \frac{99a}{a + b} = 11 \Rightarrow \frac{99(a - b)}{a + b} = 11$$

$$\Rightarrow a + b = 9a - 9b$$

$$\Rightarrow 10b = 8a$$

$$\Rightarrow 5b = 4a$$

elde edilir. Buradan $a = 5 \cdot m$ ve $b = 4 \cdot m$ sonucu çıkar. Berk'in yaşı 4'ün katı olduğundan seçeneklerden sadece 12 olabilir.

Test

6.26

UOMO-B-2022



A) 10 B) 13 C) 12 D) 16 E) 15

Çözüm : Mumların başlangıçtaki boyları n , başlangıçtan 5 saat sonraki boyları $20k$ ve $19k$, başlangıçtan 10 saat sonraki boyları da $13m$ ve $11m$ olsun. Buna göre,

$$\frac{n - 20k}{n - 13m} = \frac{n - 19k}{n - 11m} = \frac{5}{10} \quad (*)$$

elde edilir. Bu oranlardan

$$\frac{5}{10} = \frac{(n - 20k) - (n - 19k)}{(n - 13m) - (n - 11m)} = \frac{k}{2m}$$

ve buradan da $k = m$ elde edilir. Bunu (*) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\frac{n - 20k}{n - 13k} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2n - 40k = n - 13k \Rightarrow n = 27k$$

elde edilir. O halde, kalın mumun boyu 5 saatte $27k$ 'dan $20k$ 'ya azaldıysa, azalan yol $7k$ olduğundan, saatte

$$\frac{7k}{5},$$

ince mum ise 5 saatte $27k$ 'dan $19k$ 'ya $8k$ azaldığından, saatte

$$\frac{8k}{5}$$

kadar azalır. Şimdi sorunun son ifadesine dönelim. Yani, başlangıçtan itibaren kaç saat sonra mumların boyları oranı 2 olduğunu bulacağız. x saat sonra olsun. Bu durumda

$$\frac{27k - x \cdot \frac{7k}{5}}{27k - x \cdot \frac{8k}{5}} = 2 \Rightarrow \frac{135 - 7x}{135 - 8x} = 2$$

eşitliğinden $x = 15$ bulunur.

Test

6.27

A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{7}{12}$

Çözüm : A bakterisinin başlangıçtaki alanı a ise 3. günün sonunda $27a$ olur. B bakterisinin başlangıçtaki alanı b ise 3. günün sonunda $125b$ olur. 3. günün sonunda tüm kabın yüzey alanı bu iki bakteriyle kapandığından

$$27a + 125b = 327a \Rightarrow 125b = 300a$$

eşitliğinden

$$\frac{a}{b} = \frac{125}{300} = \frac{5}{12}$$

elde edilir.

Test

6.28



A) 177 B) 176 C) 174 D) 178 E) 175

Çözüm : a ve b sayıları sırasıyla 7 ve 5 sayılarıyla doğru orantılıysa

$$\frac{a}{7} = \frac{b}{5} = k$$

yazılabilir. b ve c sayıları da sırasıyla 9 ve 11 sayılarıyla ters orantılıysa

$$9b = 11c = m$$

yazılabilir. İkinci eşitliğe göre b sayısı hem 5 hem de 11 ile bölünmesi gerektiğinden en küçük 55 olabilir. Bu durumda $c = 45$ ve $a = 77$ olacaktır. Böylece, $a + b + c = 77 + 55 + 45 = 177$ en küçük değerdir.

Test 6.29

A) 12 B) 14 C) 15 D) 10 E) 16

Çözüm : Başlangıçtaki makine sayısına 100, çalışma süresine de 100 dk diyelim. Bu durumda,

100 makine 100 dakika çalışarak 6 günde 10000 kitap basabiliyorsa,

150 makine 80 dakika çalışarak x günde 30000 kitap basar.

* Kitap sayısı ile makine sayısı doğru orantılıdır. Makine sayısı artarsa kitap sayısı da artar.

* Kitap sayısı ile çalışma zamanı doğru orantılıdır. Çalışma zamanı artarsa kitap sayısı da artar.

* Kitap sayısı ile çalışılan gün sayısı doğru orantılıdır. Çalışılan gün sayısı artarsa kitap sayısı da artar.

O halde,

$$\frac{10000}{100 \cdot 100 \cdot 6} = \frac{30000}{150 \cdot 80 \cdot x}$$

eşitliği vardır. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $x = 15$ gün bulunur.

Test 6.30

A) 4 B) 5 C) 6 D) 3 E) 7

Çözüm :

n boyacı 8 saat çalışarak 6 günde 2 bina boyuyor.

$n + 7$ boyacı 10 saat çalışarak 4 günde 4 bina boyuyor.

* Boyanan bina sayısı ile boyacı sayısı doğru orantılıdır. boyacı sayısı artarsa boyanan bina sayısı da artar.

* Boyanan bina sayısı ile çalışma zamanı doğru orantılıdır. Çalışma zamanı artarsa boyanan bina sayısı da artar.

* Boyanan bina sayısı ile çalışılan gün sayısı doğru orantılıdır. Çalışılan gün sayısı artarsa boyanan bina sayısı da artar.

O halde,

$$\frac{2}{n \cdot 8 \cdot 6} = \frac{4}{(n + 7) \cdot 10 \cdot 4}$$

eşitliğinden $n = 5$ bulunur.

PROBLEM TİPLERİ

Yaş Problemleri

Alıştırma 7.1.



Çözüm :

	Berk	Verilen Bilgi
Bugün	x	
2 yıl önce	$x - 2$	$3(x + 4) - 20$
4 yıl sonra	$x + 4$	

tablosundan

$$x - 2 = 3(x + 4) - 20 \Rightarrow x = 3$$

olur. Berk'in bugün $x = 3$ yaşında olduğu bulunur.

Alıştırma 7.2.



Çözüm :

	Alp	Berk
Bugün	a	b
$b - a$ yıl sonra	b	$b + (b - a) = 2b - a$

tablosundan

$$b = 2(2b - a) - 30 \Rightarrow 3b - 2a = 30$$

olur. $a + b = 40$ verilmiş. Buna göre, $b = 40 - a$ yazılırsa

$$3(40 - a) - 2a = 30 \Rightarrow 120 - 5a = 30$$

$a = 18$ elde edilir.

Alıştırma 7.3.



Çözüm :

	Tekin	Üç Çocuğun Yaşları Toplamı
Bugün	n	$3m$
3 Yıl Önce	$n - 3$	$3m - 9$
4 yıl Sonra	$n + 4$	$3m + 12$

yazılabilir. Verilenlerden

$$n - 3 = 5(m - 3) \Rightarrow 5m - n = 12,$$

$$n + 4 = 3m + 12 \Rightarrow n - 3m = 8$$

olur. Bu iki denklemin çözümünden $n = 38$ elde edilir.

Alıştırma 7.4.



Çözüm :

	Hakan	Gökhan
Doğum Yılı	a	b

diyelim. $a + b = 3990$ verilmiş. Verilenlerden

$$(a - 3) - (b + 10) = 19 \Rightarrow a - b = 32$$

olur. Bu iki denklemin toplamından

$$2a = 3990 + 32 = 4022 \Rightarrow a = 2011$$

elde edilir.

Hız Problemleri

Aıştırma 7.5.



Çözüm : t saat sonra karşılaşırlar.

$$110t + 130t = 600 \Rightarrow t = \frac{600}{240} = \frac{5}{2} \text{ saat}$$

$$\Rightarrow t = \frac{5}{2} \cdot 60 = 150 \text{ dakika}$$

Aıştırma 7.6.



Çözüm : Hızlı araç diğerine t saat sonra yetişsin.

$$120t - 80t = 600 \Rightarrow 40t = 600 \Rightarrow t = 15 \text{ saat}$$

sonra yetişir.

Aıştırma 7.7.



Çözüm : Akıntının hızı b metre/saniye olsun. Buna göre,

$$60(a + b) = 60(2a - b) \Rightarrow a = 2b$$

elde edilir. O halde, A ile B arasındaki uzaklık

$$x = t \cdot V = 60 \cdot (2b + b) = 180b$$

olur. Bu kişi hiç yüzmeden akıntıyla

$$t = \frac{180b}{b} = 180 \text{ saniyede}$$

A 'dan B 'ye ulaşır.

Aıştırma 7.8.



Çözüm : A ile B şehri arasındaki mesafe x km olsun. O halde, bisikletlinin aldığı toplam mesafe $2x$ olacaktır. Bisikletli A şehirden B şehrine

$$t = \frac{x}{30} \text{ saatte,}$$

gider. Dönüş hızı a km/saat ise B şehirden A şehrine de

$$t = \frac{x}{a} \text{ saatte}$$

gider. Buna göre, ortalama hızı

$$\text{Ortalama hız} = \frac{2x}{\frac{x}{30} + \frac{x}{a}} = 24 \Rightarrow a = 20$$

elde edilir.

Aıştırma 7.9.



Çözüm : Mumların biri 5 saatte diğeri 6 saatte tamamıyla bittiğine göre, uzunluklarını hem 5 hem de 6 ile tam bölünen bir değer olarak 30 cm alalım. O halde, 5 saatte biten mum her saatte $\frac{30}{5} = 6$ cm, tamamı 6 saatte biten mum da her saatte $\frac{30}{6} = 5$ cm kılalacaktır. O halde t saat sonra mumların boyları sırasıyla

$$30 - 6t \text{ ve } 30 - 5t$$

olur. Büyük olan küçük olanın 5 katı olması için,

$$30 - 5t = 5(30 - 6t)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradan,

$$t = \frac{24}{5} \text{ saat} = \frac{24}{5} \cdot 60 = 288 \text{ dakika}$$

elde edilir.

Karışım Problemleri

Alıştırma

7.10.



Çözüm : Tuz oranı %15 olan 400 gr tuzlu sudaki tuz miktarı

$$\frac{15}{100} \cdot 400 = 60 \text{ gr}$$

olur. x gram tuz atılsın. Yeni tuz oranı %20 oluyorsa

$$\text{Tuz oranı} = \frac{60 + x}{400 + x} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$$

eşitliğinden $x = 25$ gr bulunur.

KONU SONU TESTİ (Problemler)

Test 7.1 AMC8-2022



A) 4 B) 1 C) 2 D) 3 E) 5

Çözüm : 5 yıl önce, Berna 6 yaşındayken, yavru kedi 0 yaşındaydı. O halde, Berna bugün 11 kedi 5 yaşında olur. O halde, Alp'in yaşı

$$30 - 11 - 5 = 14$$

bulunur. Yani, Alp Berna'dan $14 - 11 = 3$ yaş büyüktür.

Test 7.2



A) 2025 B) 2029 C) 2024 D) 2030 E) 2035

Çözüm :

	Rüzgar	Babası
2020	10	40
x yıl sonra	$10 + x$	$40 + x$

tablosuna göre

$$\frac{40 + x}{10 + x} = 3$$

denklemden $x = 5$ bulunur. O halde, babasının yanıtı 2025 olmalıdır.

Test 7.3



A) 35 B) 36 C) 37 D) 40 E) 33

Çözüm :

	Alper	Serhat
Bugün	$a + 6$	$3a - 2$
$3a$ yıl sonra		$6a - 2$

tablosundan

$$6a - 2 = 4(a + 6) \Rightarrow a = 13$$

olur. O halde, Serhat $3a - 2 = 3 \cdot 13 - 2 = 37$ yaşındadır.

Test 7.4



A) 14 B) 11 C) 12 D) 15 E) 10

Çözüm :

	Hakan	Tuğrul
Bugün	H	T
$T - H$ yıl sonra	T	$T + (T - H) = 2T - H$

tablosundan

$$T + (2T - H) = 60 \Rightarrow 3T - H = 60$$

olur. $T + H = 40$ verilmiş. Buna göre, $T = 40 - H$ yazılırsa

$$3(40 - H) - H = 60 \Rightarrow 4H = 60 \Rightarrow H = 15$$

elde edilir.

Test 7.5



A) 15/7 B) 15/8 C) 13/7 D) 16/7 E) 17/7

Çözüm : Uzun olan mumun boyu a , kısa olan mumun uzunluğu da b olsun. 1 saat içinde mumların boyları

$$\frac{a}{5} \text{ ve } \frac{b}{7}$$

kadar azalacaktır. 4 saatte ise

$$\frac{4a}{5} \text{ ve } \frac{4b}{7}$$

kadar azalarak, boyları sırasıyla $\frac{a}{5}$ ve $\frac{3b}{7}$ olur. 4 saat sonra boyları eşit ise

$$\frac{a}{5} = \frac{3b}{7} \Rightarrow 7a = 15b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{15}{7}$$

elde edilir.

Test 7.6

- A) 21 B) 18 C) 15 D) 22 E) 25

Çözüm : 300 gr tuzlu sudaki tuz miktarı

$$\frac{15}{100} \cdot 300 = 45 \text{ gr}$$

olur. 200 gr tuzlu sudaki tuz miktarı

$$\frac{30}{100} \cdot 200 = 60 \text{ gr}$$

olduğundan, iki karışım karıştırılması durumunda tuz oranı

$$\text{Tuz oranı} = \frac{45 + 60}{300 + 200} = \frac{21}{100} = \%21$$

bulunur.

Test 7.7

- A) 60 B) 75 C) 80 D) 76 E) 90

Çözüm : %20'lik tuzlu su karışımı x kg olsun. O halde, diğer $120 - x$ kg olur. Karışımlarda sırasıyla $\frac{20x}{100}$ ve $\frac{60(120 - x)}{100}$ kg tuz vardır. Yeni karışımındaki tuz oranı %35 ise

$$\frac{\frac{20x}{100} + \frac{60(120 - x)}{100}}{120} = \frac{35}{100}$$

$$\Rightarrow 20x + 60(120 - x) = 35 \cdot 120$$

,eşitliği sağlanmalıdır. Bu denklem çözülürse $x = 75$ kg bulunur.**Test 7.8**

- A) 19 B) 20 C) 26 D) 24 E) 23

Çözüm : Verilenlerden

	Ayhan	Gökhan
Bugün	A	G
A - G yıl önce	G	G - (A - G) = 5

tablosu hazırlanabilir. Buna göre

$$A + G = 37$$

$$2G - A = 5$$

denklemlerini taraf tarafa toplarsak $G = 14$ ve $A = 37 - 14 = 23$ elde edilir.**Test 7.9**

- A) 48 B) 45 C) 49 D) 50 E) 54

Çözüm : Sınıftaki öğrenci sayısı x olsun. Bir sınıfın 12 yıl önceki yaş ortalaması a ise bugünkü yaş ortalaması $a + 12$ olur. Çünkü, her öğrencinin yaşı 12 artar. Buna göre,

	Yaşlar Toplamı	Yaş Ortalaması
Bugün	1200	$10 + 12 = 22$
12 yıl önce	$1200 - 12x$	10

tablosu hazırlanabilir. 12 yıl önce yaşlar toplamı $1200 - 12x$ ise ortalama

$$\frac{1200 - 12x}{x} = 10$$

eşitliği sağlanmalıdır. Buradan $x = 50$ elde edilir.**Test 7.10**

- A) 32 B) 30 C) 16 D) 12 E) 24

Çözüm : Akıntının hızına V_N , teknenin hızına da V_T diyelim. Akıntının A'dan B'ye olduğu açıktır. A ile B arasındaki mesafe

$$X = 4(V_T + V_N) = 8(V_T - V_N)$$

olduğundan,

$$4V_T + 4V_N = 8V_T - 8V_N \Rightarrow 4V_T = 12V_N \Rightarrow V_T = 3V_N$$

elde edilir. O halde, A ile B arasındaki mesafe

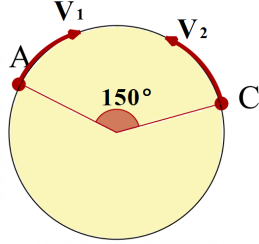
$$X = 4(V_T + V_N) = 4(3V_N + V_N) = 16V_N$$

olacaktır. Buradan,

$$t = \frac{X}{V_N} = 16$$

olduğundan Tekne sadece akıntı ile 16 saatte A noktasından B noktasına ulaşır.

Test 7.11



- A) 25 B) 20 C) 22 D) 18 E) 24

Çözüm : İki koşucu ilk karşılaşmalarında aldıkları toplam mesafe dairesel pistin 150° derecelik çevre uzunluğu kadardır. Bu uzunluğa $5x$ diyelim. O halde, 30° lik yayın çevre uzunluğu x ve tüm dairesel pistin çevre uzunluğu $12x$ olur. İlk karşılaşma 10 dakika sonra olduğuna göre, koşucuların hızına V dersek, her bir koşucu $10V$ yol alır. O halde,

$$10V + 10V = 5x \Rightarrow V = \frac{5x}{20} = \frac{x}{4}$$

elde edilir. Şimdi gelelim ikinci karşılaşmalarına ikinci karşılaşma için iki koşucu toplamda dairesel pistin tüm çevresini koşmaları gerekir. Buna göre,

$$t = \frac{12x}{\frac{x}{4} + \frac{x}{4}} = 24$$

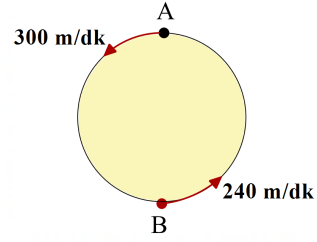
dakika sonra tekrar karşılaşırlar.

(Kısaca 150 derecelik kısımda 10 dakika da karşılaşırlarda 360 derecelik kısımda kaç dakika da karşılaşıpacaklarını bulmalıyız.

$$\begin{array}{rcl} 150 \text{ derece} & 10 \text{ dakika} & \\ 360 \text{ derece} & x \text{ dakika} & \\ \hline 150 \cdot x = 10 \cdot 360 \Rightarrow x = 24 \end{array}$$

bulunur.)

Test 7.12



- A) 84 B) 96 C) 72 D) 90 E) 100

Çözüm : Başlangıç durumunda koşucular arasındaki mesafe 600 metredir. Hızlı koşucunun yavaş olan koşucuyla ilk kez ne zaman yan yana olacaklarını bulalım. t_1 dakika sonra yan yana olsunlar.

$$300t_1 = 600 + 240t_1$$

eşitliğinden $t_1 = 10$ dk olur. Şimdi ikinci kez ne zaman yan yana olacaklarını bulalım. Artık aynı noktada oldukları için, hızlı koşucu fazladan bir tur atarak yavaş koşucuyla yan yana duruma gelir. Buna göre, t_2 dakika sonra ikinci kez yan yana geldiklerini kabul edersek

$$300t_2 = 1200 + 240t_2$$

eşitliğinden $t_2 = 20$ olur. Benzer şekilde $t_3 = t_4 = t_5 = 20$ olacaktır. Böylece, başlangıçtan

$$10 + 4 \cdot 20 = 90 \text{ dk}$$

sonra hızlı koşucu yavaş koşucuyla beşinci kez yan yana gelir.

Test

7.13

AMC8-2016



- A) 520 B) 525 C) 540 D) 510 E) 550

Çözüm : Her 35 km'de bir galon benzin kullandığından, 350 km sürdüğünde

$$\frac{350}{35} = 10$$

galon benzin kullanacağından, geriye $14 - 10 = 4$ galon benzini kalır. Ardından 8 galon benzin almış. Yani, benzin deposunda 12 galon benzini vardır. Kağan hedefe ulaştığında $14 \div 2 = 7$ galon benzini kalmıştır. Yani, 8 galon benzin aldıktan sonra 5 galon benzin kullanmıştır. ki bu $5 \cdot 35 = 175$ km araba sürmesi anlamına gelir. O halde, Kağan o gün arabayla

$$350 + 175 = 525 \text{ km}$$

yol gitmiştir.

Test

7.14

AMC8-2017



- A) 15 B) 20 C) 25 D) 24 E) 18

Çözüm :

$$\text{Mesafe} = \text{Hız} \cdot \text{Zaman} \quad (\text{yani } X = V \cdot t)$$

olduğunu kullanacağız. Bizden istenen mesafedir.

1. gün : 1 km'lik mesafeyi t dakika da alsın. Yani, hızı $\frac{1 \text{ km}}{t \text{ dk}} = (1/t) \text{ km/dk}$ olur. O halde, 60 dakika boyunca

$$X_1 = 60 \cdot (1/t) = \frac{60}{t}$$

km yol alır. Benzer düşünce ile,

$$\text{2. gün : } \frac{60}{t+5} \text{ km}$$

$$\text{3. gün : } \frac{60}{t+10} \text{ km}$$

$$\text{4. gün : } \frac{60}{t+15} \text{ km}$$

yol alır. Dört günün her birinde kat ettiği mesafe de bir tam sayı km olduğundan,

$$t, t+5, t+10, t+15$$

tam sayı değerlerinin tamamı 60'ın bir böleni olmalıdır. Bu ise sadece $t = 5$ iken mümkündür. Böylece, toplam alınan mesafe

$$\frac{60}{5} + \frac{60}{10} + \frac{60}{15} + \frac{60}{20} = 12 + 6 + 4 + 3 = 25 \text{ km}$$

bulunur.

Test

7.15

AMC8-2019



- A) 140 B) 110 C) 120 D) 100 E) 105

Çözüm : Saatte ortalama 30 km hızla 15 km'yi $\frac{1}{2}$ saatte alır.

Saatte 55 km hızla x km gittiğini kabul edelim. Bu kez $\frac{x}{55}$ saat zaman harcar. Ortalama hızı hesaplamak için, toplam mesafeye toplam süreye bölünür. O halde, toplam mesafe $15 + x$ ve toplam süre (saat olarak)

$$t_1 + t_2 = \frac{15}{30} + \frac{x}{55} = \frac{1}{2} + \frac{x}{55}.$$

olduğundan,

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{15 + x}{\frac{1}{2} + \frac{x}{55}} = 50$$

denklemini çözmeliyiz. İçler dışlar çarpımı yaparsak

$$15 + x = 25 + \frac{10x}{11}$$

olur. Buradan,

$$x - \frac{10x}{11} = 10 \Rightarrow \frac{x}{11} = 10 \Rightarrow x = 110$$

elde edilir.

Test

7.16



- A) 750 B) 720 C) 660 D) 700 E) 640

Çözüm :

1000 gr kuruyemişin x gramı %15'lik torbadan, $1000 - x$ gramı da %25'lik torbadan alınsın. Buna göre,

$$\frac{15x}{100} + \frac{25}{100}(1000 - x) = \frac{18}{100}$$

olmasını istiyoruz.

$$15x + 25(1000 - x) = 18000$$

eşitliğinden

$$10x = 25000 - 18000 = 7000 \Rightarrow x = 700 \text{ gr}$$

elde edilir.

Test 7.17

A) 10 B) 15 C) 12 D) 16 E) 20

Çözüm :

Şeker oranı %30 olan 120 gr şekerli suda

$$\frac{30}{100} \cdot 120 = 36 \text{ gr}$$

şeker ve $120 - 36 = 84$ gr su vardır. x gram şeker eklensin. 60 gr su eklendiğinden su oranının %75 olması için

$$\frac{84 + 60}{120 + 60 + x} = \frac{75}{100} \Rightarrow \frac{144}{x + 180} = \frac{3}{4}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu denklem çözülürse $x = 12$ gr bulunur.**Test 7.19 UOMO-2004**A) $\frac{x-y}{2}$ B) $x-y$ C) $x-2y$ D) $2y-x$ E) $2x-2y$ **Çözüm :**Tankerin Tankını T ile, içindeki suyu da S ile gösterirsek,

$$S + T = x \text{ ve } T + \frac{S}{2} = y$$

olur. Bu denklemlerden, $T = 2y - x$ olur.**Test 7.20 UOMO-2005**

A) 45 B) 48 C) 50 D) 55 E) 52

Çözüm :İlk yarısında geçen süre $t_1 = x/40$ ve ikinci yarısında geçen süre $t_2 = x/60$ olur. Buna göre,

$$\text{Ortalama Hız} = \frac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}} = \frac{2x}{x/40 + x/60} = 48$$

bulunur.

Test 7.18 AMC8-2018

A) 06 : 20 B) 06 : 00 C) 06 : 45 D) 06 : 30 E) 06 : 15

Çözüm : Gerçek saat 30 dakika ilerlerken, arabanın saati 35 dakika ilerlemiştir. Yani, arabanın saatinde geçen her 70 dakikada aslında geçen süre 1 saat = 60 dakikadır ve 10 dak daha azdır. Arabanın saati 12.00'dan 07:00'kadar 7 saat boyunca

$$7 \cdot 60 = 420 \text{ dk}$$

ilerlemiştir. O halde, gerçek saat

$$420 \div 70 = 6$$

kez 10 dk daha olmalıdır. $6 \cdot 10 = 60$ dakika az olması gerçek saatin arabanın saati 07:00'dan 1 saat öncesi yani 06 : 00 olması demektir.**Test 7.21 UOMO-2007**A) 2 B) $\frac{5}{2}$ C) 3 D) $\frac{10}{3}$ E) $\frac{7}{2}$ **Çözüm :**Mumun uzunluğu x olsun. Yavaş yanan mumun hızı, $x/5$ ve hızlı yanan mumun hızı da $x/4$ 'tür. Mumlar, aynı anda yakıldıktan t saat sonra, yavaş yanan mumun kalan bölümü, $x - t \cdot (x/5)$ ve hızlı yanan mumun kalan bölümü $x - t \cdot (x/4)$ olur. Buna göre,

$$x - t \cdot \frac{x}{5} = 2 \left(x - t \cdot \frac{x}{4} \right)$$

denklemden, $1 - \frac{t}{5} = 2 - \frac{t}{2}$ ve $t = \frac{10}{3}$ olur.

Test

7.22 UOMO-2010



- A) 8 B) 9 C) 6 D) 7 E) 5

Çözüm : Teknenin hızı 18 km/saat verilmiş. Akıntının hızına V , gidilen mesafeyi de X ile gösterirsek, nehrin akışına ters yönde 40 dakikada gidildiğinden,

$$X = \frac{40}{60} \cdot (18 - V) = 12 - \frac{2}{3}V$$

olacaktır. Dönüşte motoru çalıştırmayıp tekneyi akıntıya bırakarak 50 dakikada gidildiğinden, bu kez

$$X = \frac{50}{60}V = \frac{5}{6}V$$

olacaktır. $12 - \frac{2}{3}V = \frac{5}{6}V$ eşitliğinden, $V = 8$ km/saat bulunur.

Test

7.23



- A) $\frac{9}{5}$ B) 2 C) 3 D) $\frac{9}{4}$ E) $\frac{3}{2}$

Çözüm : Uzun ve kısa mumların boyları sırasıyla u ve k olsun.

Uzun olan 3 saat yanabiliyorsa saatte $\frac{u}{3}$ kadarlık kısmı yanar.

2 saatte de $\frac{2u}{3}$ 'lük kısmı yanar ve geriye $\frac{u}{3}$ 'lük kısmı kalır.

Kısa olan 8 saat yanabiliyorsa saatte $\frac{k}{8}$ kadarlık kısmı yanar.

2 saatte de $\frac{2k}{8}$ 'lük kısmı yanar ve geriye $\frac{6k}{8}$ 'lik kısmı kalır.

2 saat sonra boyları eşit oluyorsa

$$\frac{u}{3} = \frac{6k}{8} \Rightarrow \frac{u}{k} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$$

bulunur.

Test

7.24



- A) 17 : 30 B) 17 : 45 C) 17 : 40 D) 17 : 20 E) 17 : 15

Çözüm : Mumların boyu a olsun. Birinci mum 3 saatte tamamen yanıyorsa bir saatte $\frac{a}{3}$ 'lük kısmı yanar. Benzer düşünceyle diğeri de bir saatte $\frac{a}{5}$ 'lik kısmı yanar. b saat sonra yanma hızı yavaş olan mumun uzunluğu diğerrinin 3 katı olduğu verilmiş. Buna göre,

$$\frac{a - b \cdot \frac{a}{5}}{a - b \cdot \frac{a}{3}} = 3 \Rightarrow \frac{1 - \frac{b}{5}}{1 - \frac{b}{3}} = 3$$

yazılabilir. Buradan,

$$b = \frac{5}{2}$$

elde edilir. İki mum 15 : 00'da yakıldıysa 17 : 30'da biri diğerrinin 3 katı olur.

Test

7.25 UOMO-2011



- A) 40 B) 64 C) 95 D) 96 E) 50

Çözüm : 100 gr'ın %98'i su olduğundan, başlangıçtaki şeker miktarı 2 gr'dır ve buharlaşmadan sonra şeker miktarı aynı kalır. 100 gr şekerli sudan, x gr su buharlaşsın. Şeker oranı %4 verildiğinden,

$$\frac{4}{100} (100 - x) = 2$$

denkleminde $x = 50$ gr bulunur. O halde, geriye kalan şekerli su miktarı $100 - 50 = 50$ gr'dır.

Test

7.26

AMC8-2018



Test

7.28

UOMO-2003



- A) 699 B) 701 C) 712 D) 700 E) 704

Çözüm : Berna'nın gittiği her 10 fitte, Ela bisikletiyle 50 fit yol gitmektedir, bu da toplam 60 fit anlamına gelir. O halde,

$$\frac{10560}{60} = 176$$

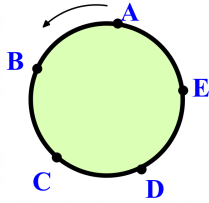
olduğundan, karşılaştıklarında Berna 176 kez 10 fit gitmiştir. Yani, 1760 fit ilerlemiştir. Berna her adımda 2,5 feet gittiğine göre,

$$\frac{1760}{2,5} = \frac{1760}{5/2} = 704 \text{ adım}$$

atmıştır.

Test

7.27



- A) 140 B) 210 C) 120 D) 180 E) 240

Çözüm : Pistin çevresi 50 km olduğundan, iki yarışmacı arasındaki mesafe $50 \div 5 = 10$ km olur. Buna göre,

1 saatin sonuna kadar sadece A'daki yarışmacı koşar.

1. saat ile 2. saat arasındaki sürede A ve B koşar.

2. saat ile 3. saat arasındaki sürede A, B ve C koşar.

3. saat ile 4. saat arasındaki sürede tamamı koşar. (2. saatin sonunda B noktasındaki E'ye, C noktasındaki de D'ye ulaştığına dikkat ediniz.)

Yarışmacılar hiç durmadığı için bundan sonraki saatlerde tüm yarışmacılar koşacaktır. Her yarışmacının saatteki hızı saatte 10 km olduğundan saatlere göre alınan mesafeler aşağıdaki gibidir.

Saat	1	2	3	4	5	6	...
Km	10	20	30	50	50	50	...

Yani, altı saat sonunda toplam

$$10 + 20 + 30 + 3 \cdot 50 = 210 \text{ km}$$

yol alınmış olur.

- A) $\frac{11}{9}$ B) $\frac{8}{7}$ C) $\frac{25}{16}$ D) $\frac{88}{63}$ E) $\frac{9}{16}$

Çözüm :

Ahmet t_1 zamanda 45 basamak çıktığından ilk seferdeki hızı, $V_1 = 45/t_1$ ve t_2 zamanda 55 basamak çıktığından ikinci seferdeki hızı $V_2 = 55/t_2$ 'dir. Buna göre,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{55t_1}{45t_2}$$

değerini bulmalıyız. Diğer taraftan, merdiven ile Ahmet aynı yöne doğru hareket ettikleri için, merdiven ilk seferde t_1 zamanda, $125 - 45 = 80$, ve ikinci seferde ise t_2 zamanda $125 - 55 = 70$ basamak ilerleyecektir. Bu sonuçlara göre merdivenin hızı

$$V = \frac{80}{t_1} = \frac{70}{t_2}$$

olur. Buradan, $t_1/t_2 = 8/7$ ve böylece,

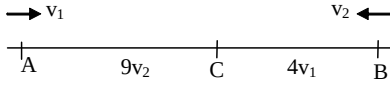
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{11 \cdot 8}{9 \cdot 7} = \frac{88}{63}$$

elde edilir.

Test 7.29 UOMO-1998

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Çözüm :



Karşılaşma süreleri t olsun.

$$|AC| = v_1 \cdot t \quad \text{ve} \quad |BC| = v_2 \cdot t$$

olur. B'den harekete eden traktör $|AC|$ yolunu 9 saatte gittiğine göre, $|AC| = 9v_2$ ve A'dan hareket eden traktör ise, $|BC|$ yolunu 4 saatte alıyor ise, $|BC| = 4v_1$ olur.

O halde, bu eşitlikler $t = \frac{|AC|}{v_1} = \frac{|BC|}{v_2}$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\frac{9v_2}{v_1} = \frac{4v_1}{v_2} \quad \text{veya} \quad \frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{4}{9}$$

olur. Buradan da, $v_2/v_1 = 2/3$ olur. Böylece,

$$t = \frac{9v_2}{v_1} = \frac{9 \cdot (2v_1/3)}{v_1} = 6$$

elde edilir.

Test 7.30 UOMO-2006

- A) 2 B) 1 C) 1, 5 D) 3 E) 1, 2

Çözüm : Delikanlının hızı V_d ve nehrin hızı da V_n olsun. Delikanlı, akıntıya karşı 3 dk yüzdüğünden, $3(V_d - V_n)/60$ km yol alır. Bu sırada sal, $3V_n/60$ km yol alır. Buna göre, delikanlı sala yetiştiği anda t zaman geçtiyse,

$$t = \frac{\frac{3}{60}(V_d - V_n) + \frac{1}{10}}{V_d + V_n} \quad \text{ve} \quad t = \frac{\frac{1}{10} - \frac{3}{60}V_n}{V_n}$$

olur. Bu ifadelerin eşitliğinden,

$$\frac{\frac{3}{60}(V_d - V_n) + \frac{1}{10}}{V_d + V_n} = \frac{\frac{1}{10} - \frac{3}{60}V_n}{V_n}$$

elde edilir. Bu denklemden,

$$\frac{3}{60}V_n = \frac{1}{10} - \frac{3}{60}V_n$$

ve buradan $V_n = 1$ km/saat bulunur.

Test 7.31 UOMO-2008

- A) 46 B) 52 C) 50 D) 60 E) 64

Çözüm :

Arabaların hızları V_1 ve V_2 olsun ve t saat sonra B'den x km uzaklıkta, hızlı olan araba diğer arabayı yakalasın. Buna göre,

$$(x + 60) = V_1 t, \\ x = V_2 t$$

denklemlerinin oranından,

$$\frac{x + 60}{x} = \frac{V_1}{V_2}$$

olur. Birinci arabanın hızı 10 km/saat, ikinci arabanın hızı 8 km/saat fazla olması durumunda, birinci araba ikinci arabayı aynı yerde 1 saat daha önce yakalayacağı verilmiş. Buna göre,

$$(x + 60) = (V_1 + 10)(t - 1) \Rightarrow x = V_1 t - V_1 + 10t - 70 \\ x = (V_2 + 8)(t - 1) \Rightarrow x = V_2 t - V_2 + 8t - 8$$

olur. Bu denklemlerde, (1) ve (2) eşitliklerinden elde edilen $V_1 t$ ve $V_2 t$ değerleri yerine yazılırsa,

$$V_1 = 10(t - 1) \quad \text{ve} \quad V_2 = 8(t - 1)$$

elde edilir. Bu iki ifadenin oranından

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{5}{4}$$

olur. Buna göre, (3) eşitliğinin kullanılmasıyla elde edilen

$$\frac{x + 60}{x} = \frac{5}{4}$$

denklemden $x = 240$ bulunur. Böylece, $x = 240$ ve $V_1 = 10(t - 1)$ ifadelerini (1) denkleminde yerine yazarsak,

$$300 = 10(t - 1)t$$

olur. Buradan, $t(t - 1) = 30$ ve $t = 6$ ve dolayısıyla $V_1 = 50$ bulunur.

ÜSLÜ SAYILAR

Alıştırma 8.1.



Çözüm : a) $n = 8$ b) $m = 16$ c) $k = 0$ d) $r = 6$ e)
a = 12 f) $b = 9$ g) $c = 15$ h) 192

Alıştırma 8.2.



Çözüm :

$$\frac{2^3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^3}{(-4)^{-1}} = 8 \cdot \frac{-1}{8} \cdot (-4)^1 = 4$$

Alıştırma 8.3.



Çözüm :

$$\begin{aligned} 2^{(-2)^3} + (2^3)^{-2} &= 2^{-8} + 2^{-6} = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^6} \\ &= \frac{1 + 2^2}{2^8} = \frac{5}{256} \end{aligned}$$

Sadeleştirme

Alıştırma 8.4.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5}{6 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^4} &= \frac{10^4 (2 + 200 + 40)}{10^4 (60 - 5)} \\ &= \frac{242}{55} = \frac{22}{5} \end{aligned}$$

Alıştırma 8.5.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{9^x}{1 + 3^x} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3^x}} &= \frac{9^x}{1 + 3^x} + \frac{1}{\frac{3^x + 1}{3^x}} \\ &= \frac{9^x + 3^x}{1 + 3^x} = \frac{3^x (3^x + 1)}{1 + 3^x} \\ &= 3^x \end{aligned}$$

Alıştırma 8.6.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{9^{1-x}}{9^{1-x} + 3} &= \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{\frac{9}{9^x}}{\frac{9}{9^x} + 3} \\ &= \frac{9^x}{9^x + 3} + \frac{3}{3 + 9^x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Aynı Kuvvetli Sayıların Çarpımı ve Bölümü

Alıştırma 8.7.



Çözüm :

$$\begin{aligned} 9^5 \cdot 32^4 &= x^{10} \Rightarrow (3^2)^5 \cdot (2^5)^4 = x^{10} \\ &\Rightarrow 3^{10} \cdot 2^{20} = x^{10} \\ &\Rightarrow 3^{10} \cdot 4^{10} = x^{10} \\ &\Rightarrow 12^{10} = x^{10} \end{aligned}$$

eşitliğinden $x = 12$ bulunur.

Alıştırma 8.8.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{3^7 + 7 \cdot 3^5}{(3^2 \cdot 2)^2} &= \frac{3^5 (3^2 + 7)}{3^4 \cdot 2^2} \\ &= \frac{3 \cdot 16}{4} = 12 \end{aligned}$$

Alıştırma 8.9.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{3^2 + 6^2 + 9^2 + 12^2}{6^2 + 12^2 + 18^2 + 24^2} &= \frac{3^2 (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2)}{6^2 (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2)} \\ &= \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Alıştırma 8.10.



Adı	1	2	3	...	a	...	x	...	y	...
Değeri	10^1	10^2	10^3	...	10^a	...	m	...	n	...

Çözüm : Verilen bilgilere göre $m = 10^x$ ve $n = 10^y$ yazılabilir. O halde, ismi $x + y$ olan karenin değeri de 10^{x+y}

olacaktır. Buna göre,

$$10^{x+y} = 10^x 10^y = m \cdot n$$

elde edilir.

Basamak Sayısı Soruları

Alıştırma 8.11.



Çözüm :

$$8^8 \cdot 25^a = (2^3)^8 (5^2)^a = 2^{24} 5^{2a}$$

eşitliğine göre, $a = 12$ alınırsa, sayı $2^{24} 5^{24} = 10^{24}$ olur ve 25 basamaklı bir sayı elde edilir.

Alıştırma 8.12. UAMO-2024



Çözüm :

$$\begin{aligned} 32^5 \cdot 5^{23} &= 2^{25} \cdot 5^{23} \\ &= 2^2 \cdot 2^{23} \cdot 5^{23} \\ &= 4 \cdot 10^{23} \\ &= \underbrace{4000..000}_{23 \text{ tane } 0} \end{aligned}$$

olduğundan 4 elde edilir.

Üslü Eşitlikler

Alıştırma 8.13.**Çözüm :**

$$2^{3x-5} = 2^{2x} \Rightarrow 3x - 5 = 2x \Rightarrow x = 5$$

bulunur.

Alıştırma 8.14.**Çözüm :**

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot 5^x 2^x}{5 \cdot 5^x - 5^{-1} \cdot 5^x} &= 40 \Rightarrow \frac{3 \cdot 2^x}{5 - 5^{-1}} = 40 \\ &\Rightarrow 3 \cdot 2^x = 200 - 8 \\ &\Rightarrow 3 \cdot 2^x = 192 \\ &\Rightarrow 2^x = 64 \\ &\Rightarrow x = 6 \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 8.15.**Çözüm :** $27 = 3^3$ ve $9 = 3^2$ yazalım.

$$\begin{aligned} 5^{4x-y} \cdot 3^{6x} &= 3^{3(5-3x)} \Rightarrow 5^{4x-y} \cdot 3^{6x} = 3^{15-9x} \\ &\Rightarrow 5^{4x-y} = 3^{15-6x-9x} \\ &\Rightarrow 5^{4x-y} = 3^{15-15x} \end{aligned}$$

eşitliğinde tabanlar farklı ve üsler tam sayı olduğundan

$$4x - y = 0 \text{ ve } 15 - 15x = 0$$

olmalıdır. Buradan $x = 1$ ve $y = 4$ bulunur. $x + y = 5$.**Üslü Denklemlerde Yeni Değişken Kullanma****Alıştırma 8.16.****Çözüm :** $2^x = a$ denilirse, $4^x = a^2$, $16^x = a^4$ olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1) &= 2^{16} - 1 \\ (a^2-1)(a^2+1)(a^4+1) &= 2^{16} - 1 \\ (a^4-1)(a^4+1) &= 2^{16} - 1 \\ a^8 - 1 &= 4^8 - 1 \end{aligned}$$

eşitliklerinden $a = 4$ olur. O halde, $2^x = 4$ ise $x = 2$ olur.**Alıştırma 8.17.****Çözüm :** $2^x = a$ denilirse $2^{-x} = \frac{1}{a}$ olur.

$$\begin{aligned} 2^x + 2^{5-x} &= 12 \Rightarrow 2^x + 32 \cdot 2^{-x} = 12 \\ &\Rightarrow a + \frac{32}{a} = 12 \Rightarrow a^2 - 12a + 32 = 0 \\ &\Rightarrow (a-4)(a-8) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden $a = 4$ veya $a = 8$ olur $a = 4$ ise $x = 2$, $a = 8$ ise $x = 3$ bulunur. Çarpımları da 6 olur.

Üslü Sayılarda Sıralama

Alıştırma

8.18. AMC8-2010



Çözüm : Tüm üsler dördün katıdır. O halde, tüm üsleri 4 olacak şekilde sayıları düzenleyebiliriz.

$$10^8 = (10^2)^4 = 100^4$$

$$5^{12} = (5^3)^4 = 125^4$$

$$2^{24} = (2^6)^4 = 64^4$$

olduğundan, $125^4 > 100^4 > 64^4$ bulunur. Yani, $2^{24} < 10^8 < 5^{12}$ olur.

Üslü Eşitsizlikler

Alıştırma

8.19.



Çözüm :

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} < \left(\frac{7}{3}\right)^{x-5} \Rightarrow \left(\frac{3}{7}\right)^{x+1} < \left(\frac{3}{7}\right)^{-x+5}$$

olduğundan,

$$x + 1 > -x + 5 \Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

bulunur. x tam sayı olarak en küçük 3 olur.

Alıştırma

8.20.



Çözüm :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2x+2} < \left(\frac{3}{2}\right)^{3x-15} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{-3x+9}$$

olduğundan,

$$2x + 2 > -3x + 9 \Rightarrow 5x > 7$$

bulunur. x tam sayı olarak en küçük 2 olur.

Alıştırma

8.21.

UAMO-2001



Çözüm : $2^x = \frac{x+5}{4-4x}$ denkleminde, her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$2^x > 0 \Rightarrow \frac{x+5}{4-4x} > 0 \Rightarrow -5 < x < 1$$

olur. Deneme yolu ile $x = -3$, $x = -2$ ve $x = -1$ için denklemin sağlandığı ve $x = -4$ ve $x = 0$ için ise sağlanmadığı görülür.

Ondalık Sayılarda Kuvvet**Alıştırma 8.22.****Çözüm :**

$$\begin{aligned}
 0,000012 \times 0,0003 &= 12 \cdot 10^{-6} \cdot 3 \cdot 10^{-4} \\
 &= 36 \cdot 10^{-10} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 10^{-10}
 \end{aligned}$$

Alıştırma 8.23.**Çözüm :**

$$\frac{0,00018 \times 0,00027}{0,000009 \times 36 \cdot 10^{-6}} = \frac{18 \cdot 10^{-5} \cdot 27 \cdot 10^{-5}}{9 \cdot 10^{-6} \cdot 36 \cdot 10^{-6}} = 150$$

Alıştırma 8.24.**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
 (1,25)^{3x-2} &= (0,64)^x \Rightarrow \left(\frac{125}{100}\right)^{3x-2} = \left(\frac{64}{100}\right)^x \\
 &\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-2} = \left(\frac{16}{25}\right)^x \\
 &\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^{2x} \\
 &\Rightarrow \left(\frac{5}{4}\right)^{3x-2} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-2x} \\
 &\Rightarrow 3x - 2 = -2x \Rightarrow 5x = 2 \\
 &\Rightarrow x = \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

KONU SONU TESTİ (Üslü Sayılar)(Çözümler)

Test 8.1 UAMO7-2024



A) 1 B) 2 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm : Bu sayının rakam sayısı $10^7 \cdot 10^7 = 10^{14}$ sayısının rakam sayısı kadardır ve 15'tir.

$$\begin{aligned} & (10^7 + 777) \cdot 10^7 + 77 \cdot 10^8 \\ &= 10^{14} + 777 \cdot 10^7 + 770 \cdot 10^7 \\ &= 10^{14} + 1547 \cdot 10^7 \\ &= 100015470000000 \end{aligned}$$

olur. 1 çıkarırsak en sondaki 7 tane sıfır bozulur ve 100 015469 999 999 elde edilir. Yanıt : 3

Test 8.2 UAMO-2024



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{4}$ D) $\frac{4}{3}$ E) 1

Çözüm : Önce paydayı eşitleyelim.

$$\begin{aligned} \frac{2^{16} + 2 \cdot 2^3}{2^{17}} - \frac{2^{14} + 8}{2^{16} \cdot (2)} &= \frac{2^{16} + 16}{2^{17}} - \frac{2^{15} + 16}{2^{17}} \\ &= \frac{2^{16} + 16 - 2^{15} - 16}{2^{17}} \\ &= \frac{2^{16} - 2^{15}}{2^{17}} \\ &= \frac{2^{15} (2 - 1)}{2^{17}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 8.3 UAMO-2024



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{16}$ D) 4 E) 16

Çözüm : Bütün terimleri c cinsinden yazalım.

$$a = 8c \text{ ve } b = 4d$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (8c)^{4d} &= c^d \Rightarrow (8c)^{4d} = (c^{1/4})^{4d} \\ &\Rightarrow 8c = c^{1/4} \\ &\Rightarrow 8^4 c^4 = c \\ &\Rightarrow c^3 = \frac{1}{8^4} \\ &\Rightarrow c = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 8.4



A) 1 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Çözüm : $n = \left(\frac{1}{3}\right)^{a+b}$ ifadesinin tam sayı olması için $a + b$ sıfır veya negatif olmalıdır. Verilen iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$-4 < a + b < 2$$

elde edilir. $a, b \in \mathbb{Z}$ için, $a + b \in \mathbb{Z}$ olmalı ki, $-4 < a + b < 2$ aralığında $a + b \in \{-3, -2, -1, 0\}$ değerleri için n sayısı tam sayı olacaktır.

Test 8.5

- A) 5 B) 6 C) 80 D) 81 E) 11

Çözüm : Verilen iki eşitsizliği taraf tarafa toplarsak

$$-4 < a + b < 2$$

elde edilir. Bu aralıkta n sayısının alabileceği değerler

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{a+b} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-4},$$

$$\frac{1}{9} < \left(\frac{1}{3}\right)^{a+b} < 81$$

bulunur. $a, b \in \mathbb{R}$ için, $a + b \in \mathbb{R}$ olacaktır. Yani, $a + b$ tam sayı olmak zorunda değildir.

$$n = \left(\frac{1}{3}\right)^{a+b} \in \{1, 2, 3, 4, \dots, 80\}$$

tam sayıları olabilir.

Test 8.6

- A) $8^{12} < 2^{38} < 16^{10}$ B) $8^{12} < 16^{10} < 2^{38}$
 C) $2^{38} < 8^{12} < 16^{10}$ D) $2^{38} < 16^{10} < 8^{12}$
 E) $16^{10} < 8^{12} < 2^{38}$

Çözüm : Tabandaki sayıların tamamı 2'nin kuvveti olduğundan, tüm tabanları 2 olacak şekilde sayıları tekrar düzenleyebiliriz.

$$2^{38} = 2^{38},$$

$$8^{12} = (2^3)^{12} = 2^{36}$$

$$16^{10} = (2^4)^{10} = 2^{40}$$

olduğundan,

$$2^{40} > 2^{38} > 2^{36}$$

bulunur. Yani, $8^{12} < 2^{38} < 16^{10}$ olur.

Test 8.7

- A) $b < c < a$ B) $a < b < c$ C) $c < a < b$
 D) $c < b < a$ E) $b < a < c$

Çözüm : Öncelikle her sayıyı en küçük tam sayı tabanına göre yazalım. Sayıları sıralayabilmek için üslerini eşit olacak şekilde düzenleyelim. Üstleri 15 olacak şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$a = 27^{-10} = 3^{-30} = 9^{-15}$$

$$b = 125^{-15}$$

$$c = 32^{-12} = 2^{-60} = 16^{-15}$$

yazılabilir. Üstleri tamamının aynı fakat üstler negatif. Buna göre tabanındaki sayı büyük olan daha küçük olacak. Yanıt

$$b < c < a$$

bulunur.

Test 8.8

- A) 9 B) 12 C) 10 D) 13 E) 11

Çözüm :

$$256 = 2^8, \quad 200 = 8 \cdot 25 = 2^3 \cdot 5^2, \quad 125 = 5^3$$

yazalım. Bu durumda,

$$256 \cdot 5^8 \cdot 200 \cdot 125 = 2^8 \cdot 5^8 \cdot 2^3 \cdot 5^2 \cdot 5^3$$

$$= 2^{11} \cdot 5^{11} \cdot 5^2$$

$$= (2 \cdot 5)^{11} \cdot 5^2$$

$$= 25 \cdot 10^{11}$$

olur. Yani sayı 25'in sağında 11 sıfır olan bir sayıdır ve 13 basamaklıdır.

Test 8.9

- A) 9 B) 12 C) 10 D) 13 E) 11

Çözüm : Sayıyı açalım.

$$S = 40000000 + 25000 + 10000$$

$$= 40000000 + 35000$$

$$= 40035000$$

olduğundan rakamları toplamı 12 olur.

Test 8.10

- A) 29 B) 21 C) 30 D) 31 E) 33

Çözüm :

$$50000000^4 = (5 \cdot 10^7)^4 = 5^4 \cdot 10^{28} = 625 \cdot 10^{28}$$

olduğundan ilk toplanan 31 basamaklıdır. İkinci toplanan zaten 25 basamaklı olduğu için toplama işlemi sonunda ilk toplananın basamak sayısını etkilemez.

Test 8.12 AMC8-2013

- A) 60 B) 40 C) 30 D) 36 E) 48

Çözüm :

$$3^a + 3^4 = 90$$

ise $3^4 = 81$ olduğundan, $3^a = 90 - 81 = 9$ olması gerekir. Yani, $a = 2$ olmalıdır.

$$2^b + 44 = 76$$

eşitliğine göre $2^b = 32 = 2^5$ olduğundan $b = 5$ bulunur. Son olarak,

$$5^3 + 6^c = 1421$$

eşitliğine göre $5^3 = 125$ yazılırsa, $6^c = 1421 - 125 = 1296$ olur.

$$1296 = 6^4$$

olduğunu görebilirsiniz. O halde $c = 4$ bulunur. $a \cdot b \cdot c = 2 \cdot 5 \cdot 4 = 40$ bulunur.

Test 8.11

- A) 59 B) 66 C) 67 D) 65 E) 60

Çözüm : Sayıyı 10'un kuvvetleri olarak yazalım.

$$(5000000)^5 = (5 \cdot 10^6)^5 = 5^5 10^{30}$$

$$(200000)^6 = (2 \cdot 10^5)^6 = 2^6 10^{30}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (5000000)^5 \cdot (200000)^6 &= 2^6 5^5 10^{30} 10^{30} \\ &= 2 \cdot (2^5 5^5) \cdot 10^{60} \\ &= 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{60} \\ &= 2 \cdot 10^{65} \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, 66 basamaklıdır.

Test

8.13 UOMO-2013



A) 209 B) 201 C) 300 D) 301 E) 208

Çözüm : Karesinin basamak sayısına göre sayıları bulalım.

Karesi bir basamaklı olan sayılardan koşulu sağlayan tek sayı 1'dir.

Karesi iki basamaklı, kendisinin rakamları toplamı 2 olan sayı yoktur.

Karesi üç basamaklı kendisinin rakamları toplamı 3 olan sayıları bulalım. 12, 21 ve 30 sayılarının rakamları toplamı 3'tür ve kareleri de 3 basamaklıdır.

Böylece bulmamız gereken 2 sayı kaldı.

Karesi dört basamaklı kendisinin rakamları toplamı 4 olan sayıları bulalım.

31 sayısının karesi $31^2 = 961$ olduğundan koşul sağlanmaz.

40 sayısının karesi 1600'dür ve 4 basamaklıdır koşulu sağlar.

Rakamları toplamı 4 olduğu için iki basamaklı başka bir sayı koşulu sağlamaz.

Karesi beş basamaklı kendisinin rakamları toplamı 5 olan sayıları bulalım.

$$104^2 = 10816$$

olduğundan koşul sağlanır. O halde, istenen yanıt

$$1 + 12 + 21 + 30 + 40 + 104 = 208$$

elde edilir.

Test

8.14 UOMO-B-2015



A) 9 B) 6 C) 5 D) 3 E) 8

Çözüm : $3^x = a$ ve $2^x = b$ diyelim. Bu durumda verilen denklemi

$$ab - 9(a + b) - a + 72 = 0$$

$$ab - 9b - 8a + 72 = 0$$

$$(a - 9)(b - 8) = 0$$

biçiminde yazabiliriz. Yani,

$$(3^x - 9)(2^x - 8) = 0$$

olur.

$$3^x = 9 \text{ veya } 2^x = 8$$

eşitliklerinden $x = 2$ veya $x = 3$ olur. Yanıt 5.

Test

8.15 UOMO-B-2014



A) 1 B) 6 C) 5 D) 3 E) 2

Çözüm : $3^x = a$ ve $x^2 = b$ diyelim. Bu durumda denklem

$$ab + 27 = 9a + 3b$$

veya

$$ab - 9a - 3b + 27 = 0,$$

$$(a - 3)(b - 9) = 0$$

eşitliğinden $a = 3$ veya $b = 9$ elde edilir. O halde,

$$3^x = a = 3 \Rightarrow x = 1,$$

$$x^2 = b = 9 \Rightarrow x = 3 \text{ veya } x = -3$$

olur. Yanıt 3.

Test

8.16 UOMO-2019



A) 9 B) 6 C) 5 D) 3 E) 8

Çözüm : $y = 2^{x+1}$ olsun. O zaman verilen eşitlik

$$2y - \frac{30}{y} = 4$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$0 = 2y^2 - 4y - 30 = (y - 5)(2y + 6)$$

elde edilir. x gerçel sayı olduğundan y pozitifdir ve dolayısıyla $y = 5$ 'tir.

TOPLAMLAR

Alıştırma 9.1.



Çözüm : 5 ile bölündüğünde 3 kalanını veren ardışık dört sayıyı

$$5n + 3, 5n + 8, 5n + 13, 5n + 18$$

biçiminde gösterebiliriz. Bunları toplarsak

$$20n + 3 + 8 + 13 + 18 = 20n + 42$$

olur. Bu ifade, üç basamaklı olarak en küçük, $n = 3$ için

$$20 \cdot 3 + 42 = 102$$

olur. O halde ardışık dört sayıdan en büyüğü

$$5 \cdot n + 18 = 5 \cdot 3 + 18 = 33 \text{ olur.}$$

Alıştırma 9.2.



Çözüm : İki basamaklı sayılardan oluşan en küçük süper beşli toplamı 60 olan

$$10, 11, 12, 13, 14$$

sayıları, en büyük süper beşli de toplamı 95 olan

$$17, 18, 19, 20, 21$$

sayılarıdır. O halde, $17 - 10 + 1 = 8$ tane iki basamaklı süper beşli vardır.

Alıştırma 9.3.



Çözüm : Tek sayıların en küçüğünü $T > 0$ ile negatif çift sayıların en büyüğünü de $\text{Ç} < 0$ ile gösterelim. Buna göre,

$$T + (T + 2) + (T + 4) + (T + 6)$$

$$\text{Ç} + (\text{Ç} - 2) + (\text{Ç} - 4) + (\text{Ç} - 6)$$

toplamı eşitliğinden,

$$4T + 4\text{Ç} = 44 \Rightarrow T + \text{Ç} = 11$$

elde edilir. T pozitif tek sayısının en küçük değerini aradığımız için $\text{Ç} = -2$ alabiliriz. Bu durumda, $T = 13$ elde edilir.

Alıştırma 9.4.



1	5	9	13	...	.
2	6	10		...	.
3	7	11		...	n
4	8	12			

Çözüm : İlk sıradaki dolap numaraları

$$1, 5, 9, 13, \dots, 4k + 1, 4k + 5, 4k + 9$$

biçimindedir. Buna göre,

$$4k + 1 + 4k + 5 + 4k + 9 = 195 \Rightarrow 12k + 15 = 195 \\ \Rightarrow k = 15$$

elde edilir. O halde, birinci sıradaki son dolabın numarası

$$4k + 9 = 4 \cdot 15 + 9 = 69$$

olduğundan, üçüncü sıradaki son dolabın numarası $n = 71$ bulunur.

Gauss Toplam Formülü

Aıştırma 9.5.



Çözüm : a) $1 + 2 + 3 + \dots + 19 = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190,$

b) $1 + 2 + 3 + \dots + 49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225,$

c) $1 + 2 + 3 + \dots + 13 = \frac{13 \cdot 14}{2} = 91,$

d) $1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950,$

e) $14 + 15 + 16 + \dots + 99 = 4950 - 91 = 4859.$

Aıştırma 9.6.



Çözüm :

$$A(n) = \frac{3n + 2n + n}{6} = n \quad \text{olduğundan}$$

$$S = A(1) + A(2) + A(3) + \dots + A(30)$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + 30 = \frac{30 \cdot 31}{2} = 465$$

elde edilir.

Aıştırma 9.7.



Çözüm :

$$G(n) = \frac{n}{2} + \frac{3n}{5} + \frac{5n}{6} = \frac{29n}{15}$$

olduğundan,

$$S = \frac{29}{15} (1 + 2 + 3 + \dots + m) = \frac{29}{15} \cdot \frac{m(m+1)}{2}$$

değerinin tam sayı olması için m en az 5 olmalıdır.

Aıştırma 9.8. UAMO-2024



Çözüm :

$$\begin{aligned} A(n) &= \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan,

$$A_1 = \frac{2}{2}, A_2 = \frac{3}{2}, A_3 = \frac{4}{2}, A_9 = \frac{10}{2}$$

olacaktır. Buna göre,

$$A(1) + A(2) + \dots + A(9) = \frac{2+3+4+\dots+10}{2} = 27$$

elde edilir.

Aıştırma 9.9.



Çözüm : Bu örüntünün genel terimini

$$\ddot{U}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

biçiminde verebiliriz. Buna göre, 100-üncü terim $\ddot{U}(100) = 50 \cdot 101 = 5050$ olur.

Ardışık Sayıların Toplamı

Alıştırma 9.10.



Çözüm : İlk terim 11, son terim 119 ve artış miktarı 12 olduğundan terim sayısı

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{119 - 11}{12} + 1 = 10$$

ve toplam da $10 \cdot \frac{119 + 11}{2} = 650$ bulunur.

Alıştırma 9.11.



Çözüm : İlk terim 125, son terim ★ ve artış miktarı 6 olduğundan,

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{\star - 125}{6} + 1 = 101$$

yazılabilir. Buna göre,

$$\frac{\star - 125}{6} = 100$$

olmalıdır. Yani, $\star - 125 = 6 \cdot 100 = 600$ veya $\star = 600 + 125 = 725$ olması gerekir.

Alıştırma 9.12.



Çözüm : Ardışık 20 sayıdan en küçüğü a ise, en büyüğü $a + 19$ olacaktır. Sorudan

$$a = \frac{a + 19 + 11}{4} \Rightarrow a = 10$$

elde edilir. Buna göre, bizden istenen toplam

$$10 + 11 + \dots + 29 = 20 \cdot \frac{10 + 29}{2} = 390$$

elde edilir.

Alıştırma 9.13.



Çözüm :

$$\left(\frac{x-9}{4} + 1\right) \left(\frac{x+9}{2}\right) = 225$$

eşitliğinden

$$(x-5)(x+9) = 4 \cdot 225 \cdot 2 = 1800 = 36 \cdot 50$$

yazılabilir ve $x = 41$ bulunur.

Alıştırma 9.14.



Çözüm : İlk gün a adım atmış olsun.

$$\frac{\text{Son sayı} - \text{İlk Sayı}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 = \frac{7500 - a}{30} + 1 = 13$$

eşitliğinden

$$7500 - a = 12 \cdot 30 \Rightarrow a = 7140$$

elde edilir. O halde, beşinci gün $7140 + 4 \cdot 30 = 7260$ adım atmıştır.

Alıştırma 9.15. AMC8-2018



Çözüm : $2^8 + 1 = 257$ ve $6^3 = 216$ olduğundan, $2^8 + 1$ ile $2^{18} + 1$ arasındaki en küçük tam küp $7^3 = 343$ olur. Şimdi de, en büyük tam küpü bulalım.

$$2^{18} = (2^6)^3 = 64^3$$

oldüğundan, $2^8 + 1$ ile $2^{18} + 1$ arasındaki tam küpler $7^3, 8^3, 9^3, \dots, 64^3$ elde edilir. Bunların sayısı da $64 - 7 + 1 = 58$ bulunur.

Alıştırma 9.16.



Çözüm :

$$2+4+6+\dots+2n = 2(1+2+\dots+n) = n(n+1)$$

olur.

$$\text{b) İlk } \frac{99-1}{2} + 1 = 50 \text{ tek sayının toplamı } 50^2 = 2500 \text{ olur.}$$

$$\text{c) İlk 50 çift sayının toplamı da } 50 \cdot 51 = 2550 \text{ olur.}$$

Ardışık Sayıların Toplamı Olarak Yazılabilme

Teleskopik Toplamlar

Ardışık terim çiftlerinin birbirini sadeleştirdiği ve sadece ilk ve sondaki belirli sayıda terimin kaldığı sonlu toplamlara teleskopik toplamlar denir. Ardışık terimlerin pay ve paydalarının birbirlerini sadeleştirdiği ve sadece baştaki ve sondaki sayılı terimlerin kaldığı çarpımlara da teleskopik çarpımlar denir.

Kesir Parçalayarak Toplam Bulma

Alıştırma 9.17.



Çözüm :

$$(m+1)+(m+2)+\dots+(m+n)=\frac{n}{2}(2m+n+1)=32$$

eşitliğine göre, $n(2m+n+1) = 64$ olmalıdır. n ve $2m+n+1$ çarpanlarından biri tek biri çift olmalıdır. Fakat, 64'ün biri tek biri çift olan tek çarpanı $1 \cdot 64$ 'tür. Bu ise $n = 1$ anlamına gelir ki, soruda 1'den fazla ardışık pozitif sayının dediği için 32 sayısı birden fazla ardışık pozitif tam sayının toplamı olarak yazılamaz.

Alıştırma 9.18.



Çözüm : Bir önceki örnekte olduğu gibi kesirler parçalanırsa

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots - \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\ &= \frac{1}{10} - \frac{1}{20} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma**9.19.****Çözüm :** Önceki örnekte olduğu gibi kesri parçalarsak

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \dots - \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \\
&= \frac{1}{10} - \frac{1}{20} \\
&= \frac{1}{20}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Gruplayıp Toplayarak Toplama Ulaşma**Alıştırma****9.20.****Çözüm :** Hem pay hem de paydadaki ifadeleri ikiyeşli gruplayalım. Kesrin pay ve paydasında sırasıyla

$$\frac{213 - 1}{2} + 1 = 107, \quad \frac{212 - 2}{2} + 1 = 106$$

sayı olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 - 3) + (5 - 7) + \dots + (209 - 201) + 213}{(2 - 4) + (6 - 8) + \dots + (210 - 212)} \\
&= \frac{-2 - 2 - 2 - \dots - 2 + 213}{\underbrace{-2 - 2 - 2 - \dots - 2}_{53 \text{ tane}}} \\
&= \frac{53 \cdot (-2) + 213}{53 \cdot (-2)} = \frac{107}{-106}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma**9.21.****Çözüm :**

$$\begin{aligned}
11 - 6 + 9 &= 14, \\
22 - 12 + 18 &= 2 \cdot 14, \\
33 - 18 + 27 &= 3 \cdot 14, \\
&\vdots \\
99 - 54 + 81 &= 9 \cdot 14
\end{aligned}$$

olduğundan, istenen toplam $14(1 + 2 + \dots + 9) = 7 \cdot 9 \cdot 10 = 630$ bulunur.

Alıştırma**9.22.****Çözüm :** Paydası aynı olan terimleri ikiyeşerli gruplarsak

$$\left(-\frac{11^2}{12} + \frac{13^2}{12}\right) = 4, \dots, \left(-\frac{19^2}{20} + \frac{21^2}{20}\right) = 4$$

olduğunu görürüz. Bunu

$$\frac{-n^2}{n+1} + \frac{(n+2)^2}{n+1} = 4$$

eşitliğinden de görebilirsiniz. Buna göre, istenen toplam

$$\frac{12^2}{11} + (20 - 12 + 1)4 = \frac{540}{11}$$

elde edilir.

Karesel Örüntülerde Toplam**Alıştırma****9.23.**

$$\text{Çözüm : a) } \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 285$$

$$\text{b) } \frac{19 \cdot 20 \cdot 39}{6} = 2470$$

$$\text{c) } 2470 - 285 = 2185$$

Alıştırma**9.24.****Çözüm :** Bizden istenen

$$(1 + 2 + 3 + \dots + 10)(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^1)$$

çarpımıdır. Buna göre,

$$\frac{10 \cdot 11}{2} \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 5^2 7^1 11^2$$

olduğundan 3 farklı asal çarpanı vardır.

Alıştırma**9.25.****Çözüm :**

$$\begin{aligned}
1^2 + 3^2 + \dots + 11^2 &= (1^2 + 2^2 + \dots + 11^2) \\
&\quad - (2^2 + 4^2 + \dots + 10^2) \\
&= \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} \\
&\quad - 2^2(1^2 + \dots + 5^2) \\
&= 506 - 4 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} \\
&= 506 - 220 \\
&= 286 \\
&= 2 \cdot 11 \cdot 13
\end{aligned}$$

olduğundan yanıt 13 olur.

Küpsel Örüntülerde Toplam

Alıştırma 9.26.



Çözüm : a) $\left(\frac{9 \cdot 10}{2}\right)^2 = 45^2 = 2025.$

b) $\left(\frac{19 \cdot 20}{2}\right)^2 = 190^2 = 36\,100.$

c) $36\,100 - 2025 = 34\,075$

Genel Terimi Parçalayarak Toplamı Hesaplama

Bazı sorularda genel terimi parçalayıp toplam formüllerini kullanarak sonuca ulaşmak mümkündür. Aşağıdaki örnekleri inceleyiniz.

Alıştırma 9.27.



Çözüm :

$$1 \cdot 3 = 1 \cdot (1 + 2) = 1^2 + 2 \cdot 1$$

$$2 \cdot 4 = 2 \cdot (2 + 2) = 2^2 + 2 \cdot 2$$

$$3 \cdot 5 = 3 \cdot (3 + 2) = 3^2 + 2 \cdot 3$$

⋮

$$9 \cdot 11 = 9 \cdot (9 + 2) = 9^2 + 2 \cdot 9$$

biçiminde yazıp taraf tarafa toplarsak

$$S = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + 2 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 375$$

olur.

Alıştırma 9.28.



Çözüm :

$$M(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + 1,$$

$$M(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 + 1,$$

⋮

$$M(10) = 10^2 + 3 \cdot 10 + 1,$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa istenen toplam

$$= \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} + 10 = 560$$

elde edilir.

Alıştırma**9.29.****Geometrik Örüntülerde Toplam**

Çözüm : $M(n) = 20n - n^2$ şeklinde yazalım.

$$M(1) = 20 \cdot 1 - 1^2,$$

$$M(2) = 20 \cdot 2 - 2^2,$$

$$\vdots$$

$$M(10) = 20 \cdot 10 - 10^2,$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$20 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} - \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 715$$

elde edilir.

Alıştırma**9.30.**

Çözüm : $M(n) = n^2(2n + 1) = 2n^3 + n^2$ şeklinde yazabiliriz.

$$M(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2,$$

$$M(2) = 2 \cdot 2^3 + 2^2,$$

$$\vdots$$

$$M(10) = 2 \cdot 10^3 + 10^2,$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$2 \cdot \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 6435$$

elde edilir.

Alıştırma 9.31.

Çözüm : a) $1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^7 = \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 3280$

b)

$$3^5 + 3^6 + \dots + 3^{11} = 3^5 (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^6)$$

$$= 3^5 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} = 3^5 \cdot 1093$$

c)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1024} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^9} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{2^{10}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1023}{1024}$$

Alıştırma 9.32.

Çözüm : S sayısını ortak çarpan olan 3 ile çarpalım ve altına S sayısını yazalım.

$$3S = 3 + 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^8}$$

$$S = 1 + \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^9}$$

Şimdi, $3S$ 'den S 'yi taraf tarafa çıkaralım. Bu durumda, çapraz olarak sayıların birbirini götürdüğünü göreceksiniz. Böylece,

$$3S - S = 3 - \frac{1}{3^9} \Rightarrow 2S = \frac{3^{10} - 1}{3^9}$$

elde edilir. Formülü kullanarak da hesaplayabilirsiniz.

Alıştırma

9.33.



Kuatratik Örüntülerde Toplam

Çözüm : S sayısını ortak çarpan olan 3 ile çarpalım ve altına S sayısını yazalım.

$$3S = 1 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 5 \cdot 3^4 + 7 \cdot 3^5 + 9 \cdot 3^6 + 11 \cdot 3^7$$

$$S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + 7 \cdot 3^4 + 9 \cdot 3^5 + 11 \cdot 3^6$$

Şimdi, $3S$ 'den S 'yi taraf tarafa çıkaralım.

$$2S = -3 - 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^4 - 2 \cdot 3^5 - 2 \cdot 3^6 + 11 \cdot 3^7$$

$$2S = 11 \cdot 3^7 - 3 - 2 \cdot 3^2 (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4)$$

$$2S = 11 \cdot 3^7 - 3 - 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1}$$

$$2S = 11 \cdot 3^7 - 3 - 3^2 (3^5 - 1)$$

$$2S = 11 \cdot 3^7 - 3 - 3^7 + 3^2$$

$$2S = 10 \cdot 3^7 + 6 \Rightarrow 2S - 10 \cdot 3^7 = 6$$

elde edilir.

Alıştırma

9.34.



Çözüm : Tavşanların sayıları,

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & , & 3 & , & 5 & , & 9 & , & 17 & , & 33, \dots \\ & & 1 \text{ artış} & & 2 \text{ artış} & & 4 \text{ artış} & & 8 \text{ artış} & & 16 \text{ artış} \end{array}$$

biçiminde artmaktadır. Buna göre, tavşan sayıları

$$2 + (1) = 3, (1. \text{ ay sonu})$$

$$2 + (1 + 2) = 5, (2. \text{ ay sonu})$$

$$2 + (1 + 2 + 2^2) = 9, (3. \text{ ay sonu})$$

$\vdots$

$$2 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8) = ? (9. \text{ ay sonu})$$

olacaktır. Buradan, 9. ay sonunda

$$2 + (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8) = 2 + \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 513$$

tavşanı olur.

Aıştırma 9.35.

					N
17	18	19	20	21	
16	15	14	13		
5	6	7	12		
4	3	8	11		
1	2	9	10		

Çözüm : Artış miktarı 2'nin katları olarak devam etmektedir.

1.Terim: 1

2.Terim: $1 + 2 \cdot 1$

3.Terim: $1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2$

⋮

10.Terim: $1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot 9$

Bizden istenen bunların toplamıdır. Bunları toplarsak

$$S = 10 + 2(9 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + \dots + 1 \cdot 9)$$

$$= 10 + 2 \cdot 2 \cdot (9 + 16 + 21 + 24) + 2 \cdot 25 = 340$$

elde edilir.

Toplam Sembölü**Aıştırma 9.36.**

Çözüm : Toplam sembolünü açarsak ve $\spadesuit(a) = a^2 + 1$ olduğunu kullanırsak

$$\begin{aligned} \sum_{k=3}^5 \spadesuit(k) &= \spadesuit(3) + \spadesuit(4) + \spadesuit(5) \\ &= (3^2 + 1) + (4^2 + 1) + (5^2 + 1) \\ &= 53 \end{aligned}$$

elde edilir.

Aıştırma 9.37.

Çözüm : Aslında bizden istenen

$$\sum_{k=1}^{25} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 25^2$$

$$\sum_{k=4}^{25} k^2 = 4^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + 25^2$$

$$\text{olduğundan } \sum_{k=1}^{25} k^2 - \sum_{k=4}^{25} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

olur.

Aıştırma 9.38.

Çözüm :

$$\sum_{k=1}^5 (-1)^k k^2 = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 = -15$$

Alıştırma 9.39.**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^9 k^2 + 3k &= (1^2 + 2^2 + \dots + 9^2) \\
&+ 3(1 + 2 + \dots + 9) \\
&= \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} + 3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} \\
&= 285 + 135 = 420
\end{aligned}$$

Alıştırma 9.40.**Çözüm :**

$$\sum_{k=1}^9 (2k + 1) k$$

olur.

Alıştırma 9.41.**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} (2k + 1) k &= 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \\
&= 2 \left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} \right) + \frac{10 \cdot 11}{2} \\
&= 825
\end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 9.42.**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{10} 3^k &= 3^1 + 3^2 + \dots + 3^{10} \\
&= 3(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9) = 3 \cdot \frac{3^{10} - 1}{2} \\
&= \frac{3^{11} - 3}{2} = \frac{3^m - 3}{2}
\end{aligned}$$

eşitliğinden $m = 11$ olur.**İlginç Soru Çözümleri****Alıştırma 9.43.**

Çözüm : $S(001) + S(002) + \dots + S(009) = 45$
olduğu göz önüne alınırsa

$$S(011) + S(012) + \dots + S(019) = 45 + 10$$

$$S(021) + S(022) + \dots + S(029) = 45 + 20$$

⋮

$$S(091) + S(092) + \dots + S(099) = 45 + 90$$

ise

$$S(001) + S(002) + \dots + S(099) = 450 + 450 = 900$$

olur bulunur. $S(100) + S(101)$ değerleri de hesaba
katılırsa yanıt **903** olur.

Alıştırma 9.44.**Çözüm :** Her

rakam her basamakta eşit sayıda bulunur. Yani $\frac{60}{5} = 12$
kez bulunur. Buna göre,

$$12(1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 180$$

olduğundan,

1	2	3
1	2	4
⋮	⋮	⋮
5	4	3
180	180	180

yazılabilir. Bu sayı da

$$180 + 180 \cdot 10 + 180 \cdot 100 = 19\,980$$

değerine eşittir.

Aıştırma

9.45.



Çözüm : İstenen şekildeki sayı $n = ABC$ olsun.

$$A + B + C = 5$$

olmasını istiyoruz.

$A = 1$ ise $B + C = 4$ olur ve 5 sayı vardır.

$$(B, C) \in \{(0, 4); (1, 3); (2, 3); (3, 1); (4, 0)\}$$

$A = 2$ ise $B + C = 3$ olur ve 4 sayı vardır.

$$(B, C) \in \{(0, 3); (1, 2); (2, 1); (3, 0)\}$$

$A = 3$ ise $B + C = 2$ olur ve 3 sayı vardır.

$$(B, C) \in \{(0, 2); (1, 1); (2, 0)\}$$

$A = 4$ ise $B + C = 1$ olur ve 2 sayı vardır.

$$(B, C) \in \{(0, 1); (1, 0)\};$$

$A = 5$ ise $B + C = 0$ olur ve 1 sayı vardır.

$$(B, C) = (0, 0)$$

Sonuç olarak istenen şekilde

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

sayı vardır.

Aıştırma

9.46.



Çözüm : 2 elemanlı ardışık alt kümeler

$$\{1, 2\}; \{2, 3\}; \{3, 4\}; \dots; (99, 100)$$

olmak üzere 99 tanedir. 3 elemanlı ardışık alt kümeler

$$\{1, 2, 3\}; \{2, 3, 4\}; \{3, 4, 5\}; \dots; (98, 99, 100)$$

olmak üzere 98 tanedir. 4 elemanlı ardışık alt kümeler

$$\{1, 2, 3, 4\}; \{2, 3, 4, 5\}; \dots; (97, 98, 99, 100)$$

olmak üzere 97 tanedir. Bu şekilde devam edersek 100 elemanlı 1 tane ardışık alt küme olduğundan toplam

$$1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$$

ardışık alt küme vardır.

KONU SONU TESTİ (Toplamlar)(Çözümler)

Test 9.1 AMC8-2017



A) 1000 B) 258 C) 552 D) 226 E) 1120

Çözüm : Kesrin paydası

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{8 \cdot 9}{2} = 4 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 6$
olduğundan,

$$\frac{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{6}} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{1} = 1120$$

elde edilir.

Test 9.2 AJHSME-1994



A) 10 B) 25 C) 12 D) 11 E) 20

Çözüm : Tüm paydalar zaten eşit. Kesirlerin payındaki sayıları toplarsak

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 55 = \frac{9 \cdot 10}{2} + 55 = 100$$

olur ve sonuç

$$\frac{100}{10} = 10$$

elde edilir.

Test 9.3



A) 41 ve 42 B) 43 ve 44 C) 37 ve 39 D) 39 ve 40 E) 42 ve 43

Çözüm : $1 + 2 + \dots + 49 + 50 = 1275$ olduğundan, koparılmış sayfaların numaralar toplamı

$$1275 - 1171 = 104$$

olur. 1 numaralı yaprağın sayfa numaraları toplamı

$1 + 2 = 3$, 2 numaralı yaprağın sayfa numaraları toplamı

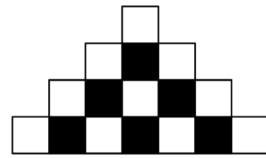
$3 + 4 = 7$, 3 numaralı yaprağın sayfa numaraları toplamı

$5 + 6 = 11$ olduğundan, 4. yaprağın sayfa numaraları toplamı

$$104 - 3 - 7 - 11 = 83$$

olmalıdır. $a + a + 1 = 83$ eşitliğinden $2a = 82$ ve $a = 41$ olur. O halde, 4. yapraktaki sayfa numaraları 41 ve 42 olur.

Test 9.4 AJHSME-1994



A) 1110 B) 1176 C) 1225 D) 1224 E) 1175

Çözüm : 49 katlı her satırında satır numarası kadar beyaz kare vardır. 49-uncu sırada 49 beyaz kare vardır. Buna göre, beyaz kare sayısı :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 49 = \frac{49 \cdot 50}{2} = 1225$$

olur. Siyah kare sayısını bulalım. Herhangi sırada siyah kare sayısı beyaz kare sayısından bir eksiktir. 49 satır var ise,

$$1225 - 49 = 1176$$

siyah kare var demektir. Bunu toplayarak da hesaplayabiliriz.

$$1 + 2 + 3 + \dots + 48 = \frac{48 \cdot 49}{2} = 1176$$

olur.

Test 9.5

- A) 100 B) 109 C) 102 D) 101 E) 107

Çözüm : Bir basamaklıkların toplamı

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

İki basamaklı olanların rakamları toplamı,

$$10, 11, 12, \dots, 19$$

sayılarında birler basamağındaki rakamların toplamı zaten 45 ve 10 kez de onlar basamağında 1 olduğundan $10 + 45 = 55$ olur. Son olarak, 20, 21, 22 sayılarındaki rakamlar da hesaplanırsa

$$45 + 55 + 2 + 3 + 4 = 109$$

bulunur.

Test 9.6

- A) 5000 B) 2500 C) 5500 D) 4500 E) 4950

Çözüm : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ..., 99, 99, ..., 99 sayı
99 tane 9

örüntüsünde

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$$

terim vardır. Buna göre, 50-nci 100 sayısı sayısı $4950 + 50 = 5000$ -inci terimdir.

Test 9.7

- A) 335 B) 257 C) 337 D) 327 E) 326

Çözüm : $2^{1+2+3+\dots+100} = 2^{5(3n-1)}$ eşitliğinden,

$$1 + 2 + \dots + 100 = 5(2n - 1) \Rightarrow \frac{100 \cdot 101}{2} = 5(3n - 1)$$

yazılabilir. Buradan da $n = 337$ bulunur.

Test 9.8

- A) 175 B) 178 C) 177 D) 167 E) 176

Çözüm :

$$a_1 = 11$$

$$a_2 = a_1 + 3$$

$$a_3 = a_2 + 6$$

$$a_4 = a_3 + 9$$

$$\vdots$$

$$a_{11} = a_{10} + 30$$

biçiminde yazalım. Taraf tarafa toplarsak

$$a_{11} = 11 + 3(1 + 2 + \dots + 10) = 11 + 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} = 176$$

elde edilir.

Test 9.9 AMC8-2016

- A) 20200 B) 19802 C) 19801 D) 20201 E) 20202

Çözüm :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & , & 5 & , & 13 & , & 25 & , & 41 & , & 61, \dots \\ \text{artış } 4 & & \text{artış } 8 & & \text{artış } 12 & & \text{artış } 16 & & \text{artış } 20 \end{array}$$

örüntüsünde,

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = a_1 + 4$$

$$a_3 = a_2 + 4 \cdot 2$$

$$a_4 = a_3 + 4 \cdot 3$$

$$\vdots$$

$$a_{101} = a_{100} + 4 \cdot 100$$

yazılabilir. Bunlar taraf tarafa toplarsa

$$\begin{aligned} a_{101} &= 1 + 4(1 + 2 + 3 + \dots + 100) \\ &= 1 + 2(100 \cdot 101) = 20201 \end{aligned}$$

bulunur.

Test

9.10

AMC8-2015



- A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

Çözüm : Ardışık 4 tek sayıyı n tek sayı olmak üzere

$$n, n + 2, n + 4, n + 6$$

biçiminde yazabiliriz. Bunların toplamı da $4n + 12$ olur. n tek sayı olmak üzere $4n + 12$ olarak yazılamayan tek cevap seçeneği 100'dür. Çünkü, $100 - 12 = 88$, $88 \div 4 = 22$ tek değildir. Diğerlerinin sağlandığını görebilirsiniz.

Test

9.12

UOMO-B-2016



- A) 630 B) 642 C) 641 D) 641 E) 640

Çözüm : Ardışık 3 pozitif tam sayının toplamı olarak yazılabilen ilk sayı

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

ikinci sayı

$$2 + 3 + 4 = 9,$$

ve 19-uncu sayı ise

$$19 + 20 + 21 = 60$$

olur. Buna göre, ilk 19 sayının toplamı

$$\begin{aligned} 6 + 9 + \dots + 60 &= 3(1 + 2 + \dots + 20) \\ &= 3 \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} \\ &= 630 \end{aligned}$$

bulunur.

Test

9.11

AMC8-2016



- A) 424 B) 402 C) 421 D) 324 E) 254

Çözüm : Çok fazla sayıda ardışık sayıların toplamı söz konusu olduğunda ortadaki bir değere n demek işleri kolaylaştırır. Tam ortadaki sayı 13-üncü sayıdır. Bu sayıya n dersek, 12 tanesi bu sayıdan küçük olan,

$$n - 2, n - 4, \dots, n - 24$$

çift sayıları, 12 tanesi de n sayısından büyük olan

$$n + 2, n + 4, \dots, n + 24$$

çift sayılardır. Bunları toplarsak,

$$25n = 10000$$

elde edilir. Yani $n = 400$ bulunur. O halde bu sayıların en büyüğü $400 + 24 = 424$ bulunur.

Test

9.13

AMC8-2015



- A) 441 B) 361 C) 576 D) 444 E) 400

Çözüm : İlk olarak 20. gün kaç cihaz sattığını bulmalıyız. Artış miktarı 2 olduğundan,

$$\begin{aligned} 20. \text{ terim} &= 1. \text{ Terim} + (20 - 1) \cdot (\text{Artış Miktarı}) \\ &= 1 + 19 \cdot 2 = 39 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, 20 gün sonunda

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 39 = 20 \cdot \frac{39 + 1}{2} = 400$$

cihaz satar.

Test

9.14 UAMO-1999



A) 11 B) 2 C) 7 D) 3 E) 4

Çözüm : Ardışık n terimin toplamı 1770 olsun.

$$(a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + n) = 1770 = 2 \cdot 5 \cdot 177$$

$$n \cdot \left(\frac{a + n + a + 1}{2} \right) = 2 \cdot 5 \cdot 177$$

$$n \cdot (2a + n + 1) = 4 \cdot 5 \cdot 177$$

eşitliği elde edilir. Sol taraftaki çarpanların biri tek biri çift sayıdır ve $2a + n + 1 > n$ olmalıdır. Buna göre, $n = 4$ veya $n = 5$ olabilir. Yanıt : 4. $n = 4$ iken ardışık 4 terim $441 + 442 + 443 + 444 = 1770$ olacaktır.

Test

9.15 UAMO-2000



A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

Çözüm : $n \geq 2$ olmak üzere,

$$(a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + n) = 369$$

$$n \left(\frac{2a + n + 1}{2} \right) = 369$$

eşitliğinden $n(2a + n + 1) = 2 \cdot 3^2 \cdot 41$ olur. Sol taraftaki çarpanların biri tek biri çift olmalıdır ve $n < 2a + n + 1$ olmalıdır. Buna göre, $n = 2, n = 3, n = 6, n = 9, n = 18$ olabilir. 369 sayısı birkaç ardışık doğal sayının toplamı olarak 5 farklı şekilde yazılabilir.

Test

9.16 UAMO-2024



A) 1371 B) 1366 C) 1361 D) 1356 E) 1346

Çözüm : 101 sayısından sonra artış miktarları :

$$5, 10, 15, \dots, 22 \cdot 5 = 110$$

olacaktır. Buna göre, 22-inci öğrenci

$$= 101 + 5 + 10 + \dots + 110$$

$$= 101 + 5(1 + 2 + \dots + 22)$$

$$= 101 + 5 \cdot \frac{22 \cdot 23}{2}$$

$$= 1366$$

Test

9.17 UAMO-2000



A) 6271 B) 6661 C) 6111 D) 6161 E) 6171

Çözüm :

$$x = 11^2 - 12^2 + 13^2 - 14^2 + 15^2 - \dots - 110^2 + 111^2$$

$$= 11^2 + (-12^2 + 13^2) + \dots + (-110^2 + 111^2)$$

$$= 11^2 + 25 + 29 + \dots + 221$$

$$= 121 + \frac{25 + 221}{2} \cdot 50 = 6271$$

elde edilir.

Test 9.18

- A) $\frac{1}{7}$ B) $\frac{5}{7}$ C) $\frac{2}{7}$ D) $\frac{3}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

Çözüm :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{20 \cdot 21} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{20} - \frac{1}{21} \\
 &= \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 9.19

- A) 385 B) 285 C) 386 D) 290 E) 296

Çözüm :

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} = 285$$

Test 9.20 UOMO - 1999

- A) 931 B) 959 C) 836 D) 945 E) 926

Çözüm : 100-üncü terim hangi sayılardan oluşuyor. Önce bunu belirleyelim.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2} \simeq 100$$

olacak şekilde k değerini bulalım. $k = 13$ olursa $\frac{13 \cdot 14}{2} =$ 91 ve $k = 14$ olursa $\frac{14 \cdot 15}{2} = 105$ bulunur. Yani, son $100 - 91 = 9$ terim 14'tür.1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, ..., 13, 13, ..., 13, 14, ..., 14
9 tane

Böylece, bunların toplamı

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 13^2 + 9 \cdot 14 = \frac{13 \cdot 14 \cdot 27}{6} + 126 = 945$$

bulunur.

Test 9.21 UOMO - 2004

- A) 1 B) 9 C) 6 D) 5 E) 0

Çözüm :

$$S = \frac{99 \cdot 100 \cdot 199}{6} = 33 \cdot 50 \cdot 199$$

çarpımının son rakamı 0'dır.

Test 9.22

- A) 31 B) 29 C) 36 D) 26 E) 23

Çözüm : İstenen toplam

$$\begin{aligned}
 T &= 1^2 + 2^2 + \cdots + 11^2 - (2^2 + 4^2 + 6^2 \cdots + 10^2) \\
 &= \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} - 2^2 (1^2 + 2^2 + \cdots + 5^2) \\
 &= \frac{11 \cdot 12 \cdot 23}{6} - 4 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6} \\
 &= 11 \cdot 2 \cdot 13
 \end{aligned}$$

olduğundan, $11 + 2 + 13 = 26$ elde edilir.

Test 9.23

- A) $\frac{227}{33}$ B) $\frac{227}{11}$ C) $\frac{227}{22}$ D) $\frac{227}{99}$ E) $\frac{227}{66}$

Çözüm :

$$13^2 + 14^2 + \dots + 17^2 = \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{6} - \frac{12 \cdot 13 \cdot 25}{6}$$

$$= 17 \cdot 3 \cdot 35 - 2 \cdot 13 \cdot 25$$

$$= 5 \cdot 227$$

ve $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$ değeri

$$= (1^2 + 2^2 + \dots + 9^2) - (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2)$$

$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} - 2^2 (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot 19 - 4 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}$$

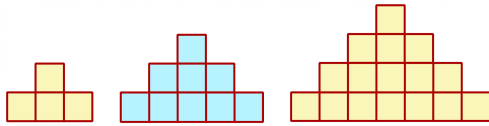
$$= 3 \cdot 5 \cdot 19 - 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3$$

$$= 3 \cdot 5 \cdot (19 - 8) = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

olduğundan

$$\frac{13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2 + 17^2}{1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2} = \frac{5 \cdot 227}{3 \cdot 5 \cdot 11} = \frac{227}{33}$$

elde edilir.

Test 9.24

- A) 451 B) 461 C) 466 D) 463 E) 453

Çözüm : Örüntüyü kullarılan küp blok sayısına göre sayısal olarak ifade edelim. Örüntü

$$4, 9, 16, 25, 36, \dots$$

biçimindedir. O halde, 10'inci adımda $11^2 = 121$ birim kare çizilir. İlk 10 adımı tamamlandığında

$$2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 10^2 + 11^2$$

birim kare kullanılır. Bunu da hesaplırsak

$$\frac{11 \cdot 12 \cdot 21}{6} - 1 = 461$$

bulunur.

Test 9.25 UOMO-B-2017

- A) $\frac{n^3}{2}$ B) $2n^3$ C) n^3 D) $n^3 - 1$ E) $n^3 + 1$

Çözüm :

$$A = (1 + 2 + \dots + n^2) - (1 + 2 + \dots + n - 1)$$

$$= \frac{n^2 (n^2 + 1)}{2} - \frac{(n - 1) n}{2}$$

$$= \frac{n^4 + n^2 - n^2 + n}{2}$$

$$= \frac{n (n^3 + 1)}{2}$$

olduğundan $2A = n (n^3 + 1) \Rightarrow \frac{2A}{n} - 1 = n^3$ bulunur.**Test 9.26**

- A) 53 B) 71 C) 83 D) 19 E) 23

Çözüm :

$$T = (1^3 + 2^3 + \dots + 18^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + 12^3)$$

şeklinde yazalım. Buradan,

$$T = \left(\frac{18 \cdot 19}{2} \right)^2 - \left(\frac{12 \cdot 13}{2} \right)^2 = 171^2 - 78^2$$

$$= (171 - 78) (171 + 78) = 93 \cdot 249$$

$$= 3 \cdot 31 \cdot 3 \cdot 83$$

olduğundan en büyük asal çarpan 83 olarak bulunur.

Test 9.27

- A) 2626 B) 2266 C) 2226 D) 2662 E) 2622

Çözüm :

$$S = 1^2 + 2^2 + \dots + 18^2 + 3 (1 + 2 + \dots + 18)$$

$$= \frac{18 \cdot 19 \cdot 37}{6} + 3 \cdot \frac{18 \cdot 19}{2}$$

$$= 2622$$

olur.

Test 9.28

- A) 935 B) 771 C) 770 D) 955 E) 915

Çözüm : Her bir terimi $A(n) = n(2n + 3)$ biçiminde yazabiliriz. O halde, bizden istenen

$$S = A(1) + A(2) + \dots + A(10)$$

toplamıdır.

$$A(n) = n \cdot (2n + 3) = 2n^2 + 3n$$

biçiminde yazalım. O halde,

$$A(1) = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1,$$

$$A(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2,$$

$$A(3) = 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3,$$

...

$$A(10) = 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10$$

eşitliklerini toplarsak

$$\begin{aligned} S &= 2(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) + 3(1 + 2 + \dots + 10) \\ &= 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + 3 \cdot \frac{10 \cdot 11}{2} \\ &= 770 + 165 = 935 \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 9.29

- A) 1201 B) 1210 C) 1230 D) 1209 E) 1211

Çözüm : Verilen toplam $n = 1$ 'den 10 'a kadar

$$A(n) = (11 - n)n^2 = 11n^2 - n^3$$

değerlerinin toplamıdır. O halde,

$$S = 11(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) - (1^3 + 2^3 + \dots + 10^3)$$

$$S = 11 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - \left(\frac{10 \cdot 11}{2} \right)^2$$

$$S = 11^2 \cdot 5 \cdot 2 = 1210$$

bulunur.

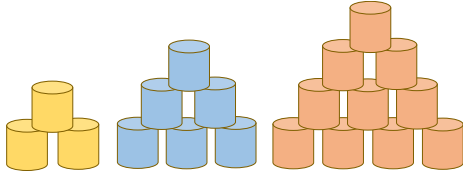
Test 9.30

- A)
- $\frac{255}{254}$
- B)
- $\frac{1023}{1022}$
- C)
- $\frac{511}{510}$
- D)
- $\frac{511}{1024}$
- E)
- $\frac{257}{510}$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{10}}{2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{10}} &= \frac{2^2(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^8)}{2^3(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7)} \\ &= \frac{2^2(2^9 - 1)}{2^3(2^8 - 1)} = \frac{511}{510} \end{aligned}$$

Test 9.31



- A) 221 B) 210 C) 217 D) 219 E) 211

Çözüm : Örüntüyü kullarılan konserve sayısına göre sayısal olarak ifade edelim. Örüntü

$$3, 6, 10, 15, 21, \dots$$

3 artış 4 artış 5 artış 6 artış

şeklinde. Bu bir karesel örüntüdür ve genel terimi $n = 2, 3, \dots$ için

$$A(n) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n)$$

biçimindedir. Bu sayılar üçgensel sayılar olarak da bilinir. 9'uncu adım bittiğinde kullarılan konserve sayısını bulalım.

$$A(2) = \frac{1}{2}(2^2 + 2) \quad (1. \text{ adım})$$

$$A(3) = \frac{1}{2}(3^2 + 3) \quad (2. \text{ adım})$$

$$A(4) = \frac{1}{2}(4^2 + 4) \quad (3. \text{ adım})$$

$\vdots$

$$A(10) = \frac{1}{2}(10^2 + 10) \quad (9. \text{ adım})$$

olacaktır. Bunların toplamı da

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 + 2 + 3 + \dots + 10) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} - 1 + \frac{10 \cdot 11}{2} - 1\right) \\ &= 219 \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 9.32 UOMO-B-2017



- A) 4 B) 3 C) 7 D) 9 E) 5

Çözüm : Bir basamaklı tek sayıların tekrarıyla

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

basamaklı bir sayı elde edilir. Bundan sonra tekrar eden tek sayılar 2 veya daha fazla basamaklıdır. Buna göre,

$$2(11 + 13 + \dots + k) + 25 < 1000$$

olacak şekilde en küçük k tek sayısını bulmalıyız. $k = 43$ için

$$2(11 + 13 + \dots + 43) + 25 = 2 \cdot 17 \cdot \frac{43 + 11}{2} + 25$$

$$= 943$$

Test 9.33 AMC10B-2022



- A) 289 B) 400 C) 300 D) 361 E) 411

Çözüm : Aritmetik örüntü

$$a, a + 2, a + 4, a + 6, a + 8, a + 10, \dots$$

biçimindedir. $\frac{S(3n)}{S(n)}$ değeri n 'den bağımsız ise,

$$\frac{S(3)}{S(1)} = \frac{S(6)}{S(2)} \Rightarrow \frac{3a + 6}{a} = \frac{6a + 30}{2a + 2}$$

eşitliği sağlanmalıdır. Bu eşitlikte içler dışlar çarpımı yapılırsa

$$6a^2 + 6a + 12a + 12 = 6a^2 + 30a$$

eşitliğinden

$$6a = 6 \Rightarrow a = 1$$

bulunur. O halde,

$$S_{20} = 1 + 3 + 5 + \dots + 39 = 20^2 = 400$$

elde edilir.

Test 9.34 AMC10A-2022

A) 2021 B) 2010 C) 2023 D) 2019 E) 2022

Çözüm :

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2021}{2022!} = 1 - \frac{1}{2022!}$$

elde edilir. O halde, $a = 1$ ve $b = 2022$ olduğundan $a + b = 2023$ olur.**Test 9.35**

A) 1600 B) 680 C) 576 D) 675 E) 375

Çözüm :

$$n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) = 5n+10 = x^3$$

$$(n+1) + (n+2) + (n+3) = 3n+6 = y^2$$

eşitliklerinden

$$5(n+2) = x^3 \Rightarrow n+2 = 25k^3,$$

olması gerekir. Diğer yandan,

$$3n+6 = y^2 \Rightarrow 3(n+2) = y^2 \Rightarrow 3 \cdot 25 \cdot k^3 = y^2$$

için en küçük $k = 3$ alınmalıdır. Böylece,

$$n+2 = 25 \cdot 3^3 = 675$$

olur.

Test 9.36 UAMO-2003

A) 16 B) 10 C) 12 D) 11 E) 9

Çözüm :

$$1 + 3 + 5 + \dots + 97 + 99 = 50^2 = 2500$$

toplamında, bazı "+" işaretleri "-" işareti ile değiştirildikten sonra ortaya çıkan yeni ifadede "+" olanların toplamı x ise "-" olanların toplamı da $2500 - x$ olmalıdır. "+" işareti "-" işareti ile değiştirildikten sonra sonuç 700 ise

$$x - (2500 - x) = 700 \Rightarrow 2x = 3200 \Rightarrow x = 1600$$

olur. En az "-" işareti kullanmak için, en küçük sayıların önündeki "+" işaretleri kalmalıdır.

$$1600 = 40^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + 77 + 79$$

olduğuna göre, geriye kalan 81, 83, ..., 97, 99 (toplam 10 sayı) sayılarının önüne "-" işareti konulmalıdır.

Test 9.37 UAMO-2002

A) 106 B) 100 C) 103 D) 102 E) 104

Çözüm : $1 + 2 + \dots + 99 + 100 = 5050$ olduğundan, koparılmış sayfaların numaralar toplamı

$$5050 - 4946 = 104$$

olur. a numaralı yaprağın sayfa numaralarının toplamı $(2a - 1) + 2a = 4a - 1$ 'dir. Bundan dolayı, koparılan her yaprak için 5050'den $4a - 1$ formunda bir sayı çıkarılmalıdır. $a_1, a_1, \dots, a_k$ numaralı yapraklar koparılmışsa, sayfa numaralarının toplamı

$$S = (4a_1 - 1) + (4a_2 - 1) + \dots + (4a_k - 1)$$

$$= 4(a_1 + a_2 + \dots + a_k) - k$$

azalır. Bu değer $S = 104$ olmasını istiyoruz.

$$4(a_1 + a_2 + \dots + a_k) - k = 104$$

k sayısı 4, 8, 12, ... şeklinde 4'ün bir katı olmalıdır. $k = 8$ olursa, yani 8 yaprak koparılmışsa en az

$$4(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) - 8 = 136$$

sayfa azalır. O halde, $k = 4$ olmalı, yani 4 sayfa koparılmalıdır. Örneğin, 1., 2., 3. ve 21.

yapraklar koparılmışsa, sayfa numaraları toplamı :

$$(1 + 2) + (3 + 4) + (5 + 6) + (41 + 42) = 104 \text{ olur.}$$

Test 9.38

- A) 50 B) 200 C) 25 D) 400 E) 100

Çözüm : $3^x = a$ diyelim. Bu durumda,

$$3^{-x} = \frac{1}{a} \text{ ve } 9^x = a^2$$

olacaktır. Bune göre eşitliği tekrar yazarsak

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} + \frac{1}{1 + a + \frac{1}{a}} + \frac{1}{1 + a + a^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2 + a + 1} + \frac{a}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{1 + a + a^2} \\ &= \frac{a^2 + a + 1}{a^2 + a + 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, istenen toplam 100 bulunur.

Test 9.39

- A) 3^9 B) 3^{10} C) 3^1 D) 3^2 E) 3^3

Çözüm : S' 'nin 3 katından S' 'yi çıkaralım.

$$S = 3^3 + 3^4 + 3^5 + \dots + 3^9 + 3^{10}$$

$$\frac{S}{3} = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^8 + 3^9$$

çıkarılırsa

$$\text{Fark} = 3^{10} - 3^2 \Rightarrow \text{Fark} + 9 = 3^{10}$$

olur. Yanıt B.

Test 9.40 UAMO-2007

- A) 1152 B) 385 C) 770 D) 1155 E) 1150

Çözüm : İstenen toplam,

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7}\right) \left(1 + \frac{1}{11}\right) \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{12}{11} \\ &= \frac{1152}{385} \end{aligned}$$

sayısıdır. Kesrin payı 1152 olur.

BÖLÜNEBİLME

Kalanlı Bölme

Alıştırma 10.1.



Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 41 & A \\ - & B \\ \hline ??? & 6 \end{array}$$

eşitliğine göre,

$$41 = A \cdot B + 6 \Rightarrow A \cdot B = 35$$

olacaktır. Buna göre, $A > 6$ olduğu da göz önüne alınırsa $A = 35$ ve $A = 7$ olabilir.

Alıştırma 10.2. UOMO -2009



Çözüm : 83 ve 102 sayılarının ikisinin de n pozitif tam sayısına bölümünden kalan k ise, $B, C \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere,

$$83 = n \cdot B + k \text{ ve } 102 = n \cdot C + k$$

yazılabilir. Buradan,

$$102 - 83 = 19 = n(C - B)$$

eşitliğine göre, $n = 19$ olmalıdır. Buradan, 83 sayısı 19 ile bölünürse kalan 7 elde edilir. Bizden istenen 19 sayısının 7 ile bölümünden kalandır ve yanıt 5 bulunur.

Alıştırma 10.3.



Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} 40! & 38! - n \\ - & 39 \cdot 40 \cdot n \\ \hline 39 \cdot 40 \cdot n & 39 \cdot 40 \end{array}$$

olduğundan,

$$39 \cdot 40 \cdot n = \frac{10 \cdot 39 \cdot 40}{2} \Rightarrow n = 5$$

elde edilir.

Alıştırma 10.4.



Çözüm :

$$11, 22, 33, 44, 55, 66, \dots$$

sayılarından 7 ile bölümünden 2 kalanını veren en küçük sayı 44'tür. O halde, diğer sayılar bu sayıya $11 \cdot 7 = 77$ ekleyerek bulunabilir.

$$44 + 77 = 121$$

koşulu sağlayan üç basamaklı en küçük sayıdır.

Alıştırma

10.5. UOMO -2003



Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} AB & A+B \\ - & C \\ \hline & K \\ ??? & \end{array}$$

işlemine göre,

$$10A + B = C(A + B) + K \text{ ve } K < A + B$$

dir. En büyük kalanı bulmak için, $A + B$ 'yi en büyük seçmeye çalışalım. Buna göre, A ve B rakam olduğundan,

$$\text{i) } A + B = 18 \text{ ise } A = B = 9 \text{ ve } K = 9 \text{ olur.}$$

$$\text{ii) } A + B = 17 \text{ ise, } 98 = 17 \cdot 5 + 13 \text{ iken } K = 13 \text{ ve } 89 = 17 \cdot 5 + 4 \text{ iken } K = 4 \text{ olur.}$$

$$\text{iii) } A + B = 16 \text{ ise, } 88 = 16 \cdot 5 + 8 \text{ iken } K = 8, \\ 97 = 16 \cdot 6 + 1 \text{ iken } K = 1, 79 = 16 \cdot 4 + 15 \text{ iken } K = 15 \text{ olur.}$$

Bundan sonraki tüm kalanlar 15'ten küçük olacağından en büyük kalan 15 bulunur.

Alıştırma

10.7.



Çözüm : $A = 8k + 3$ ve $B = 8m + 4$ yazılabilir. Buradan,

$$A + B = 8k + 8m + 7$$

$$= 8(k + m) + 7 \quad (k + m = n \text{ dersek})$$

$$= 8n + 7$$

yazılabilir. $A + B$ sayısının 6 ile bölümünden kalanları inceleyelim.

$$n = 0 \text{ için kalan } 1,$$

$$n = 1 \text{ için kalan } 3,$$

$$n = 2 \text{ için kalan } 5,$$

$$n = 3 \text{ için yine } 1 \text{ kalanı verir.}$$

Yani sadece 1, 3 ve 5 kalanları elde edilebilir.

Alıştırma

10.6.



Çözüm : 11 ile bölümünden kalan 3 olan sayıları sırayla yazalım ve 9 ile bölündüğünde 5 kalanını veren en küçük sayıyı bulalım.

$$3, 14, 25, 36, 47, 58, \dots$$

O halde, iki koşulu da sağlayan en küçük sayı 25 olduğundan,

$$n = 11 \cdot 9k + 25$$

formundadır. Koşulu sağlayan en küçük üç basamaklı sayı $25 + 99 = 124$ elde edilir.

Alıştırma

10.8.



$$\begin{array}{r|l} 440 & A \\ - & B \\ \hline & K \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 478 & A \\ - & C \\ \hline & K \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 763 & A \\ - & D \\ \hline & K \end{array}$$

Çözüm : 440, 478, 763 sayılarının üçünüde A sayısına böldüğümüzde kalan aynı ise bunların herhangi ikisinin farkı A sayısına tam bölünmelidir. İkişerli farklara bakarsak

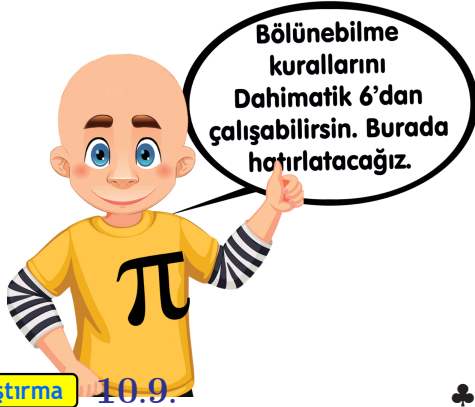
$$478 - 440 = 38 = 2 \cdot 19,$$

$$763 - 478 = 285 = 3 \cdot 5 \cdot 19,$$

$$763 - 440 = 323 = 17 \cdot 19$$

olduğundan A sayısının 19 olması gerektiği görülür. O halde, 440 sayısı 19 ile bölünürse kalan 3 elde edilir. Yani, $K = 3$ olur.

Bölünebilme Kuralları



Alıştırma 10.9.



Çözüm : a) $A \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ b) $B \in \{1, 5, 9\}$ c) $B \in \{2, 7\}$ d) $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + D + 4 = D + 16$ olduğundan $D \in \{1, 4, 7\}$ e) Rakamları toplamı $E + 16$ olduğundan $E \in \{4\}$ f) $-1 + 1 - 2 + 2 - 3 + 3 - F + 4 = 4 - F$ olduğundan $F \in \{2\}$ g) $(3 \cdot 1 + 1 \cdot 1) - (2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 3) + (2 \cdot 3 + 3 \cdot G + 1 \cdot 4) = 3G + 1$ olduğundan, $3G + 1 = 16$ için $G = 5$ elde edilir.

Alıştırma 10.10.



Çözüm :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

eşitliğine göre, n , $n+1$ veya $2n+1$ sayılarından birinin 7'nin katı olması gerekir. $n = 10$ alınırsa $2n+1 = 21$ olduğundan verilen toplam 7 ile tam bölünür.

Alıştırma 10.11.



Çözüm : İlk n tek sayının toplamının n^2 olduğunu hatırlayınız. Burada $\frac{1999-1}{2} + 1 = 1000$ sayı olduğundan,

$1 + 3 + 5 + \dots + 1999 = 1000^2 = 1000000$ olur ve 9 ile bölümünden kalan 1 bulunur.

Alıştırma 10.12.



Çözüm : Eşitliğin sol tarafı 9 ile bölünebildiği için sağ tarafı da bölünebilmelidir. Buna göre,

$$1 + 2 + 9 + 9 + 0 + A + 8 = A + 29$$

sayısının 9'un katı olması için $A = 7$ olması gerekir.

Alıştırma 10.13.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (10^{77} - 1) &= \frac{2}{3} \underbrace{999\dots999}_{77 \text{ tane } 9} \\ &= 2 \cdot \underbrace{333\dots333}_{77 \text{ tane } 1} \\ &= \underbrace{666\dots666}_{77 \text{ tane } 6} \end{aligned}$$

olduğundan, bu sayının 9 ile bölümünden kalan $6 \cdot 77 = 462$ sayısının 9 ile bölümünden kalana eşittir. Bu da, $4 + 6 + 2 = 12$ sayısının 9 ile bölümünden kalana yani 3'e eşittir.

Alıştırma 10.14.**Çözüm :**

$$\frac{10^{11} - 1}{10 - 1} = \frac{1}{9} \cdot \underbrace{999...999}_{11 \text{ tane } 9}$$

$$= \underbrace{111...111}_{11 \text{ tane } 1}$$

olduğundan, bu sayının 9 ile bölümünden kalan $11 \cdot 1 = 11$ sayısının 9 ile bölümünden kalana eşittir. Yanıt 2.

Alıştırma 10.15.**Çözüm :**

$$7 \mid AAAB \Rightarrow 7 \mid B + 3A + 2A - A = B + 4A$$

olmalıdır. Buna göre, $A \neq 0$ değerleri verelim.

$$\begin{aligned} A = 1 &\Rightarrow B = 3, & A = 2 &\Rightarrow B = 6 \\ A = 3 &\Rightarrow B = 2, 9, & A = 4 &\Rightarrow B = 5, \\ A = 5 &\Rightarrow B = 1, 8, & A = 6 &\Rightarrow B = 4, \\ A = 7 &\Rightarrow B = 0, & A = 8 &\Rightarrow B = 3, \\ A = 9 &\Rightarrow B = 6, \end{aligned}$$

olduğundan 11 sayı vardır.

Alıştırma 10.16.

Çözüm : ABCABCABCAB sayısının rakamları arasına birer atlayarak + ve - koyalım. Böylece,

$$???A-B+C-A+B-C+A-B+C-A+B$$

yazılır. Bu ifadeyi sadeleştirirsek geriye sadece C kalır. Kalan 5 ise, $C = 5$ olması gerekir. En büyük sayıyı arıyoruz.

$A = 9$ ve $B = 8$ alınabilir. Böylece, bu sayı en fazla

$$98598598598$$

olabilir.

Alıştırma 10.17. UOMO-B-2018

Çözüm : 11 ile bölünme kuralı göz önüne alınırsa

$$11 \nmid A0B \Rightarrow 11 \nmid A + B$$

$$11 \nmid A1B \Rightarrow 11 \nmid A - 1 + B,$$

$$11 \nmid A2B \Rightarrow 11 \nmid A - 2 + B,$$

$$\vdots$$

$$11 \nmid A9B \Rightarrow 11 \nmid A - 9 + B,$$

olduğundan, $A + B$ toplamı 11 ile bölündüğünde 0, 1, 2, ..., 9 kalanlarını veremez. Örneğin, 9 kalanını verseydi $11 \nmid A + B - 9$ yanlış olurdu. O halde, geriye tek seçenek kaldı $A + B$ toplamı 11 ile bölündüğünde 10 kalanını verebilir. A ve B rakamları olduğu için, $A + B = 10$ olmalıdır. Buradan, $A \cdot B$ çarpımı

$$1 \cdot 9 = 9, 2 \cdot 8 = 16, 3 \cdot 7 = 21, 4 \cdot 6 = 24,$$

olmak üzere 4 değer alabilir.

Aralarında Asal İki Sayının Çarpımına Bölünme

Alıştırma 10.18. UOMO-1999

Çözüm : $56 = 7 \cdot 8$ olduğundan 7 ve 8'e bölünebilme durumları incelenmelidir. A627B sayısının 8'e bölündüğünde 4 kalanını vermesi için, son üç rakamın oluşturduğu sayı 8'e bölündüğünde 4 kalanını vermelidir. Buna göre $B = 6$ olmalıdır. ($276 = 34 \cdot 8 + 4$). Şimdi, A6276 sayısının 7'ye bölündüğünde de 4 kalanını vermesi gerektiğinden, 7'ye bölünme kuralından,

$$(1 \cdot 6 + 3 \cdot 7 + 2 \cdot 2) - (1 \cdot 6 + 3A) = 7k + 4$$

elde edilir. Burada, $25 - 3A = 7k + 4$ eşitliğinden, $A = 0$ veya $A = 7$ elde edilir. Sayımız 5 basamaklı olduğundan $A = 7$ ve $A + B = 6 + 7 = 13$ elde edilir.

Alıştırma

10.19. UOMO-2002



Çözüm : $2A57B3$ sayısının 33 'e bölünmesi için hem 3 hem de 11 'e bölünebilmelidir. Buna göre, 3 'e bölünebilme kuralından $A + B + 2 = 3k$ olmalıdır. O halde, $A + B$ sayısı, $1, 4, 7, 10, 13$ veya 16 olabilir. 11 'e bölünebilme kuralına göre de,

$$(A + 7 + 3) - (2 + 5 + B) = 11m$$

olmalıdır. Yani, $A - B = 11m - 3$ olmalıdır. Buna göre, $A - B, -3$ veya 8 olabilir.

$A - B$ ve $A + B$ sayılarının her ikisinin de tek veya her ikisinin de çift olacağı göz önünde bulundurularak,

$$\begin{cases} A - B = -3 \\ A + B = 1, 7 \text{ veya } 13 \end{cases} \quad \text{veya} \quad \begin{cases} A - B = 8 \\ A + B = 4, 10 \text{ veya } 16 \end{cases}$$

denklemlerinden, $(A, B) \in \{(2, 5), (5, 8), (9, 1)\}$ olabileceği görülür.

Bazı Bölünebilme Özellikleri

Aıştırma 10.20.



Çözüm : $(4n - 1) \mid (11n + 5)$ ise

$$(4n - 1) \mid 4(11n + 5) - 11(4n - 1) = 31$$

olmalıdır. Buradan $4n - 1 = 31 \Rightarrow n = 8$ elde edilir.

Aıştırma 10.21.



Çözüm : $(3n + 1) \mid (7n + 6)$ ise

$$(3n + 1) \mid 3(7n + 6) - 7(3n + 1) = 11$$

olması gerekir. Yani, $3n + 1$ sayısı $1, -1, 11, -11$ olabilir.

$$3n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0$$

$$3n + 1 = -1 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z}$$

$$3n + 1 = 11 \Rightarrow n \notin \mathbb{Z},$$

$$3n + 1 = -11 \Rightarrow n = -4$$

olduğundan sadece $n = 0$ ve $n = -4$ için verilen kesir bir tam sayı olur.

Aıştırma 10.22. UOMO - 1997



Çözüm : $(n + 4) \mid n^2$ ise

$$(n + 4) \mid n(n + 4) - n^2 = 4n,$$

olmalıdır. Benzer şekilde, $(n + 4) \mid 4n$ ise,

$$(n + 4) \mid 4(n + 4) - 4n = 16,$$

olması gerekir. Yani,

$$n + 4 \in \{1, 2, 4, 8, 16, -1, -2, -4, -8, -16\}$$

olabilir. Buradan da,

$$n \in \{-3, -2, 0, 4, 12, -5, -6, -8, -12, -20\}$$

olabilir.

Aıştırma 10.23. UOMO-2007



Çözüm : $n^2 - n + 1 \mid n^3 + 4$ ise

$$n^2 - n + 1 \mid (n^3 + 4) - n(n^2 - n + 1) = n^2 - n + 4$$

olur. Buradan da,

$$n^2 - n + 1 \mid (n^2 - n + 4) - (n^2 - n + 1) = 3$$

elde edilir. O halde, $n^2 - n + 1 \in \{1, -1, 3, -3\}$ olabilir.

$$n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow n = 0 \text{ veya } n = 1.$$

$$n^2 - n + 1 = -1 \Rightarrow \text{çözüm yok}$$

$$n^2 - n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2 \text{ veya } n = -1$$

$$n^2 - n + 1 = -3 \Rightarrow \text{çözüm yok}$$

Aıştırma 10.24. UOMO-B-2018



Çözüm : $n^2 + n + 1 \mid 2n + 13$ ise

$$n^2 + n + 1 \leq 2n + 13$$

eşitsizliğinden,

$$n^2 - n - 12 \leq 0 \Rightarrow (n - 4)(n + 3) \leq 0$$

elde edilir ki, $-3 \leq n \leq 4$ olması gerekir. O halde, n pozitif tam sayı olduğundan n 'nin $1, 2, 3, 4$ değerler için kontrol etmemiz yeterlidir. Sağlayanların yanına ★ koyalım.

$$n = 1 \Rightarrow \frac{2 \cdot 1 + 13}{1^2 + 1 + 1} = 5 \in \mathbb{Z} \star$$

$$n = 2 \Rightarrow \frac{2 \cdot 2 + 13}{2^2 + 2 + 1} = \frac{17}{7} \notin \mathbb{Z}$$

$$n = 3 \Rightarrow \frac{2 \cdot 3 + 13}{3^2 + 3 + 1} = \frac{19}{13} \notin \mathbb{Z}$$

$$n = 4 \Rightarrow \frac{2 \cdot 4 + 13}{4^2 + 4 + 1} = 1 \in \mathbb{Z} \star$$

olduğundan istenen şekilde sadece 2 tane n pozitif tam sayısı vardır.

Aıştırma

10.25. UOMO-1996



Çözüm : $14n - 35 = 7(2n - 5)$ olduğundan bu sayı zaten daima 7 ile tam blünür. O halde, $14n - 35$ sayısının 77 ile tam bölünebilmesi için $11 \mid 2n - 5$ olması gerekir. Buradan da

$$\begin{aligned} 11 \mid 2n - 5 &\Rightarrow 11 \mid (2n - 5) + 11 = 2(n + 3) \\ &\Rightarrow 11 \mid n + 3 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani, $n + 3 = 11k$ veya $n = 11k - 3$ olması gerekir. $k = 1, 2, 3, \dots, 7$ için n sayısı 8, 19, 30, 41, 52, 63 ve 74 elde edilir. Yani, istenen koşula uygun 7 sayı vardır.

Aıştırma

10.26.



Çözüm :

$$\begin{aligned} 41 \mid n^2 - 6n - 73 &\Rightarrow 41 \mid n^2 - 6n - 73 + 2 \cdot 41 \\ &\Rightarrow 41 \mid n^2 - 6n + 9 \\ &\Rightarrow 41 \mid (n - 3)^2 \\ &\Rightarrow 41 \mid n - 3 \\ &\Rightarrow n - 3 = 41k \end{aligned}$$

olması gerekir. $k = 1$ için $n = 44$ istenen şekildeki en küçük iki basamaklı n pozitif tam sayısıdır.

Aıştırma

10.27.



Çözüm : $163 \mid A + B + C$, $163 \mid A + B - C$ ve $163 \mid A - B$ ise

$163 \mid (A + B + C) + (A + B - C) + 2(A - B)$ olduğundan

$$163 \mid 4A$$

elde edilir. Buna göre, 163 sayısı A sayısını da tam bölmesi gerekir.

Aıştırma

10.28.



Çözüm :

$$5n + 7 \mid 15n + 4 \text{ ve } 5n + 7 \mid 7n + 3$$

ise, $5n + 7$ sayısı $7(15n + 4) - 15(7n + 3) = -17$ sayısını da bölmelidir. Buna göre,

$$5n + 7 = 1, -1, 17 \text{ veya } -17$$

durumları için kontrol edilmelidir. $n \in \mathbb{Z}$ için $5n + 7$ sayısı 1, -1, -17 olamaz.

$$5n + 7 = 17 \Rightarrow n = 2,$$

elde edilir. Bu değerin sorunun koşulunu sağlayıp sağlamadığını kontrol etmeliyiz. $n = 2$ için $5n + 7 = 17$, $15n + 4 = 34$ ve $7n + 3 = 17$ olduğundan problemin koşulları sağlanır.

Asal Çarpanlar

Alıştırma 10.30.



Çözüm :

a) Yazılamaz.

b) Yazılabilir : 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

c) Yazılamaz.

Alıştırma 10.31.



Çözüm : Rakamları birbirinden farklı en büyük üç basamaklı şekerli sayı için

$$n = 987$$

sayısını kontrol edelim.

$$987 = 3 \times 7 \times 47$$

olduğundan en büyük üç basamaklı şekerli sayı **987** olur. En küçük üç basamaklı tuzlu sayıyı bulalım. Bu sayı 2^3 veya 3^3 çarpanını bulundurmalıdır. $2^3 \cdot 13 = 104$ olduğundan, en küçük üç basamaklı tuzlu sayı **104** bulunur. O halde istenen yanıt $987 - 104 = 883$ bulunur.

Alıştırma 10.29.



Çözüm :

a) $1040 = 2^4 \cdot 5 \cdot 13$ b) $12! = 2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$ c)
 $75^{10} = 3^{10} 5^{20}$

Alıştırma 10.32.



Çözüm :

$35 = 6 \cdot 6 - 1$ sayısı asal değildir.

Aıştırma 10.33.**Çözüm :** Verilen asal sayıları a ve $a + 4$ ile gösterelim.**I. Yanlış**

$$\frac{a + a + 4}{2} = \frac{2a + 4}{2} = a + 2$$

asal olmayabilir. Örneğin, $a = 7$ ve $b = 11$ alınırsa, $a + 2 = 9$ olur ve asal olmaz.**II. Yanlış**

$$\frac{a - b}{2} = \frac{a - a - 4}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

sayısı asal değildir. $a > b$ olduğu belirtilmiş olsaydı bu ifade doğru olurdu.**III. Doğru.**
 $a \cdot b + 4 = a(a + 4) + 4 = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$ olduğundan doğrudur.
IV. Doğru.

$$a \cdot b + a + 4 = a(a + 4) + a + 4 = a^2 + 5a + 4 = (a + 1)(a + 4)$$

biçiminde daima iki sayının çarpımı olarak yazılabileceğinden asal olamaz.

Aıştırma 10.34. UOMO-B-2016**Çözüm :** 50'den küçük ve en küçük asal bölüneni 2 olan sayılar $\{2, 4, 6, \dots, 48\}$ sayılarıdır.

$$\mathbb{C}(2) = \frac{48 - 2}{2} + 1 = 24.$$

50'den küçük ve en küçük asal bölüneni 3 olan sayılar $\{3, 9, \dots, 45\}$ sayılarıdır.

$$\mathbb{C}(3) = \frac{45 - 3}{6} + 1 = 8.$$

50'den küçük ve en küçük asal bölüneni 5 olan sayılar $\{5, 25, 35\}$ sayılarıdır. $\mathbb{C}(5) = 3$.50'den küçük ve en küçük asal bölüneni 7 olan sayılar $\{7, 49\}$ sayılarıdır. $\mathbb{C}(7) = 2$.50'den küçük ve en küçük asal bölüneni 11 olan sayılar $\{11\}$ sayılarıdır. $\mathbb{C}(11) = 1$.50'den küçük ve en küçük asal bölüneni 13 olan sayılar $\{13\}$ sayılarıdır. $\mathbb{C}(13) = 1$.**Aıştırma 10.35.****Çözüm :** p sayısı 7'den küçük olmayan bir asal sayı olmak üzere,

$$7 \cdot p$$

formunda olabilir. $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343 > 250$ olduğundan istenen sayılar üç asal sayının çarpımı olamaz. O halde, $7 \cdot 23 = 161 < 200$ ve $7 \cdot 37 = 259 > 250$ olduğundan

$$7 \cdot 29 = 203 \text{ ve } 7 \cdot 31 = 217$$

koşula uygun sayılardır.

2. Yol : En küçük asal bölünen 2, 3, 5 olmasını istemiyoruz. Buna göre, 200'den büyük bu sayıları

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k + 7 = 210k + 7,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k - 7 = 210k - 7$$

biçiminde yazmak mümkündür. $k = 1$ için 217 ve 203 elde edilir.**Aıştırma 10.36.****Çözüm :** a tek sayı olursa sağ taraf tek sayı olur. Fakat, sol tarafta $a + 1$ çift olacağından sol taraf çift sayı olur ve eşitlik sağlanamaz. O halde, a çift sayı olmalıdır. a asal olduğundan $a = 2$ olur. Buradan,

$$3(b + 1) = 45 \cdot 2 \Rightarrow b + 1 = 30 \Rightarrow b = 29$$

elde edilir. $a + b = 2 + 29 = 31$ bulunur.

Pozitif Bölen Sayısı

Alıştırma 10.37.



Çözüm : 2'nin kuvveti

$$\{0, 1, 2, 3, \dots, 19\}$$

sayıları olabilir. Yani 20 farklı sayı olabilir.

Alıştırma 10.38.



Çözüm : 180 sayısını asal çarpanlarına göre yazalım.

$$180 = 2^2 3^2 5$$

olduğundan $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$ pozitif böleni vardır.

Alıştırma 10.39.



Çözüm : 108 sayısını asal çarpanlarına göre yazalım.

$$108 = 2^2 3^3$$

olduğundan $(2)(3 + 1) = 8$ pozitif çift böleni vardır.

Alıştırma 10.40. AMC8-2018



Çözüm : Önce 23232 sayısını asal çarpanlarına göre yazmalıyız.

$$23232 = 2^6 \cdot 3^1 \cdot 11^2$$

olduğunu bulabilirsiniz. 23232 sayısını pozitif çarpanlarının sayısı

$$(6 + 1) \cdot (1 + 1) \cdot (2 + 1) = 7 \cdot 2 \cdot 3 = 42$$

bulunur.

Alıştırma 10.41.



Çözüm : Önce 1584 sayısını asal çarpanlarına göre yazmalıyız.

$$1584 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 11^1$$

olduğunu bulabilirsiniz. Pozitif bölenleri $2^a 3^b 11^c$ formundadır. 3 ile bölünmesi için $b \in \{1, 2\}$ olmalıdır. 8 ile bölünmemesi için de $a \in \{0, 1, 2\}$ olmalıdır. $c \in \{0, 1\}$ olabilir. O halde,

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

pozitif böleni 3 ile bölünür ama 8 ile bölünmez.

Alıştırma 10.42.



Çözüm : $15000\dots000 = 15 \cdot 10^n$ olsun. Yani n tane 0 olsun ve sayı $n + 2$ basamaklı olsun.

$$15 \cdot 10^n = 3 \cdot 5 \cdot 2^n \cdot 5^n = 3 \cdot 2^n \cdot 5^{n+1}$$

olduğundan,

$$(1 + 1)(n + 1)(n + 2) = 40$$

$$(n + 1)(n + 2) = 20$$

olmalıdır. Buradan $n = 3$ olması gerektiği görülür. O halde, bu sayı $n + 2 = 5$ basamaklıdır.

Alıştırma 10.43.



Çözüm :

a) $2 \nmid n$ ise $4n$ sayısının pozitif bölen sayısı $2^2 n$ sayısının pozitif bölen sayısı kadardır ve n sayısının pozitif bölen sayısının $(2 + 1)$ katı olur. Buradan, $36 \cdot 3 = 108$ bulunur.

b) $n = 2^3 \cdot m$ ve $2 \nmid m$ ise bölen sayısı $(3 + 1) \cdot 9 = 36$ yerine, $4n = 2^5 \cdot m$ olduğundan $(5 + 1) \cdot 9 = 54$ olur.

Alıştırma**10.44.****AMC8-2020**

Çözüm : Çarpan **1 değilse** veya **asal değilse** veya **asal sayının karesi** değilse **3'ten fazla** pozitif çarpanı mutlaka olacaktır. Yani, **2020** sayısının çarpanlarından asal olanlar, asalların karesi olanlar ve **1** dışındakilerin tamamının en az dört pozitif çarpanı vardır.

$$2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$$

olduğundan, **1, 2, 4, 5, 101** çarpanları **3'ten fazla** çarpana sahip değildir. **2020** sayısının çarpanları **12** tanedir :

1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020.

Bu çarpanlardan $12 - 5 = 7$ tanesi **3'ten fazla** çarpana sahiptir.

Alıştırma**10.45.**

Çözüm : A) DOĞRU : $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ olsun. Bu durumda $n^2 = p_1^{2a_1} p_2^{2a_2} \cdots p_k^{2a_k}$ olacaktır. Bölün sayısı da

$$\mathcal{BS}(n^2) = (2a_1 + 1)(2a_2 + 1) \cdots (2a_k + 1)$$

biçiminde tek sayıları çarpımı olacaktır. Bu çarpım daima bir tek sayıdır.

B) ve C) YANLIŞ : Örneğin $n = 4$ için,

$$\mathcal{BS}(4^2) = \mathcal{BS}(2^4) = 5$$

sayısı **3** ile bölündüğünde **2** kalanını verir. Aynı zamanda asal sayıdır.

Pozitif Bölenlerin Toplamı

Aıştırma 10.46.

Çözüm : $288 = 2^5 3^2$ olduğundan,

$$A = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^5\} \text{ ve } B = \{1, 3, 3^2\}$$

olur. O halde, istenen değer

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) (1 + 3 + 3^2)$$

çarpımıdır.

$$\frac{2^6 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3 - 1} = 63 \cdot 13 = 819$$

bulunur.

Aıştırma 10.47.



Çözüm : İstenen toplam

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) (1 + 3 + 3^2) (1 + 5 + 5^2)$$

çarpımıdır. Bu ise, $15 \cdot 13 \cdot 31 = 6045$ olur.

Aıştırma 10.48.



Çözüm : Tüm pozitif tek sayı bölenlerinin toplamı

$$(1 + 3 + 3^2) (1 + 5) = 78$$

olur. Bunu tüm pozitif bölenlerin toplamından çift pozitif bölenlerin toplamını da çıkararak bulabiliriz.

Tüm pozitif bölenlerinin toplamı

$$(1 + 2 + 2^2 + 2^3) (1 + 3 + 3^2) (1 + 5) = 1170$$

tüm pozitif çift sayı bölenlerinin toplamı da

$$(2 + 2^2 + 2^3) (1 + 3 + 3^2) (1 + 5) = 1092$$

olduğundan yanıt $1170 - 1092 = 78$ olur.

Aıştırma 10.49.



Çözüm : Bir sayı 45 ile bölünüyorsa hem 9 hem de 5'in katı olması gerekir. Tek sayı bölenlerini aradığımız için bizden istenen toplam

$$(3^2) (5 + 5^2)$$

çarpımıdır. Bu ise, $9 \cdot 30 = 270$ olur.

Aıştırma 10.50.

Çözüm : $30^3 = 2^3 3^3 5^3$ bir böleninin $15 = 3 \cdot 5$ ile bölünüp, $45 = 9 \cdot 5$ ile bölünememesi için 5 ve 3'ü ile bölünüp 9 ile bölünememesi gerekir. Buna göre, istenen çift sayı bölenlerinin toplamı

$$(2 + 2^2 + 2^3) (3) (5 + 5^2 + 5^3)$$

çarpımıdır. Bu ise, $14 \cdot 3 \cdot 155 = 6510$ olur.

Aıştırma 10.51.

Çözüm : $30^3 = 2^3 3^3 5^3$ olduğundan, asal olmayan tüm bölenlerin toplamı

$$- (2 + 3 + 5) = -10$$

bulunur.

Aıştırma 10.52.



Çözüm :

$$AA \cdot BB \cdot CC = A \cdot B \cdot C \cdot 11^3$$

yazalım. Asal olmayan tüm bölenlerinin toplamı -23 ise, $A \cdot B \cdot C$ çarpımından, toplamı $23 - 11 = 12$ olan asal sayılar gelmesi gerekir. O halde, $A \cdot B \cdot C \cdot 11^3$ sayısının çarpanlarından iki tanesi de 5 ve 7 bulunur. Buna göre, AA , BB , CC sayıları 11, 55, 77 olacaktır. Bunların toplamı da $AA + BB + CC = 11 + 55 + 77 = 143$ bulunur.

Alıştırma**10.53. UOMO-B-2018** ♣♣♣♣

Çözüm : $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ olsun. n sayısının tüm pozitif tam bölenlerinin toplamı

$$(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_k + 1) = 72$$

olur. 72 sayısı 1 eksiği farklı asallar olan çarpanlarla 3 farklı şekilde yazılabilir:

$$72 = 3 \cdot 24 = 4 \cdot 18 = 6 \cdot 12 = 3 \cdot 4 \cdot 6$$

Buna göre, n sayısı 71, $2 \cdot 23 = 46$, $3 \cdot 17 = 51$, $5 \cdot 11 = 55$, $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ sayıları olabilir.

Pozitif Bölenlerin Çarpımı

Alıştırma**10.54.** ♣♣♣

Çözüm :

$$\sqrt[n]{108^{12}} = 108^6 = (2^2 3^3)^6 = 2^{12} 3^{18}$$

olduğundan 3'ün en fazla 18'inci kuvvetine bölünür.

Alıştırma**10.55.** ♣♣♣

Çözüm :

$$\sqrt[n]{2^{18} 3^{12}} = (2^3 3^2)^6 = 72^6 = n^6$$

eşitliğinden $n = 72$ bulunur.

EBOB - EKOK

Alıştırma**10.56.** ♣

Çözüm : 10'un katı olan üç basamaklı sayılar

$$100, 110, \dots, 990$$

sayılarıdır ve bunların sayısı $\frac{990 - 100}{10} + 1 = 90$ 'dır.

Şimdi, bunların arasından 25'in katı olanları çıkaralım. Hem 10 hem de 25'in katı olan en küçük sayı 50'dir. O halde, 50'nin katı olanları çıkaracağız. Buna göre

$$100, 150, \dots, 950$$

sayılarını çıkarmalıyız. $\frac{950 - 100}{50} + 1 = 18$ sayı çıkarılırsa, $90 - 18 = 72$ üç basamaklı sayı 10'un katıdır ve 25 ile tam bölünmez.

Alıştırma**10.57.** ♣

Çözüm : Üç sayıyı da asal çarpanlarına göre yazalım.

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$

Üçünde de ortak olan çarpanları en küçük kuvvetleriyle yazıp çarpalım.

$$\text{EBOB}(60, 72, 216) = 2^2 \cdot 3 = 12$$

(EBOB'da ortak çarpanda küçük üslümler)

$$\text{EKOK}(60, 72, 216) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 1080$$

(EKOK'da asal çarpanlarda büyük üslümler)

Alıştırma**10.58.** ♣

Çözüm : Üç sayıda 10 ile zaten bölünüyor. O halde, 90, 54 ve 72 sayılarının EBOB'unu bulup 10 ile çarpabiliriz.

$$\text{EBOB}(90, 54, 72) = 18$$

olduğundan, her koliye 180 kitap koymamız gerekir. Bu durumda en az koli kullanılır. Buna göre,

$$\frac{900}{180} + \frac{540}{180} + \frac{720}{180} = 12$$

koli kullanılacaktır.

Aıştırma

10.59.



Çözüm : Soruya göre, $170 - 26 = 144$ ve $140 - 32 = 108$ sayılarının en büyük ortak bölenlerini bulmalıyız.

$$\text{EBOB}(144, 108) = 36$$

olduğundan, $36 > 32$ ve $36 > 26$ olduğundan, bir koli 36 kitap almaktadır. Böylece, $\frac{144}{36} + \frac{108}{36} = 7$ koli kullanılmıştır.

Aıştırma

10.60.



Çözüm : Bu iki sayının EBOB'unu bulalım.

$$30^4 = 2^4 3^4 5^4 \text{ ve } 20^5 = 2^{10} 5^5$$

olduğundan $\text{EBOB}(30^4, 20^5) = 2^4 5^4$ olur. O halde, her iki sayıyı da bölen pozitif tam sayı sayısı

$$(4 + 1)(4 + 1) = 25$$

olarak bulunur.

Aıştırma

10.61. UOMO-B-2019



Çözüm : $\text{EBOB}(a, b) = 3$ ise hem a hem de b sayıları 3 'ün katı olmalıdır.

$\text{EBOB}(b, c) = 7$ ise hem b hem de c sayıları 7 'nin katı olmalıdır.

$\text{EBOB}(a, c) = 11$ ise hem a hem de c sayıları 11 'in katı olmalıdır.

Sonuç olarak, a hem 3 hem de 11 'nin katı olmalıdır.

$$a = 33 \cdot 3 = 99.$$

b hem 3 hem de 7 'nin katı olmalıdır. $b = 21 \cdot 4 = 84$

c hem 7 hem de 11 'in katı olmalıdır. $c = 7 \cdot 11 = 77$

O halde, $a + b + c$ en fazla $99 + 84 + 77 = 260$ olur.

Öklid Algoritması İle EBOB Bulma

Aıştırma

10.62.



Çözüm :

$$(3503, 3277) = (3503 - 3277, 3277)$$

$$= (226, 3277) = (2 \cdot 113, 3277)$$

olur. 3277 sayısı 2 ile bölünmediğinden 113 ile bölünüp bölünmediğini kontrol edelim. Bölme işlemi yaparsak tam bölündüğü $3277 = 113 \cdot 29$ olduğunu görürüz. O halde, $3503 = 113 \cdot 29 + 2 \cdot 113 = 131 \cdot 31$ olur. Sonuç olarak verilen kesir

$$\frac{113 \cdot 31}{113 \cdot 29} = \frac{31}{29}$$

olur.

Aıştırma

10.63. UAMO-1999



Çözüm :

$$(11n + 3, 23n + 2) = (11n + 3, 23n + 2 - 2(11n + 3))$$

$$= (11n + 3, n - 4)$$

$$= (11n + 3 - 11(n - 4), n - 4)$$

$$= (47, n - 4)$$

olduğundan bu kesir sadece 47 ile sadeleşebilir.

$n - 4 = 47k$ olursa sadeleşebilir.

Aıştırma 10.64.**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
(5n - 2, 16n - 3) &= (5n - 2, 16n - 3 - 3(5n - 2)) \\
&= (5n - 2, n + 3) \\
&= (5n - 2 - 5(n + 3), n + 3) \\
&= (-17, n + 3)
\end{aligned}$$

olduğundan bu kesir sadece 17 ile sadeleşebilir.

 $n + 3 = 17k$ olursa sadeleşebilir. $k = 1$ için $n = 14$ olursa 17 ile sadeleşecektir.**Aıştırma** 10.66. UOMO-B-2015**Çözüm :**

2233

olduğundan, kümede 2233'ün dışındaki sayılardan tam olarak bir tanesinin 7 ile,

tam olarak bir tanesinin 11 ile,

tam olarak bir tanesinin de 29 ile bölünmesi gerekir.

Böylece, p, q, r birbirlerinden ve 7, 11, 29'dan farklı üç asal sayı olmak üzere

$$\{2233, 7pq, 11pr, 29qr\}$$

kümesi soruda verilen koşulu sağlayacaktır. Yani, kümede en fazla 4 sayı olabilir.

Aıştırma 10.65. UOMO - 2004**Çözüm :**

$$\begin{aligned}
(2n+13, 2n+27) &= (2n+13, 2n+27 - (2n+13)) \\
&= (2n + 13, 14) \\
&= (2n + 13 - 14, 14) \\
&= (2n - 1, 14)
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde, EBOB 14'ün bölenleri olabilir. Fakat, $2n - 1$ asal çift sayı olamayacağından 2 ve 14 sayıları EBOB olamaz. O halde, EBOB ya 1 ya da 7 olabilir. Soruda EBOB $n - 4$ verilmiş. Buna göre,

$$n - 4 = 1 \Rightarrow n = 5; \quad n - 4 = 7 \Rightarrow n = 11$$

olacaktır. Soruda $n > 5$ verilmiş. O halde, $n = 11$ olacaktır. $n = 11$ için sayılar

$$2 \cdot 11 + 13 = 35 \quad \text{ve} \quad 2 \cdot 11 + 27 = 49$$

olduğundan $\text{EKOK}(35, 49) = 7 \cdot 5 \cdot 7 = 245$ bulunur.**Aıştırma** 10.67.**Çözüm :**

$$\text{EKOK}(A, B) = 24 = 2^3 \cdot 3^1$$

olsun. A ve B sayılarının asal çarpanları aynı olmalıdır. $A = 2^a \cdot 3^b$ ve $B = 2^x \cdot 3^y$ ise, EKOK tanımı gereği, 2'nin üslerinden a ve x 'in en büyüğü 3, 3'ün üslerinden b ve y 'nin en büyüğü 1 olmalıdır. (a, x) ikilisi, $(0, 3); (1, 3); (2, 3) (3, 3); (3, 2); (3, 1); (3, 0)$ olabilir. (b, y) ikilisi, $(0, 1); (1, 0); (1, 1)$ olabilir.Yani, (a, x) ikilisi için 7 durum, (b, y) ikilisi için 3 durum vardır.O halde, istenen şekilde $7 \cdot 3 = 21$ tane (A, B) ikilisi bulunabilir. $a = x = 3$ ve $b = y = 1$ olduğunda $A = B = 24$ olduğundan $(24, 24)$ ikilisini çıkarırsak 20 tane (A, B) ikilisi olduğu görülür.

Aıştırma

10.68.



Çözüm : EKOK $72^2 = 2^6 3^4$ ise n sayısı da $n = 2^a 3^b$ formundadır.

$$n = 2^a 3^b, 18^2 = 2^2 3^4 \text{ ve } 12^2 = 2^4 3^2$$

olduğundan EKOK tanımı gereği $a, 2$ ve 4 'ün en büyüğü 6 olmalıdır. Buna göre, $a = 6$ bulunur. Benzer şekilde, $b, 4$ ve 2 'nin en büyüğü de 4 olmalıdır. O halde, b sayısı $0, 1, 2, 3, 4$ sayıları olabilir. En küçük n sayısını arıyoruz. O halde, $b = 0$ alabiliriz. Böylece, $n = 2^6 = 64$ bulunur.

Aıştırma

10.69.



Çözüm : EBOB(a, b) = 10 ise a ve b 'nin her ikisinde de 10 çarpanı bulunması gerekir. EBOB(a, b) · EKOK(a, b) = $a \cdot b$ olduğundan,

$$a \cdot b = 1200 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (10) \cdot (10)$$

olmalıdır.

$$(40, 30), (10, 120)$$

durumlarından biri olabilir. Yani, iki farklı sayı ikilisi vardır.

Aıştırma

10.70.



Çözüm : Bu iki sayıya A ve B diyelim. m ve n aralarında asal olmak üzere,

$$A = 20m \text{ ve } B = 20n$$

biçiminde yazılabilir. Toplamları 200 ise,

$$A + B = 20(m + n) = 200$$

eşitliğinden, $m + n = 10$ olacaktır. m ve n aralarında asal olduğundan $(1, 9)$ veya $(3, 7)$ ikililerinden biri olabilir. Bu durumda, bu sayılar 20, 180 veya 60, 140 ikilileri olabilir.

Aıştırma

10.72.



Çözüm : En büyük ortak bölen d olsun.

$$a = dm, \quad b = dn$$

olacak şekilde aralarında asal m, n tam sayıları vardır. Bu durumda en küçük ortak kat da dmn olur. Sorudan verilen ifadeden

$$dmn - d = d(mn - 1) = 17$$

olmalıdır. Yani, $d = 1$ veya $d = 17$ olmalıdır.

$d = 1$ ise EBOB 1, EKOK 18 olup tüm çözümler

$$(a, b) = (1, 18), (18, 1), (2, 9), (9, 2)$$

bulunur.

$d = 17$ ise EBOB 17, EKOK 34 olup tüm çözümler

$$(a, b) = (17, 34), (34, 17)$$

olur. Sonuç olarak $a + b$ sayısı 11, 19, 51 değerlerini alabilir.

Aıştırma

10.72.



Çözüm : 6, 8, 10 sayıları koşulu sağlayan en küçük sayılardır. Üç basamaklı sayılar aradığımız için bu sayılara 2 kez EKOK $(3, 4, 5) = 60$ ekleriz. Buna göre, 126, 128, 130 sayıları koşulu sağlarlar ve bunların toplamı da $126 + 128 + 130 = 384$ bulunur.

Alıştırma 10.73.

Çözüm : 3, 5, 7, 9 sayıları koşulu sağlarlar ama ardışık değiller. Aralarındaki farkın 2 olması bize bir çözüm yolu verecektir. Bu sayıları bir n sayısı ile toplayıp 2 ile bölersek ardışık dört sayı elde edilecektir. Gerçekten de

$$\frac{n+3}{2}, \frac{n+5}{2}, \frac{n+7}{2}, \frac{n+9}{2}$$

ardışık dört sayıdır. Şimdi, bu dört sayıdan birincisinin 3'e, ikincisinin 5'ye, üçüncüsünün 7'ye ve dördüncüsünün 9'a tam bölünmesini istiyoruz. Bunun için, n sayısını $n = \text{EKOK}(3, 5, 7, 9) = 315$ 'ün katlarından almamız gerekir. $n = 315$ alırsak sayılar sırasıyla

$$159, 160, 161, 162$$

sayıları elde edilir ki, bu dört sayı verilen koşulu sağlarlar. Bunların toplamı da $159 + 160 + 161 + 162 = 642$ bulunur.

Bir Sayının Euler Değeri**Alıştırma 10.74.**

Çözüm : a) $60 - 60 \div 2 = 30$ b) $5^4 - 5^3 = 500$

Alıştırma 10.75.

Çözüm : $100 = 2^2 \cdot 5^2$ olduğundan

$$E(100) = (2^2 - 2^1) (5^2 - 5^1) = 2 \cdot 20 = 40$$

bulunur.

Alıştırma 10.76.

Çözüm : $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan, kesirlerin payındaki sayılardan

$$E(60) = (2^2 - 2^1) (3^1 - 3^0) (5^1 - 5^0) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$$

tanesi 60 ile aralarında asaldır ve sadeleşmez. O halde, $59 - 16 = 43$ tanesi sadeleşir.

Alıştırma 10.77.

Çözüm :

$$E(2^{25}) = 2^{25} - 2^{24} = 2^{24} (2 - 1) = 2^{24}$$

olduğundan pozitif bölen sayısı $PBS = (24 + 1) = 25$ bulunur.

Alıştırma 10.78.

Çözüm : $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olduğundan

$$E(180) = (2^2 - 2^1) (3^2 - 3^1) (5^1 - 5^0) = 48$$

tanesi sadeleşmez.

Alıştırma 10.79.

Çözüm :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{60} + \frac{59}{60}\right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{7}{60} + \frac{53}{60}\right)}_1 + \dots + \underbrace{\left(\frac{29}{60} + \frac{31}{60}\right)}_1$$

ve $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ olduğundan

$$E(60) = (2^2 - 2^1) (3^1 - 3^0) (5^1 - 5^0) = 16$$

ve dolayısıyla istenen toplam $16 \div 2 = 8$ bulunur.

Alıştırma 10.80.

Çözüm :

$$\underbrace{(1 + 99)}_{100} + \underbrace{(3 + 97)}_{100} + \dots + \underbrace{(49 + 51)}_{100}$$

ve $100 = 2^2 \cdot 5^2$ olduğundan

$$E(100) = (2^2 - 2^1) (5^2 - 5^1) = 40$$

ve dolayısıyla istenen toplam $(40 \div 2) \cdot 100 = 2000$ bulunur.

KONU SONU TESTİ (BÖLÜNEBİLME)

Test 10.1



- A) 1 B) 2 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm : 987D sayısını göz önüne alalım.

$$9 - 8 + 6 - D = 8 - D$$

sayısı 11'in katı olmalıdır. $D = 8$ olur ve rakamları farklı olmaz. O halde, 986D sayısını göz önüne alalım.

$$9 - 8 + 6 - D = 7 - D$$

olduğundan $D = 7$ alınabilir. 9867 sayısının 9 ile bölümünden kalan 3'tür.

Test 10.2



- A) $3^4 \cdot 7 \cdot 2^5 \cdot 5^4$ B) $3^3 \cdot 7^2 \cdot 2^5 \cdot 5^4$ C) $3^3 \cdot 7 \cdot 2^6 \cdot 5^4$
D) $3^3 \cdot 7 \cdot 2^5 \cdot 5^4$ E) $3^3 \cdot 7 \cdot 2^4 \cdot 5^4$

Çözüm :

$$\begin{aligned} 3780000 &= 378 \cdot 10^4 = 2 \cdot 189 \cdot 2^4 \cdot 5^4 \\ &= 189 \cdot 2^5 \cdot 5^4 = 9 \cdot 21 \cdot 2^5 \cdot 5^4 \\ &= 3^3 \cdot 7 \cdot 2^5 \cdot 5^4 \end{aligned}$$

Test 10.3



- A) 1 B) 2 C) 5 D) 4 E) 3

Çözüm :

$$A = 7k + 5 \text{ ve } B = 7m + 5$$

olduğundan

$$A + B = 7(k + m) + 10 = 7n + 10$$

olur. $A + B$ toplamının 7 ile bölümünden kalan 3'tür.

Test 10.4



- A) 49 B) 53 C) 5 D) 4 E) 37

Çözüm : 11 ile bölümünden kalan 9 olan en küçük sayı 9'dur. Bu sayıya 11 ekleyerek 11 ile bölümünden kalan 9 olan sayıları sırayla yazalım ve bunların arasından 5 ile bölündüğünde 3 kalanını veren en küçük sayıyı bulalım. Bu sayının 53 olduğu kolayca görülür.

$$9, 20, 31, 42, \mathbf{53}, 64, \dots$$

O halde, iki koşulu da sağlayan en küçük sayı 53 olduğundan,

$$n = 11 \cdot 5k + 53 = 55k + 53$$

formundadır. n sayısının 55 ile bölümünden kalan 53 bulunur.

Test 10.5



- A) 8 B) 9 C) 10 D) 0 E) 7

Çözüm : 9 ile bölümünden kalan 3 olan en küçük sayı 3'tür. Bu sayıya 9 ekleyerek 9 ile bölümünden kalan 3 olan sayıları sırayla yazalım ve bunların arasından 5 ile bölündüğünde 2 kalanını veren en küçük sayıyı bulalım. Bu sayının 39 olduğu kolayca görülür.

$$3, 12, 21, 30, \mathbf{39}, \dots$$

O halde, iki koşulu da sağlayan en küçük sayı 39 olduğundan,

$$n = 9 \cdot 5k + 39 = 45k + 39$$

formundadır. Üç basamaklı en küçük n sayısı $k = 2$ için $45 \cdot 2 + 39 = 129$ bulunur. 11 ile bölümünden kalan 8'dir.

Test 10.6



- A) 8 B) 16 C) 15 D) 17 E) 14

Çözüm :

$$\begin{aligned} 32 \cdot 36 \cdot 40 \cdot 44 \cdot 48 &= 2^5 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 2^3 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 11 \cdot 2^4 \cdot 3 \\ &= 2^{5+2+3+2+4} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

olduğundan 2'nin en fazla 16'ncı kuvvetine bölünür.

Test 10.7

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm : 315 sayısının 6 ile bölümünden kalan 3'tür. O halde, toplamın 6 ile tam bölünebilmesi için 32A sayısının 6 ile bölümünden 3 kalanı elde edilmelidir. Bir sayının 6 ile bölünebilmesi için 2 ve 3 ile tam bölünebilmesi gerekir. 318 sayısı 6 ile tam bölünür. O halde, $318 + 3 = 321$ ve $321 + 6 = 327$ sayılarının 6 ile bölümünden kalan 3'tür. Yani, A sayısı 1 veya 7 olabilir. Bunların toplamı da 8 olur.

Test 10.8

- A) 8 B) 9 C) 10 D) 12 E) 6

Çözüm : $10!$ ve 15^{10} sayıları 45 ile bölündükleri için, $6 + 7n$ sayısının 45 ile bölünebilmesi gerekir. $n = 12$ için

$$7 \cdot 12 + 6 = 90$$

olduğundan n en az 12'dir.

Test 10.9

- A) 32 B) 33 C) 28 D) 16 E) 17

Çözüm : Tek elemanlı alt kümeleri

$$\{6\}, \{12\}, \{18\}$$

olmak üzere üç tanedir.

İki elemanlı alt kümelerinde elemanların birinin mutlaka 3'ün çarpanı olması gerekir.

$$\{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{6, 7\}, \{8, 9\}, \{9, 10\}, \{11, 12\}, \\ \{12, 13\}, \{14, 15\}, \{15, 16\}, \{17, 18\}, \{18, 19\}$$

olmak üzere 12 tanedir.

Ardışık herhangi üç sayının çarpımı daima $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ile bölünür. O halde,

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \dots, \{18, 19, 20\}$$

olmak üzere 18 tanedir. İstenen şekilde $3 + 12 + 18 = 33$ alt küme vardır.

Test 10.10

- A) II, IV. B) I, II C) I, III, IV. D) I, IV. E) I, II, III, IV.

Çözüm :

Ardışık 4 rakamdan biri 2, biri 3 ve biri de 4 ile kesinlikle bölüneceğinden çarpımları $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ ile kesinlikle bölünür. Bu nedenle, I ve IV doğrudur. III. doğrudur ardışık dört rakamdan ikisi tek ikisi çift olmalıdır ve toplamaları da çift olacağından toplamaları 2 ile tam bölünür. II doğru değildir. Örneğin, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ toplamı 4 ile tam bölünmez

Test 10.11

- A) 14 B) 15 C) 18 D) 16 E) 17

Çözüm :

$$3n \leq 1000 \Rightarrow n \leq 333$$

olmalıdır. Diğer taraftan,

$$\frac{5n}{9} \geq 100 \Rightarrow 5n \geq 900 \Rightarrow n \geq \frac{900}{5} = 180$$

olmalıdır. Buna göre, $180 \leq n < 333$ olabilir. n sayısı 9 ile tam bölünebilmelidir. Buna göre,

$$n \in \{180, 189, 198, \dots, 324, 333\}$$

olabilir. Bunların sayısı da $\frac{333 - 180}{9} + 1 = 18$ olur.

Test 10.12

- A) 3 B) 6 C) 9 D) 8 E) 12

Çözüm :

$$11^4 + 22^4 + 44^4 = 11^4 (1^4 + 2^4 + 4^4) \\ = 11^4 \cdot 273 \\ = 11^4 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$$

olduğundan tam kare bölenler $(11^2)^2$ sayısının tam kare bölenleri kadardır ve $(2 + 1) = 3$ bulunur.

Test 10.13

- A) 12 B) 32 C) 20 D) 16 E) 18

Çözüm : x sayısı 240'ın pozitif bölenleri olabilir. Bu durumda $y = \frac{240}{x}$ olacaktır.

$$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$$

olduğundan x sayısı $(4+1)(1+1)(1+1) = 20$ sayı olabilir. O halde, 20 tane (x, y) sıralı ikilisi bulunabilir.

Test 10.14

- A) 12 B) 32 C) 20 D) 16 E) 18

Çözüm : $360 = 2^3 3^2 5$ olduğundan tüm bölenler $2^a 3^b 5^c$ formundadır. Bölenlerin çift olması için $a \in \{1, 2, 3\}$ olması gerekir. $b \in \{0, 1, 2\}$ ve $c \in \{0, 1\}$ olduğundan $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ çift pozitif böleni vardır.

Test 10.15

- A) 1080 B) 1320 C) 1200 D) 1800 E) 1092

Çözüm : $360 = 2^3 3^2 5$ olduğundan çift bölenlerin toplamı

$$(2^1 + 2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5) = 1092$$

bulunur.

Test 10.16

- A) 1080 B) 1210 C) 860 D) 936 E) 1092

Çözüm :

$$(2^2 + 2^3)(1 + 3 + 3^2)(1 + 5) = 936$$

bulunur.

Test 10.17

- A) 1440 B) 1320 C) 1488 D) 1760 E) 1260

Çözüm : $1800 = 2^3 3^2 5^2$ olduğundan 4'ün katı olan ama 9 ile tam bölünemeyen pozitif tam sayı bölenlerinin toplamı

$$(2^2 + 2^3)(1 + 3)(1 + 5 + 5^2) = 1488$$

bulunur.

Test 10.18

- A) 32 B) 12 C) 18 D) 24 E) 36

Çözüm :

$$162 \cdot 10^9 = 2 \cdot 3^4 \cdot 2^9 \cdot 5^9 = 6 \cdot 27^1 \cdot 8^3 \cdot 125^3$$

olduğundan tam küp olan tam bölen sayısı $27^a 8^b 125^c$ formundadır. $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$ ve $c \in \{0, 1, 2, 3\}$ olduğundan tam küp bölen sayısı $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ bulunur.

Test 10.19

- A) Sadece 63 B) 63 ve 88 C) 63 ve 72

- D) 27 ve 88 E) 32 ve 63

Çözüm : Kuvvetli sayı tanımına göre n sayısının bir p asal sayısının kuvveti en az 2 olmalıdır ki p^2 ile de tam bölünebilsin.

$$27 = 3^3, \quad 32 = 2^5, \quad 72 = 2^3 \cdot 3^2$$

sayıları kuvvetli sayılardır. Fakat,

$$63 = 7 \cdot 3^2 \quad \text{ve} \quad 88 = 2^3 \cdot 11$$

sayıları kuvvetli sayı değildir. İlki 7^2 ile, ikincisi de 11^2 ile bölünmez.

Test 10.20

- A) 496 B) 316 C) 298 D) 560 E) 480

Çözüm : Soruya göre, 0 ve 4 rakamlarıyla oluşturulacak sayının 3 ve 5 ile tam bölünmesi gerekiyor. 5 ile bölünebilmesi için son rakamı 0 olmalıdır. 3 ile bölünen en küçük sayıyı elde etmek için en az iki tane 4 ve 1 tane 7 kullanılmalı ki rakamları toplamı 15 olsun. Buna göre,

$$n = \frac{4470}{15} = 298$$

istenen şekildeki en küçük pozitif tam sayıdır.

Test 10.21

- A) 4 B) 0 C) 6 D) 3 E) 1

Çözüm : 1 ve 6 rakamlarıyla oluşturulacak sayının 9 ve 11 ile tam bölünmesi gerekiyor. 9 ile bölünebilmesi için rakamları toplamı 9'un katı olması gerekir. Eğer 1 tane 6 kullanılırsa, üç tane 1 kullanılmalıdır. Fakat, üç tane 1 ve bir tane 6 ile 11'in katı olan bir sayı oluşturulamaz. Bunu 11 ile bölünebilme kuralını göz önüne alarak kolayca görebilirsiniz. O halde, 2 tane 6 kullanmalıyız. O halde geriye 6 tane de 1 kullanmamız gerekecek. 11 ile tam bölünecek en küçük sayıyı

$$11111166$$

biçiminde seçebiliriz. 11 ile bölünme kuralına göre,

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 6 + 6 = 0$$

olduğundan 11 ile tam bölünecektir. İki 6 rakamını yan yana seçmemiz gerektiği açıktır. Böylece, n sayısı en az

$$\frac{11111166}{99} = 11234$$

bulunur. 9 ile bölümünden kalan 4'tür.

Test 10.22 UAMO-2024

- A) 217 B) 209 C) 206 D) 203 E) 211

Çözüm : Sayımız ABC olsun.

Yüzler basamağında $A = 1$ olan tüm sayılar koşulu sağlar.

$$\{100, 101, \dots, 199\} : 100 \text{ sayı.}$$

Yüzler basamağında $A = 2$ olan tüm çift sayılar koşulu sağlar.

$$\{200, 202, 204, \dots, 298\} : \frac{298 - 200}{2} + 1 = 50 \text{ sayı.}$$

Yüzler basamağında $A = 3$ olan ve 3 ile tam bölünen sayılar

$$\{300, 303, 306, \dots, 399\} : \frac{399 - 300}{3} + 1 = 34 \text{ sayı.}$$

Yüzler basamağında $A = 4$ olan ve 4 ile tam bölünen sayılar

$$\{400, 404, 408, \dots, 496\} : \frac{496 - 400}{4} + 1 = 25 \text{ sayı.}$$

O halde, toplam $100 + 50 + 34 + 25 = 209$ sayı vardır.

Test 10.23

- A) 5 B) 0 C) 6 D) 3 E) 1

Çözüm : Sayının son rakamı 5 olmalıdır ki 5 ile tam bölünsün. En büyük asal rakam 7 olduğundan 7 basamaklı sayının ilk 4 basamağını 7 alalım. Böylece ilk dört rakam 11'in kat olacağından son üç rakama odaklanabiliriz.

$$\begin{aligned} 11 \mid 7777AB5 &\Rightarrow 11 \mid AB5 \\ &\Rightarrow 11 \mid A + 5 - B \end{aligned}$$

olmalıdır. A ve B asal sayı olacak şekilde tek durum vardır. $A = 2$ ve $B = 7$. O halde, istenen şekildeki en büyük sayı

$$7777275$$

bulunur. Bu sayının 9 ile bölümünden kalan 6'dır.

Test

10.24 AMC8-2016



A) 5 B) 2 C) 6 D) 3 E) 1

Çözüm : BCD sayısı 5 ile bölünüyorsa $D = 5$ olması gerekir. ABC sayısı 4 ile bölünebiliyorsa, son iki basamak yani BC sayısı 12, 32, 24 sayılarından biri olabilir. Yani, $C = 2$ veya $C = 4$ olabilir. Şimdi ayrı ayrı inceleyelim.

i) $C = 2$ ise, $CDE = 25E$ sayısının 3 ile tam bölünebilmesi $E = 2$ veya $E = 5$ olmalı. Fakat bu iki rakamı zaten kullandık. O halde $C = 2$ olamaz.

ii) $C = 4$ ise, $CDE = 45E$ sayısının 3 ile tam bölünebilmesi $E = 3$ olmalıdır.

Böylece, AB453 elde edilir. ABC sayısı 4 ile bölünebilmesi için $B = 2$ ve dolayısıyla son rakam da $A = 1$ bulunur.

Test

10.25 AMC8-2016



A) 5 B) 9 C) 6 D) 3 E) 7

Çözüm : N sayısı 10 ile bölündüğünde 3 kalanını veriyorsa son rakamı 3'tür.

13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93

sayılarından 9'a bölündüğünde 1 kalanını veren sadece 73 sayısıdır. 73 sayısının 11 ile bölündüğünde $73 - 66 = 7$ kalanı elde edilir.

Test

10.26



A) 6 B) 4 C) 5 D) 3 E) 1

Çözüm : Bir sayının 330 ile bölünebilmesi için hem 10, hem 3 hem de 11 ile tam bölünebilmesi gerekir.

10 ile bölünebilmesi için son rakamın yani E'nin 0 olması gerekir.

3 ile bölünebilme kuralı rakamları toplamının 3'ün katı olması durumunda mümkündür. Geri kalan 4 rakamı nasıl yerleştirirsek yerleştirelim zaten 3 ile bölünecektir.

11 ile bölünebilme durumunu kontrol edelim. 11 ile bölünebilme kuralına göre

$$5 - A + 7 - 9 + B - 6 + C - 0 + 2 - D + 3 - 0$$

değerinin 11'in katı olması gerekir. Bu ise,

$$B + C + 2 = A + D$$

durumunda mümkündür.

$$\{A, B, C, D\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

olduğundan eşitliğin sağlanabilmesi için,

$$B + C = 6 \text{ ve } A + D = 4$$

olması gerekir. Buna göre, $\{B, C\} \in \{2, 4\}$ ve $\{A, D\} \in \{1, 3\}$ olabilir. O halde, E kesin belirli yani 0'dır. B için 2 seçenek ve A için 2 seçenek vardır. A ve B belirli iken C ve D tek türlü belirli olacaktır. O halde, istenen şekilde sadece 4 sayı vardır.

Test

10.27



A) 16 B) 14 C) 15 D) 17 E) 13

Çözüm : $99 = 3^2 \cdot 11$ sayısı toplamasal değildir : $3 + 11 = 14$.

$98 = 2 \cdot 7^2$ sayısı toplamasal değildir : $2 + 7 = 9$.

$96 = 2^5 \cdot 3$ sayısı bir toplamasal sayıdır. Çünkü $2 + 3 = 5$ 'de asaldır.

İki basamaklı en büyük toplamasal sayı 96 ve rakamları toplamı 15 bulunur.

Test 10.28

- A) 60 B) 58 C) 63 D) 48 E) 56

Çözüm : Saatte 1 dk geri kalan saat, 60 saatte 1 saat geri kalır. O halde,

$$12 \cdot 60 = 720 \text{ saat} = \frac{720}{24} = 30 \text{ gün}$$

sonra doğru zamanı gösterir.

Saatte 1, 5 dk geri kalan saat ise 40 saatte 1 saat geri kalır ve

$$12 \cdot 40 = 480 \text{ saat} = \frac{480}{24} = 20 \text{ gün}$$

sonra doğru zamanı gösterir.

$$\text{EKOK} (30, 20) = 60$$

olduğu için iki saat birlikte ilk kez 60 gün sonra doğru zamanı gösterirler.

Test 10.29

- A) 18 B) 14 C) 15 D) 13 E) 16

Çözüm : Toplamasal sayılar $a, b, c, d > 1$ olmak üzere,

$$n \in \{2^a 3^b, 2^a 5^b, 3^a 5^b 11^c, \dots\}$$

biçiminde olmalıdır. Fakat, $3^a 5^b 11^c > 100$ olacağından sadece $2^a 3^b$ ve $2^a 5^b$ şeklinde olabilir. Buna göre,

$$\begin{aligned} 2^a 3^b &\Rightarrow a = 1 \Rightarrow b \in \{1, 2, 3\} \\ &\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b \in \{1, 2\} \\ &\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b \in \{1, 2\} \\ &\Rightarrow a = 4 \Rightarrow b \in \{1\} \\ &\Rightarrow a = 5 \Rightarrow b \in \{1\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2^a 5^b &\Rightarrow a = 1 \Rightarrow b \in \{1, 2\} \\ &\Rightarrow a = 2 \Rightarrow b \in \{1\} \\ &\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b \in \{1\} \\ &\Rightarrow a = 4 \Rightarrow b \in \{1\} \end{aligned}$$

olabilir. O halde, $3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14$ toplamasal sayı vardır.

Test 10.30

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 0

Çözüm : İki sayının ikisi de bir m sayısına tam bölünüyorsa, bu sayıların herhangi tam sayı katlarının toplamaları da m sayısına tam bölünür. Yani, X ve Y sayıları m ile tam bölünüyorsa $kX + nY$ sayısı da m sayısına tam bölünür.

I. Doğru : $(a + 2b) + (a - 3b) = 2a - b$ sayısı 5 ile tam bölünür.

II. Yanlış : $\text{EBOB}(a, b) = 5$ olmayabilir. Örneğin, $a = 3$ ve $b = 1$ için $a + 2b$ ve $a - 3b$ sayıları 5 ile tam bölünür ve $\text{EBOB}(a, b) = 1$ 'dir.

III. Yanlış : b sayısı 5'in katı olmayabilir.

IV. Doğru : 5 ile tam bölünen $a + 2b$ ifadesinde a sayısı 5'in katıysa b sayısı da 5'in katı olmalıdır.

V. Doğru : $a^2 - ab - 6b^2 = (a + 2b)(a - 3b)$ olduğundan çarpım iki kez 5 ile tam bölünür, yani 25 ile tam bölünür.

VI. Doğru : $3(a + 2b) - 2(a - 3b) = a + 12b$ olduğundan 5 ile tam bölünür.

Test 10.31

- A) 165 ve 375 B) 165 ve 750 C) 175 ve 750
D) 175 ve 375 E) 145 ve 750

Çözüm : a ve b sayılarının çarpımı

$$\begin{aligned} a \cdot b &= EBOB(a, b) \cdot EKOK(a, b) \\ &= 15 \cdot 360 \\ &= 5400 \end{aligned}$$

olmalıdır. a ve b sayılarının her ikisi de 15'in katı olmalıdır. 15'ten büyük bir sayının katı olamazlar. Buna göre,

$$a = 15 \quad \text{ve} \quad b = 15 \cdot 24 = 360$$

alınırsa

$$a + b = 15 + 360 = 375$$

en büyük değerdir. En küçük değeri için de 24 çarpanını a ve b sayılarına dağıtmamız gerekir. 2 çarpanları birine, 3 çarpanları diğerine dağıtılmalı ki, EBOB değişmesin.

$$a = 15 \cdot 8 = 120 \quad \text{ve} \quad b = 15 \cdot 3 = 45$$

alınırsa,

$$a + b = 120 + 45 = 165$$

olur. Bu değer en küçük değerdir.

Test 10.33 UOMO-B-2019

- A) 12 B) 11 C) 18 D) 17 E) 15

Çözüm : Pozitif tam bölen sayısı

$$(20 + 1) \quad \text{veya} \quad (2 + 1)(6 + 1)$$

biçiminde hesaplanmış olabilir. O halde bu sayı p ve q asal sayılar olmak üzere p^{20} veya $p^2 q^6$ formundadır. İlk formdaki en küçük sayı 2^{20} ve ikinci formdaki en küçük sayı

$$2^6 3^2 = 576$$

olduğundan tam olarak 21 pozitif tam bölene sahip en küçük pozitif sayı 576 bulunur. Rakamları toplamı da 18 bulunur.

Test 10.34 UOMO-B-2018

- A) 35 B) 52 C) 44 D) 50 E) 38

Çözüm : $n = ABCD00$ biçimindeki sayıları arıyoruz. Bu sayının 7, 11 ve 13 ile bölümünden kalan 1 ise 1 eksiğinin yani,

$$n - 1 = ABCD00 - 1$$

sayısının 7, 11 ve 13 ile, kısaca $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ ile tam bölünmesi gerekir. Bir sayı 1001 ile tam bölünüyorsa $ABCABC$ formunda olabilir. Bir fazlasının son iki rakamının 0 olması için, B ve C rakamlarını 9 alalım. O halde, sayımız

$$A99A99$$

biçiminde olmalıdır. $A = 9$ alırsak 1 fazlası 7 basamaklı olur ve koşul sağlanmaz. O halde, rakamları toplamının en büyük değeri için $A = 8$ alabiliriz. Böylece, $ABCABC = 899899$ ve

$$n = 899899 + 1 = 899900$$

bulunur. Rakamları toplamı $27 + 8 = 35$ bulunur.

Test 10.32 UOMO-2014

- A) 325 B) 315 C) 335 D) 360 E) 355

Çözüm : A, B ve C sayıları n nin farklı bölenleri olmak üzere

$$n = A + B + C$$

olsun. O halde

$$n = Aa = Bb = Cc$$

olacak şekilde farklı a, b, c pozitif tam sayıları vardır Bu durumda

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

elde edilir. Kolayca görüleceği üzere bu eşitliği sağlayan farklı pozitif tam sayı üçlüsü sadece 2, 3, 6 dır. O halde şartın sağlanması için gerek ve yeter şart n sayısının 6 ile tam bölünmesidir. 2014 ten küçük 6 ile tam bölünen 335 pozitif tam sayı vardır.

Test 10.35

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 0

Çözüm : n sayısının pozitif bölen sayısı 101 olsun. Bu durumda

$$n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$$

olmak üzere,

$$PBS = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \cdots (a_k + 1) = 101$$

olması gerekir. Sağ taraf bir tek sayı olduğundan sol taraftaki tüm çarpanlar tek sayı olmalıdır. Bu ise, $a_1, a_2, \dots, a_k$ sayılarının çift sayı olması demektir. Bunların tamamı çift sayı olursa, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ sayısı bir sayının karesi olur ki problemde verilen koşulla çelişir. O halde, istenen şekilde sayı yoktur.

Test 10.36

- A)
- $\frac{103}{6}$
- B) 8 C)
- $\frac{93}{6}$
- D) 6 E)
- $\frac{104}{6}$

Çözüm :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{48} + \frac{47}{48}\right)}_1 + \underbrace{\left(\frac{5}{48} + \frac{43}{48}\right)}_1 + \cdots + \underbrace{\left(\frac{23}{48} + \frac{25}{48}\right)}_1$$

ve $48 = 2^4 \cdot 3$ olduğundan

$$E(48) = (2^4 - 2^3)(3^1 - 3^0) = 16$$

ve dolayısıyla istenen toplam $16 \div 2 = 8$ bulunur.

Test 10.37

- A) 75 B) 67 C) 71 D) 65 E) 74

Çözüm : $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ olduğundan verilen eşitliği

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot a! = 7 \cdot b^3$$

biçiminde yazabiliriz. Sağ tarafta 7 olduğu için, a en az 7 olmalıdır. Böylece,

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7! = 7 \cdot b^3$$

ise

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = b^3 \Rightarrow 2^6 3^3 5^3 = b^3$$

elde edilir. Buna göre, $b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ olacaktır. $a + b$ en az 67 olur.

Test 10.38

- A) 5 B) 2 C) 6 D) 3 E) 4

Çözüm : Koşullara uygun en küçük sayıyı bulalım. 5 ile bölündüğünde 3 kalanını veren sayıların kümesini A ile, 7 ile bölündüğünde 4 kalanını veren sayıların kümesini B ile, 11 ile bölündüğünde 7 kalanını veren sayıların kümesini de C ile gösterelim.

$$A = \{3, 8, 13, 18, 23, 28, \dots\}$$

$$B = \{4, 11, 18, 25, \dots\}$$

$$C = \{7, 18, 29, \dots\}$$

kümelerinden üç koşulu da sağlayan en küçük sayının 18 olduğunu buluruz. O halde, üç koşulu sağlayan sayıların kümesini

$$A \cap B \cap C = \{18 + k(5 \cdot 7 \cdot 11) : k \in \mathbb{Z}^+\}$$

biçiminde gösterebiliriz. Yani, $18'e$ $5 \cdot 7 \cdot 11 = 385$ ilave edeceğiz.

$$18 + 1(5 \cdot 7 \cdot 11) = 403,$$

$$18 + 2(5 \cdot 7 \cdot 11) = 788,$$

$$18 + 3(5 \cdot 7 \cdot 11) = 1173,$$

olduğundan üç basamaklı sadece iki sayı vardır.

Test 10.39

- A) 130 B) 120 C) 180 D) 196 E) 144

Çözüm : $\text{EBOB}(a, b) = 15$ olduğundan a ve b sayılarının her ikisi de 3 ve 5 ile bölünmelidir. Diğer yandan, her iki sayının da 26 pozitif böleni varsa

$$26 = 1 \cdot 26 = 2 \cdot 13$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$a = 3^1 \cdot 5^{12} \text{ ve } b = 5^1 \cdot 3^{12}$$

olması gerekir. O halde, $a \cdot b = 3^1 \cdot 5^{12} \cdot 5^1 \cdot 3^{12} = 3^{13} 5^{13}$ olduğundan $(13 + 1)(13 + 1) = 14^2 = 196$ tam böleni vardır.

Test 10.40

- A) 45 B) 46 C) 47 D) 42 E) 49

Çözüm : 41, 43 ve 47 sayıları asal olduğu için sıraya alamayız. 49 ile ortak böleni olan tek sayı 42 olduğundan bu iki sayı yan yana olmalıdır. 49'u en sona, 42'yi de bir öncesine koyalım.

$$42, 49$$

Böylece, geriye 44, 45, 46, 48 sayıları kaldı. O halde,

$$44, 46, 48, 45, 42, 49 \text{ veya } 46, 44, 48, 45, 42, 49$$

biçiminde sıralayabiliriz. Dördüncü sayı 45 olmalıdır.

Test 10.41 UOMO-B-2018

- A) 0 B) 2 C) 4 D) 3 E) 5

Çözüm :

$$\begin{array}{r|l} n & a \\ - & \\ \hline & b \end{array} \quad \begin{array}{r|l} n & b \\ - & \\ \hline & a - 2 \end{array}$$

biçiminde verilmiş. Kalan her zaman bölenden küçük olmalıdır. Buna göre,

$$b < a \text{ ve } a - 2 < b$$

yazılabilir. Bu iki eşitsizliği

$$a - 2 < b < a$$

biçiminde yazarsak $b = a - 1$ olması gerektiği görülür. Buradan, ilk bölmeye göre n sayısının 1 fazlası a ile tam bölünür. İkinci bölmeye göre de n sayısının 1 fazlası $b = a - 1$ ile tam bölünür.

O halde, verilen sayılardan 1 fazlası ardışık iki sayının katı olanlar özel sayıdır.

$$109 + 1 = 110 = 10 \times 11 \text{ ise özel sayı}$$

$$119 + 1 = 120 = 3 \cdot 4 \cdot 10 \text{ ise özel sayı}$$

$$129 + 1 = 130 = 2 \times 5 \times 13 \text{ özel sayı olamaz.}$$

$$139 + 1 = 140 = 4 \cdot 5 \cdot 7 \text{ ise özel sayı}$$

$$149 + 1 = 150 = 5 \cdot 6 \cdot 5 \text{ ise özel sayı.}$$

Yani 4 tanesi özel sayıdır.

Test 10.42

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 0

Çözüm :

$$ab - a - b + 1 = 24 \Rightarrow (b - 1)(a - 1) = 24,$$

$$bc - b - c + 1 = 12 \Rightarrow (b - 1)(c - 1) = 12,$$

$$ac - a - c + 1 = 8 \Rightarrow (a - 1)(c - 1) = 8,$$

Taraf tarafa çarparsak

$$(a - 1)^2 (b - 1)^2 (c - 1)^2 = 8 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8$$

eşitliğinden $(b - 1)(a - 1)(c - 1) = 8 \cdot 3 \cdot 2 = 48$ olur.

$(b - 1)(a - 1) = 24$ olduğu göz önüne alınırsa, $c - 1 = 2$ ve $c = 3$ bulunur.

Test 10.43

- A) ab B) $ab + 1$ C) $(a - 1)b$
D) $ab - 1$ E) $(a - 1)(b - 1)$

Çözüm : $a \cdot b$ sayısından küçük $a \cdot b$ ile aralarında asal olmayan sayılar a veya b ile bölünmelidir. a ile bölünen $b - 1$ sayı vardır :

$$\{a, 2a, 3a, \dots, (b - 1)a\}$$

ve b ile bölünen $a - 1$ sayı vardır :

$$\{b, 2b, 3b, \dots, (a - 1)b\}.$$

Buna göre, $a \cdot b$ 'den küçük a veya b ile bölünemeyen sayıların sayısı

$$(a \cdot b - 1) - (a - 1) - (b - 1) = ab - b - a + 1 = (a - 1)(b - 1)$$

elde edilir.

2. Yol. Euler değerini hesaplayabiliriz.

$$E(a \cdot b) = (a^1 - a^0)(b^1 - b^0) = (a - 1)(b - 1)$$

elde edilir.

Test 10.44 UOMO-B-2022

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 6

Çözüm : $n = 1$ olamaz. 4'ün 3 böleni vardır.

$n = 2$ olabilir. 8'in $\{1, 2, 4, 8\}$ olmak üzere 4 böleni vardır.

$n = 3$ olabilir. 12'nin $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ olmak üzere 6 böleni vardır.

$n \geq 4$ olsun. $1, 2, \dots, 4n$ sayılarından $2n$ tanesi $4n$ sayının böleni olmalı. $2n$ sayısından büyük olan

$$2n + 1, 2n + 2, \dots, 4n - 1$$

sayılarından hiçbirisi $4n$ sayısının böleni olamaz. O halde $2n - 1$ veya $2n - 2$ sayılarından en az biri $4n$ 'in böleni olmalıdır.

$$2n - 1 \mid 4n \Rightarrow 2n - 1 \mid 4n - 2(2n - 1) = 2,$$

olması mümkün değildir. Bir tek sayı 2'nin böleni olamaz.

$$2n - 2 \mid 4n \Rightarrow 2n - 2 \mid 4n - 2(2n - 2) = 4$$

$$\Rightarrow n - 1 \mid 2$$

olması da mümkün değildir. Çünkü, bunu sağlayan sayılar 4'den küçük olabilir. $n \geq 4$ için sağlanmaz.

Test 10.45

- A) 130 B) 58 C) 170 D) 146 E) 74

Çözüm : Verilen bilgilerden

$$E(pq) = (p - 1)(q - 1) = 24$$

ve $\mathcal{PBT} = \frac{p^2 - 1}{p - 1} \frac{q^2 - 1}{q - 1} = (1 + p)(1 + q) = 48$ yazılabilir. Bu iki eşitlik açılsın

$$pq - q - p + 1 = 24,$$

$$pq + q + p + 1 = 48$$

olur. Bu iki denklemin toplamından $2pq + 2 = 72$ ve

$$pq = 35 = 7 \cdot 5$$

elde edilir. O halde, $p^2 + q^2 = 7^2 + 5^2 = 74$ olur.

Test 10.46

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 3 E) 0

Çözüm :

$$a(c + 5b) = 4bc$$

eşitliğine göre a asal sayısı için üç durum olabilir.

$$a = 2, a = b \text{ veya } a = c.$$

i) $a = 2$ ise $c + 5b = 2bc \Rightarrow 2bc - c = 5b$ eşitliğine göre,

$$c(2b - 1) = 5b$$

olur. $5b > 2b - 1$ olduğundan $c = 5$ olamaz. O halde, $c = b$ ve $2b - 1 = 5$ eşitliğinden $c = b = 3$ elde edilir. Böylece, $(2, 3, 3)$ bir çözümdür.

ii) $a = b$ ise $c + 5b = 4c \Rightarrow 3c = 5b$ eşitliğinden $c = 5$ ve $b = 3$ olur. O halde, $(3, 3, 5)$ bir çözümdür.

iii) $a = c$ ise, $c + 5b = 4b \Rightarrow c = -b$ olur ki, buradan çözüm gelmez.

Sonuç olarak, verilen eşitliği sağlayan sadece iki (a, b, c) asal sayı üçlüsü vardır.

Test 10.47

A) 13 B) 12 C) 17 D) 11 E) 10

Çözüm :

$$2a^2 - ab + 7a = p$$

ise

$$a(2a - b + 7) = p$$

eşitliğine göre, p asal sayı ve $a > 1$ olduğundan

$$p = a \text{ ve } 2a - b + 7 = 1$$

olur.

$$2a + 6 = b \text{ ve } p = a$$

olduğundan b sayısının alabileceği en küçük değeri için a en küçük tek asal sayı seçilmelidir. Buna göre, $a = 3$ alınırsa,

$$b = 12$$

elde edilir.

Test 10.48

A) 60 B) 58 C) 70 D) 46 E) 74

Çözüm :

$$2a^2 - 3ab + 5a = p$$

ise

$$a(2a - 3b + 5) = p$$

eşitliğine göre, p asal sayı olduğundan

$$p = a \text{ ve } 2a - 3b + 5 = 1$$

olmalıdır. Buradan,

$$b = \frac{2 \cdot a + 4}{3} \text{ ve } p = a$$

yazılabilir. $p = a$ üç basamaklı bir asal sayı ise, $a = 101$ için b tam sayı olamaz. O halde, $a = 103$ alınırsa

$$b = \frac{2 \cdot 103 + 4}{3} = 70$$

elde edilir.

Test 10.49

A) 1 B) 2 C) 0 D) 3 E) 4

Çözüm :

$$231p + 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot p$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot p$$

biçiminde yazalım. $(x - 1)$ ve $(x + 1)$ ardışık tek sayılardır. Sağ taraf ardışık iki tek sayının çarpımı olmalıdır. Buna göre, kontrol edersek

$$x - 1 = 3 \cdot 11 \text{ ise } x + 1 = 7 \cdot 5$$

olabileceği görülür. O halde $p = 5$ ve $x = 34$ bulunur.

MODÜLER ARİTMETİK

Alıştırma 11.1.



Çözüm : a) $1919 \equiv 5 \pmod{11}$, b) $1919 \equiv ? \pmod{17}$ c) $1919 \equiv 5 \pmod{n}$ ise $n = ?$ d) $x \equiv 5 \pmod{1919}$ ise $x = ?$

Alıştırma 11.2.



Çözüm : a) "123 sayısının 9 ile bölümünden kalan 6'dır."
b) "123 sayısının 11 ile bölümünden kalan kaçır?"
c) "123 sayısının n ile bölümünden kalan 11 ise n kaçır?"
d) "Hangi sayının 11 ile bölümünden kalan 7'dir?"

Alıştırma 11.3.



Çözüm :

$$\begin{aligned} 137 &\equiv 2 \pmod{5}, \\ 232 &\equiv 2 \pmod{5}, \\ 727 &\equiv 2 \pmod{5}, \\ 813 &\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned}$$

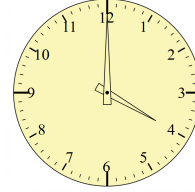
olduğundan 813 diğerlerine denk değildir.

$$137 \equiv 232 \equiv 727 \equiv 2 \pmod{5}$$

yazılabilir.

Günlük Hayatta Modüler Aritmetik

Alıştırma 11.4.



Çözüm : Dijital olmayan bir saat 12 saatte bir aynı saati gösterecektir. Buna göre, **mod 12'de** inceleyeceğiz.

$$123 \equiv 3 \pmod{12}$$

olduğundan, 4'den 3 saat sonrasını yani saat 7'yi gösterecektir.

Alıştırma 11.5.



Çözüm : Dijital saat 24 saatte bir aynı saati gösterecektir. Buna göre, **mod 24'de** inceleyeceğiz.

$$245 \equiv 5 \pmod{24}$$

olduğundan, 15 : 00'den 5 saat sonrasını yani saat 20 : 00'ı gösterecektir.

Alıştırma 11.6.



Çözüm : -111 'e 11'in 20 katını yani 220 eklemek kalamı yani denkleği değiştirmez.

$$-111 \equiv -111 + 220 = 109 \pmod{11}$$

olduğundan, -111 sayısına **mod 11'de** denk olan üç basamaklı en küçük pozitif tam sayı 109 bulunur.

Alıştırma

11.7.



Çözüm : 2023'den 10'un istediğimiz kadar katını çıkarabiliriz. Buna göre, $2030 = 203 \cdot 10$ çıkarırsak

$$2023 \equiv 2023 - 2030 \equiv -7 \pmod{10}$$

olur. Soruda iki basamaklı en büyük negatif tam sayı denilmiş. O halde bir tane daha 10 çıkaralım.

$$2023 \equiv -7 \equiv -17 \pmod{10}$$

olur. 2023 sayısına mod 10'de denk olan iki basamaklı en büyük **negatif** tam sayı -17 'dir.

Alıştırma

11.8.



Çözüm :

$$7x \equiv 5 + 11 \pmod{11} \equiv 5 + 44 \equiv 49 \pmod{11}$$

olduğundan $x \equiv 7 \pmod{11}$ elde edilir. Yanıt : 7.

Alıştırma

11.9.



Çözüm :

$$3x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow 3x \equiv 7 + 11 \equiv 18 \pmod{11}$$

denkliğinden $x \equiv 6 \pmod{11}$ olur. Fakat bizden en küçük iki basamaklı x pozitif tam sayısı istenmiş. Yanıt : $6 + 11 = 17$ olur.

Alıştırma

11.10.



Çözüm : Berk'in yaşı x olsun.

$$11x \equiv 5 \pmod{13} \Rightarrow 11x \equiv 5 + 39 \equiv 44 \pmod{13}$$

olduğundan $x \equiv 4 \pmod{13}$ elde edilir. O halde, Berk

$$4, 4 + 13 = 17, 4 + 26 = 30, 4 + 39 = 43, \dots$$

yaşında olabilir. Berk 18 yaşından büyük olduğuna göre yaşı en az 30 olabilir.

Alıştırma

11.11.



Çözüm :

$$1231 \equiv 1304 \pmod{m} \Rightarrow m \mid 1304 - 1231 = 73$$

olması gerektiğinden $m = 73$ elde edilir. 1231 sayısını 73 ile bölersek

$$\begin{array}{r|l} 1231 & 73 \\ -73 & \\ \hline 501 & \\ -438 & \\ \hline ??? & 63 \end{array}$$

olduğundan kalan 63 olur. Kısaca,

$$1231 \equiv 1304 \equiv 63 \pmod{73}$$

yazılabilir.

Alıştırma

11.12.



Çözüm :

a) $3x \equiv 6 \pmod{9}$

b) $5x \equiv 9 \pmod{10}$

c) $4^{777} \equiv x \pmod{9}$

d) $4x + 3y \equiv 6 \pmod{100}$

e) $x \equiv 2 \pmod{13}$

Alıştırma

11.13.



Çözüm :

$$\text{Ç.K.} = \{13k + 10 : k \in \mathbb{Z}\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Üç tane kökü : 10, 23 ve 36.

Denkliklerin Çözümü

Aıştırma 11.14.



Çözüm :

Basitleştirirsek

$$\begin{aligned}
 3x \equiv -8 \pmod{10} &\Rightarrow 3x \equiv 2 \pmod{10} \\
 &\Rightarrow 3x \equiv 12 \pmod{10} \\
 &\Rightarrow x \equiv 4 \pmod{10}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde çözüm kümesi

$$\text{Ç.K.} = \{10k + 4 : k \in \mathbb{Z}\}$$

bulunur.

Aıştırma 11.15.

Çözüm : $2015 \equiv 5 \pmod{15}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 5x \equiv -5 \pmod{15} &\Rightarrow 5x \equiv 10 \pmod{15} \\
 &\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{3}
 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde çözüm kümesi

$$\text{Ç.K.} = \{x = 3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$$

bulunur.

Aıştırma 11.16.



Çözüm :

$$\begin{aligned}
 111111x \equiv 3 \pmod{9} &\Rightarrow 6x \equiv 3 \pmod{9} \\
 &\Rightarrow 2x \equiv 1 \pmod{3} \\
 &\Rightarrow 2x \equiv 4 \pmod{3} \\
 &\Rightarrow x \equiv 2 \pmod{3} \\
 &\Rightarrow x = 3k + 2 : k \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde, istenen koşula uygun 100'den büyük en küçük tam sayı $x = 3 \cdot 33 + 2 = 101$ sayısındır.

Aıştırma 11.17.

Çözüm : İstenen sayıya x diyelim.

$$126x \equiv 6 \pmod{27}$$

denkliğini sağlayan x sayısını arıyoruz. 126 ve 27 sayılarının EBOB'u 9'dur ve 6 sayısı 9 ile tam bölünmediğinden çözüm yoktur.

Aıştırma 11.18.

Çözüm : Bizden istenen hangi b değerleri için

$$18x \equiv b \pmod{24}$$

denkliğini çözümünün olduğunu. 18 ve 24'ün EBOB'u 6'dır. O halde, çözüm olması için b sayısı da 6'nın katı olması gerekir. 24'den küçük 6'nın katları 0, 6, 12, 18 olduğundan sadece bu dört kalan elde edilebilir.

Denklemden Denklığe Geçiş

Aıştırma 11.19.



Çözüm : x ile ilgilendiğimiz için, denklemi mod 11'de göz önüne alırsak

$$\begin{aligned}
 3x \equiv 7 \pmod{11} &\Rightarrow 3x \equiv 18 \pmod{11} \\
 &\Rightarrow x \equiv 6 \pmod{11}
 \end{aligned}$$

elde edilir. $x = 11k + 6$ olduğundan $k = 9$ için $x = 99 + 6 = 105$ sayısı denklemi sağlayan üç basamaklı en küçük pozitif tam sayıdır.

Son Rakam Sorularında Mod

Alıştırma 11.20.



Çözüm : Bu sayıyı **mod 10**'da incelemek yeterlidir.

$$\begin{aligned} 2021 \cdot 2023 \cdot 2027 \cdot 2029 + 1 &\equiv 1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9 + 1 \pmod{10} \\ &\equiv 3 \cdot 63 + 1 \pmod{10} \\ &\equiv 3 \cdot 3 + 1 \pmod{10} \\ &\equiv 0 \pmod{10} \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 11.21.



Çözüm : Bu sayıyı **mod 100**'de incelemek yeterlidir.

$$\begin{aligned} 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 + 1 &\equiv 32 \cdot 82 + 1 \pmod{100} \\ &\equiv 24 + 1 \pmod{100} \\ &\equiv 25 \pmod{100} \end{aligned}$$

elde edilir.

Denklik Sistemleri

Alıştırma 11.22.



Çözüm : Taraf tarafa çarparsak

$$\begin{aligned} 7^{62} &\equiv 7^{27} \cdot 7^{33} \cdot 7^2 \equiv 5 \cdot 8 \cdot 49 \pmod{13} \\ &\equiv 1 \cdot 10 \pmod{13} \\ &\equiv 10 \pmod{13} \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma 11.23.



Çözüm : 7 ile bölündüğünde 5 kalanını veren sayıları sırasıyla yazalım.

$$1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, 50, \dots$$

Şimdi de, bunlardan 6 ile bölündüğünde 2 kalanını veren en küçük sayıyı bulalım. Bu sayı 8'dir. O halde, her iki koşulu da sağlayan sayılar 8'e $6 \cdot 7 = 42$ eklenerek bulunabilir. Yani $x = 8 + 42k$ biçimindedir. Buradan da $x = 8 + 2 \cdot 42 = 92$ bulunur.

Üslü İfadelerde Modüler Aritmetik

Alıştırma 11.24.



Çözüm : Sorumuzu kısaca, $3^{100} \equiv ? \pmod{7}$ şeklinde yazabiliriz. 3'ün kuvvetlerinin 7'ye bölümünden kalanları sırasıyla hesaplayalım. Bu işleme, 1 kalanını buluncaya kadar devam edeceğiz.

$$3^1 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$3^2 \equiv 9 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$3^3 \equiv 3^1 3^2 \equiv 3 \cdot 2 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$3^4 \equiv 3^1 3^3 \equiv 3 \cdot 6 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$3^5 \equiv 3^1 3^4 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 5 \pmod{7}$$

$3^6 \equiv 3^1 3^5 \equiv 3 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{7}$ (1 kalanını bulduk.)

Demek ki, $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$ 'dir. Buna göre, $92 = 6 \cdot 15 + 2$ olduğundan,

$$3^{92} = (3^6)^{15} 3^2 \equiv 1^{15} \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}$$

elde edilir. Yani, 3^{92} sayısının 7'ye bölümünden kalan 2'dir.

Aıştırma

11.25.



Çözüm : Sorumuzu kısaca, $2^{100} \equiv ? \pmod{10}$ şeklinde yazabiliriz.

$$2^1 \equiv 2 \pmod{10}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$$

$$2^3 \equiv 8 \pmod{10}$$

$$2^4 \equiv 2^1 2^3 \equiv 2 \cdot 8 \equiv 6 \pmod{10}$$

$$2^5 \equiv 2^1 2^4 \equiv 2 \cdot 6 \equiv 2 \pmod{10}$$

olduğunu gördük. Yani, 2'nin üssüne bağlı olarak, son rakam 2,4,8,6 olacaktır. Üs 4'ün katı olduğunda kalan 6 olacağından

$$2^{100} \equiv 6 \pmod{10}$$

bulunur.

Aıştırma

11.27. AMC8-2012



Çözüm : Bu sayıyı mod 10'da hesaplayacağız.

$$13^{2012} \equiv 3^{2012} \equiv ? \pmod{10}$$

değerini bulmalıyız.

$$3^1 \equiv 3 \pmod{10},$$

$$3^2 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$3^3 \equiv 7 \pmod{10}$$

$$3^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

olduğundan

$$3^{2012} \equiv (3^4)^{503} \equiv 1 \equiv 1 \pmod{10}$$

bulunur.

Aıştırma

11.28.



Çözüm : Sayının onlar basamağını bulabilmek için sayının son iki basamağını bulmaya odaklanmalıyız.

O halde, bu sayıyı mod 100'de hesaplayacağız.

$17^{40} \equiv 19^{40} \equiv 1 \pmod{100}$ olduğundan

$$17^{122} \cdot 19^{121} \equiv 17^2 \cdot 19^1 \equiv ? \pmod{100}.$$

$$\equiv 89 \cdot 19 \equiv 91 \pmod{100}$$

elde edilir. O halde, onlar basamağı 9 bulunur.

Aıştırma

11.26.



Çözüm : Bu sayıyı mod 10'da hesaplayacağız.

$$17^{17} \cdot 19^{19} \equiv 7^{17} \cdot 9^{19} \equiv ? \pmod{10}.$$

Önce $7^{17} \equiv ? \pmod{10}$ değerini bulalım.

$$7^1 \equiv 7 \pmod{10},$$

$$7^2 \equiv 9 \pmod{10},$$

$$7^3 \equiv 3 \pmod{10}$$

$$7^4 \equiv 1 \pmod{10}$$

olduğundan $17^{17} \equiv (17^4)^4 \cdot 17 \equiv 1 \cdot 17 \equiv 7 \pmod{10}$ bulunur.

Şimdi de $9^{19} \equiv ? \pmod{10}$ denliğini hesaplayalım.

$$9^{19} \equiv ? \pmod{10} \Rightarrow (-1)^{19} \equiv -1 \equiv 9 \pmod{10}$$

olduğundan,

$$7^{17} \cdot 9^{19} \equiv 7 \cdot 9 \equiv 3 \pmod{10}$$

bulunur. Yani, son rakam 3'tür.

Tam karelerde kalanlar

Alıştırma 11.29.



Çözüm : a)

$$n \equiv 1, 7, 9, 15 \pmod{16} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$n \equiv 3, 5, 11, 13 \pmod{16} \Rightarrow n^2 \equiv 9 \pmod{8}$$

olduğundan sadece 1 veya 9 kalanı elde edilebilir.

b) Bir çift sayıyı $2n$ biçiminde yazabiliriz. Dördüncü kuvveti $(2n)^4 = 16n^4$ olduğundan daima 16 ile tam bölünür. O halde, bir çift sayının dördüncü kuvvetinin 16 ile bölümünden sadece 0 kalanı elde edilir.

Alıştırma 11.30.



Çözüm :

$$A^2 \equiv 2 \pmod{3}$$

olamayacağından çözüm yoktur.

Fermat ve Euler Teoremleri

Alıştırma 11.31.



Çözüm : a) Fermat teoremine göre $n = 11 - 1 = 10$ olabilir.

b) $10^{100} \equiv 1 \pmod{101}$ olduğundan $10^{101} \equiv 10 \pmod{101}$ olur.

c) $5^6 \equiv 1 \pmod{7}$ olduğundan $5^{43} = 5^{42}5^1 = (5^6)^7 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{7}$ olur.

Alıştırma 11.32.



Çözüm : Fermat teoremine göre

$$11^{112} \equiv 1 \pmod{113}$$

olduğundan $11^{112} \equiv 11^{224} \equiv 11^{336} \equiv 1 \pmod{113}$ olur ki,

$$11^{112} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{113},$$

$$11^{224} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{113},$$

$$11^{336} + 1 \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod{113},$$

$$11^{448} + 112 \equiv 113 \equiv 0 \pmod{113},$$

olduğundan $11^{336} + 1$ dışındakiler 113 ile tam bölünür.

Alıştırma 11.33.



Çözüm : $77 = 7 \cdot 11$ olduğundan $3^n - 1$ sayısının 7 ve 11 ile ne zaman tam bölüneceğini inceleyelim. Fermat teoremine göre,

$$3^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$3^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$

olduğundan n sayısı hem 6 hem de 10'un katı olursa $3^n - 1$ sayısı 77 ile tam bölünür. O halde, $n = \text{EKOK}(6, 10) = 30$ alınırsa $3^n - 1$ sayısı 77 ile tam bölünür.

Aıştırma

11.34.



Çözüm : $(a, b, c, d, e) = (0, 0, 1, 1, -2)$ alınırsa

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = -30 \equiv 2 \pmod{4}$$

olduğundan daima 4 ile bölünmeyebilir. O halde, 60 ile de bölünmeyebilir.

Aıştırma

11.35. UOMO-B-2016



Çözüm : Fermat teoremine göre

$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

olduğunu kullanabiliriz. Buna göre, $a^5 \equiv a \pmod{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 &\equiv a + b + c + d + e \\ &\equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$a^3 \equiv a \pmod{3} \Rightarrow a^5 \equiv a^3 \equiv a \pmod{3}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 &\equiv a + b + c + d + e \\ &\equiv 0 \pmod{3} \end{aligned}$$

elde edilir. $a^5 \equiv a \pmod{5}$ olduğundan

$$\begin{aligned} a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 &\equiv a + b + c + d + e \\ &\equiv 0 \pmod{5} \end{aligned}$$

olur. Böylece, $a + b + c + d + e = 0$ koşulunu sağlayan a, b, c, d, e tam sayıları için

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5$$

ifadesinin daima 2, 3 ve 5 ile bölüneceği elde edilir. Bu 10 ve 30 ile daima bölündüğünü gösterir.

Şimdi mod 7'de inceleyelim. $(a, b, c, d, e) = (0, 0, 1, 1, -2)$ alınırsa

$$0^5 + 0^5 + 1^5 + 1^5 + (-2)^5 \equiv -30 \equiv 5 \pmod{7},$$

$$0^5 + 0^5 + 1^5 + 1^5 + (-2)^5 \equiv -30 \equiv 6 \pmod{9},$$

olur ki, 7 ve 9 ile bölünemediği birer örnek ile görmüş oluruz. O halde, 18, 21, 35 ve 45 ile her zaman bölünmeyebilir.

Soru Çözümleri

Aşağıdaki soruları önce kendiniz çözmeye çalışınız. Sonra çözümünü adım adım inceleyerek anlamaya çalışınız.

Aıştırma

11.36.



Çözüm : mod'da verilen ifade

$$500 + 700 \times 800 \equiv 5 + 7 \cdot 8 \equiv 61 \equiv 7 \pmod{9}$$

bulunur.

Aıştırma

11.37.



Çözüm : $20232023203 + 2023302 + 2025$ sayısı mod 2023 de

$$203 + 302 + 2 \equiv 507 \pmod{2023}$$

elde edilir.

Aıştırma

11.38.



Çözüm :

$$1! \equiv 1 \pmod{9}$$

$$2! \equiv 2 \pmod{9}$$

$$3! \equiv 6 \pmod{9}$$

$$4! \equiv 24 \equiv 6 \pmod{9}$$

$$5! \equiv 120 \equiv 3 \pmod{9}$$

$$6! \equiv 0 \pmod{9}$$

olduğundan

$$7! \equiv 8! \equiv \dots \equiv 2025! \equiv 0 \pmod{9}$$

elde edilir. Böylece verilen toplamın 9 ile bölümünden kalan $1 + 2 + 6 + 6 + 3 = 18 \equiv 0 \pmod{9}$ olur.

Alıştırma**11.39.****Çözüm :**

$$33^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$55^3 \equiv 3^3 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$77^3 \equiv 1^3 \equiv 1 \pmod{4}$$

$$99^3 \equiv 3^3 \equiv 3 \pmod{4}$$

olduğundan çarpımın 4 ile bölümünden kalan

$$1 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 3 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$$

olur.

Alıştırma**11.40.****Çözüm :** Verilen ifadeyi mod 1001'de göz önüne alırsak

$$1002n^2 + 999n + 1 \equiv n^2 - 2n + 1 \pmod{1001}$$

$$\equiv (n - 1)^2 \pmod{1001}$$

$$\equiv (101 - 1)^2 \pmod{1001}$$

$$\equiv 100^2 \pmod{1001}$$

$$\equiv 991 \pmod{1001}$$

olur.

Alıştırma**11.41.****Çözüm :**

$$13! + 12 \equiv 13 \cdot 12! + 12 \pmod{12! - 11}$$

$$\equiv 13 \cdot 12! - 13 \cdot 11 + 13 \cdot 11 + 12$$

$$\equiv 13 (12! - 11) + 155 \pmod{12! - 11}$$

$$\equiv 155 \pmod{11! - 10}$$

elde edilir.

Alıştırma**11.42.****Çözüm :** $15 \mid n + 13$ ve $13 \mid n + 15$ ise, $m, k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere,

$$n + 13 = 15k \text{ ve } n + 15 = 13m$$

yazılabilir. Böylece, $13m - 15 = 15k - 13$ olur. Bu eşitliği mod 13'de göz önüne alırsak

$$2k \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow k \equiv -1 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow k = 13p - 1$$

elde edilir. Buradan da

$$n = 15k - 13 = 15(13p - 1) - 13 = 195p - 28$$

olur ki, $p = 1$ için en küçük pozitif tam sayı $n = 167$ elde edilir.**Alıştırma****11.43.****Çözüm :**

202500 sayısını 41'e bölersek 1 kalanı elde edilir. Bunu kısaca,

$$202500 \equiv 1 \pmod{41}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$2025AB \equiv 0 \pmod{41}$$

olmasını istiyoruz. Diğer yandan,

$$2025AB = 202500 + AB \equiv 1 + AB \equiv 0 \pmod{41},$$

olması için $AB = 40$ olmalıdır. Böylece, $A + B = 4$ olur.

Aıştırma

11.44. UOMO-B-2015



Çözüm : Sayı 10'un katı ise mod 10'da 0 olması gerekir.

$$S \equiv 4n^2 + 8n + 8 \equiv 0 \pmod{10}$$

yazılabilir. Buradan da,

$$4n^2 + 8n + 8 = (2n + 2)^2 + 4 \equiv 0 \pmod{10}$$

denkliğinden

$$(2n + 2)^2 \equiv -4 \equiv 6 \pmod{10}$$

elde edilir. Yani, $(2n + 2)$ sayısının karesinin son basamağı 6 olmalıdır. Bunun için $2n + 2$ sayısının son basamağını 4 veya 6 olması gerekir. O halde,

$$2n + 2 = 204 \Rightarrow n = 101$$

n sayısının olabileceği en küçük üç basamaklı sayıdır.

$$2n + 2 = 196 \Rightarrow n = 97$$

ise n sayısının olabileceği en büyük iki basamaklı sayıdır. Bunların toplamı da 198 bulunur.

Aıştırma

11.46.



Çözüm :

$$2^{11} + 11! \equiv 2^5 \equiv 5 \pmod{9}$$

$$\text{ve } 39B1A \ 848 \equiv 6 + A + B \pmod{9}$$

$$6 + A + B \equiv 5 \pmod{9} \Rightarrow A + B \equiv 8 \pmod{9}$$

elde edilir. Buna göre, $A + B = 8$ veya 17 olabilir. Şimdi de 11 ile bölünebilmeye bakalım.

$$2^{11} + 11! \equiv 2 \pmod{11}$$

ve

$$-3+9-B+1-A+8-4+8 = 19-B-A \pmod{11}$$

olduğundan

$$19-B-A \equiv 2 \pmod{11}$$

ise

$$A + B = 17 \pmod{11}$$

elde edilir. O halde, $A + B = 17$ olur.

Aıştırma

11.45.



$$\text{Çözüm : } 1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1}$$

olduğundan $4 \cdot 11 = 44 \mid 5^{n+1} - 1$ olmalıdır. $5^{n+1} - 1$ sayısının 4 ve 11 ile n kaç olursa tam bölüneceğini inceleyelim. Fermat teoremine göre $5^3 \equiv 1 \pmod{4}$ olduğundan, $n + 1 = 3k$ olursa $5^{n+1} - 1$ sayısı 4 ile tam bölünür. Benzer şekilde, $5^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ olduğundan $n + 1 = 10k$ olursa $5^{n+1} - 1$ sayısı 11 ile tam bölünür. Sonuç olarak, $n + 1$ sayısının hem 3 hem de 10'un yani 30'un katı olması durumunda $5^{n+1} - 1$ sayısının 44 ile tam bölüneceğini buluruz. Yani, $n + 1 = 30k$ şeklinde olması gerekir. O halde, en büyük iki basamaklı n sayısı $n + 1 = 3 \cdot 30 \Rightarrow n = 89$ bulunur.

KONU SONU TESTİ (MODÜLER ARİTMETİK)

Test 11.1



- A) 1 B) 12 C) 14 D) 13 E) 15

Çözüm : 1919 sayısı 17 ile bölünürse kalan 15 elde edileceğinden

$$1919 \equiv 15 \pmod{17}$$

bulunur.

Test 11.2



- A) 199 B) 299 C) 499 D) 211 E) 201

Çözüm :

$$\begin{aligned} 911911 &= 911 \cdot 1000 + 911 \\ &\equiv 11 \cdot 100 + 11 \pmod{900} \\ &\equiv 1111 \equiv 211 \pmod{900} \end{aligned}$$

olur.

Test 11.3



- A) 10 B) 20 C) 15 D) 30 E) 25

Çözüm :

$$\begin{aligned} 1071107110 &= 1071 \cdot 10^6 + 1071 \cdot 10^2 + 10 \\ &\equiv 0 + 0 + 10 \equiv 10 \pmod{1071} \end{aligned}$$

Test 11.4



- A) 4 B) 2 C) 7 D) 3 E) 8

Çözüm :

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 11 \pmod{13} \Rightarrow 3x = 11 + 13 \pmod{13} \\ &\Rightarrow 3x \equiv 24 \pmod{13} \\ &\Rightarrow x \equiv 8 \equiv 8 + 13 = 21 \pmod{13} \end{aligned}$$

Test 11.5



- A) 4 B) 2 C) 7 D) 3 E) 5

Çözüm :

$$44 \equiv 5 \pmod{m} \Rightarrow m \mid 44 - 5 = 39$$

olduğundan $m \in \{1, 3, 13, 39\}$ olabilir. O halde en büyük m asal sayısı 13 bulunur. Rakamları toplamı 4 olur.

Test 11.6



- A) 4 B) 2 C) 7 D) 3 E) 5

Çözüm : $x \equiv 18 \pmod{19}$ olacak şekildeki en küçük üç basamaklı sayıyı arıyoruz.

$$x = 19k + 18$$

olduğundan $k = 5$ için $x = 19 \cdot 5 + 18 = 113$ elde edilir. Rakamları toplamı da 5'tir.

Test 11.7



- A) 0 B) 2 C) 7 D) 3 E) 5

Çözüm : 9 ile bölünebilme kuralına göre rakamları bir sayı mod 9'da rakamları toplamına denktir. $1 + 9 + 2 + 3 = 15$ olduğundan

$$\underbrace{192319231923 \cdots 1923}_{1923 \text{ tane } 1923} \equiv 1923 \cdot 15 \pmod{9}$$

$$\equiv 15 \cdot 6 \equiv 6 \cdot 6 = 36 \equiv 0 \pmod{9}$$

elde edilir.

Test 11.8



- A) 18 : 00 B) 22 : 00 C) 21 : 00 D) 23 : 00 E) 19 : 00

Çözüm :

$$341 \equiv 5 \pmod{24}$$

olduğundan, $17 : 00 + 5 : 00 = 22 : 00$ bulunur.

Test 11.9

- A) 0 B) 2 C) 7 D) 3 E) 5

Çözüm : $n = 24k + 19$ ise,

$$n \equiv 24k + 19 \equiv 19 \equiv 3 \pmod{8}$$

elde edilir.

Test 11.10

- A) 0 B) 2 C) 7 D) 6 E) 8

Çözüm :

$$n = 36k + 17 \equiv 17 \equiv 8 \pmod{9}$$

elde edilir.

Test 11.11

- A) 0 B) 2 C) 7 D) 9 E) 11

Çözüm : A5B sayısının 12 ile bölümünden kalan 5 ise

$$A5B \equiv 5 \pmod{12}$$

yazılabilir. Bizden A9B sayısının 12 ile bölümünden kalan sorulmuş. Bu sayı A5B sayısından 40 daha fazla. O halde,

$$A9B \equiv 5 + 40 = 45 \equiv 9 \pmod{12}$$

elde edilir.

Test 11.12

- A) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \end{cases}$ B) $\begin{cases} x \equiv 12 \pmod{5} \\ x \equiv 13 \pmod{11} \end{cases}$
- C) $\begin{cases} x \equiv 11 \pmod{12} \\ x \equiv 5 \pmod{13} \end{cases}$ D) $\begin{cases} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 11 \pmod{13} \end{cases}$
- E) $\begin{cases} x \equiv 7 \pmod{12} \\ x \equiv 2 \pmod{13} \end{cases}$

Çözüm :

$$\begin{cases} x = 12k + 5 \\ x = 13m + 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 11 \pmod{13} \end{cases}$$

Test 11.13

- A) 13 B) 11 C) 7 D) 9 E) 5

Çözüm : 12 ile bölündüğünde 5 kalanını veren pozitif sayıları sırayla yazalım.

$$5, 17, 29, 41, 53, 65, 78, \dots$$

Şimdi de 13 ile bölündüğünde 11 kalanını veren pozitif tam sayıları yazalım.

$$2, 15, 28, 41, 54, 67, 80, \dots$$

Görüldüğü gibi her ikisinde de ortak olan en küçük pozitif tam sayı 41 bulunur. Rakamları toplamı 5'tir.

Test 11.14

- A) 13 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Çözüm : 7 ile bölündüğünde 5 kalanını veren pozitif sayıları sırayla yazalım.

$$5, 12, 19, 26, 33, 40, 47, \dots$$

Şimdi de 13 ile bölündüğünde 11 kalanını veren pozitif tam sayıları yazalım.

$$3, 11, 19, 28, 35, 43, 51, \dots$$

Görüldüğü gibi her ikisinde de ortak olan en küçük pozitif tam sayı 19'dur. Diğer sayılar 19'a $7 \cdot 8 = 56$ eklenerek elde edilebilir. Yani,

$$x = 7 \cdot 8k + 19 = 56k + 19$$

formundadır. $k = 2$ için $x = 56 \cdot 2 + 19 = 131$ istenen şeklindeki üç basamaklı en küçük x pozitif tam sayısıdır.**Test 11.15 AMC10-2003**

- A) 1 B) 5 C) 7 D) 9 E) 3

Çözüm :

$$13^{2003} \equiv ? \pmod{10} \Rightarrow 3^{2003} \equiv ? \pmod{10}$$

değerini bulacağız.

$$3^4 = 81 \equiv 1 \pmod{10}$$

olduğundan,

$$3^{2003} \equiv 3^{2000} \cdot 3^3 \equiv 27 \equiv 7 \pmod{10}$$

bulunur.

Test 11.16

- A) 103 B) 101 C) 107 D) 106 E) 105

Çözüm :

$$\begin{aligned} 3^{20} - 2 \cdot 3^{10} + 107 &= 3^{20} - 2 \cdot 3^{10} + 1 + 106 \\ &= (3^{10} - 1)^2 + 106 \\ &\equiv 106 \pmod{3^{10} - 1} \end{aligned}$$

Test 11.17

- A) 103 B) 101 C) 107 D) 106 E) 105

Çözüm :

$$\begin{aligned} 5n^2 - 30n + 146 &= 5(n^2 - 6n + 9) + 101 \\ &= 5(n - 3)^2 + 101 \\ &\equiv 101 \pmod{(n - 3)} \end{aligned}$$

Test 11.18

- A) 1 B) 5 C) 7 D) 9 E) 3

Çözüm : Denklemi x için çözeceğimiz için y 'nin katsayısına göre mod alalım. Bu durumda, mod 11 için

$$\begin{aligned} 7x + 11y &= 51 \Rightarrow 7x \equiv 7 \pmod{11} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{11} \\ \text{ve } x &= 11k + 1 \text{ elde edilirdi ve } k = 9 \text{ için } x = 100 \text{ olur.} \\ \text{Rakamları toplamı } &1 \text{ 'dir.} \end{aligned}$$

Test 11.19

- A) 1 B) 5 C) 7 D) 9 E) 3

Çözüm : Denklemi x için çözeceğimiz için y 'nin katsayısına göre mod alalım. Bu durumda, mod 11 için

$$\begin{aligned} 8x + 11y &= 51 \Rightarrow 8x \equiv 7 \pmod{11} \\ \Rightarrow 8x &\equiv 18 \pmod{11} \\ \Rightarrow 4x &\equiv 9 \pmod{11} \\ \Rightarrow 4x &\equiv 9 + 11 \pmod{11} \\ \Rightarrow x &\equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

ve $x = 11k + 5$ elde edilirdi ve $k = 9$ için $x = 99 + 5 = 104$ olur. Rakamları toplamı 5'tir.

Test 11.20

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 5 E) 3

Çözüm : $A \equiv 111 \pmod{133}$ ve $B \equiv 33 \pmod{133}$ ise

$$A + B \equiv 111 + 33 = 144 \equiv 11 \pmod{133}$$

olur.

$$\begin{aligned} A + 2B &\equiv 111 + 2 \cdot 33 = 177 \pmod{133} \equiv 44 \pmod{133} \\ \text{olduğundan } 44 \div 11 &= 4 \text{ katıdır.} \end{aligned}$$

Test 11.21

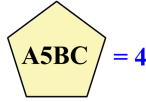
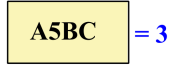
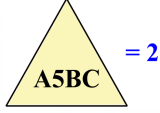
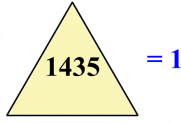
- A) 00 B) 27 C) 45 D) 90 E) 70

Çözüm :

$$\begin{aligned} 2021 \cdot 2023 \cdot 2027 \cdot 2029 + 1 &\equiv 21 \cdot 23 \cdot 27 \cdot 29 + 1 \pmod{100} \\ &\equiv 483 \cdot 783 + 1 \pmod{100} \\ &\equiv 83 \cdot 83 + 1 \pmod{100} \\ &\equiv 6889 + 1 \pmod{100} \\ &\equiv 90 \pmod{100} \end{aligned}$$

olur.

Test 11.22

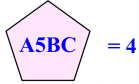


A) 7 B) 4 C) 5 D) 9 E) 1

Çözüm :



$$\begin{cases} A5BC \equiv 2 \pmod{3} \\ A5BC \equiv 3 \pmod{4} \\ A5BC \equiv 4 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow$$



biçiminde yazılabilir.

$$A5BC \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow C = 4 \text{ veya } 9 \text{ olabilir.}$$

Buna göre, $C = 4$ ise,

$$\begin{cases} C = 4 \text{ ise } A5B4 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow B \text{ yok.} \\ C = 9 \text{ ise } A5B9 \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow B \in \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{cases}$$

olur. Böylece, $C = 9$ iken B değerinin bir tek sayı olabileceğini gördük. Son olarak $A5BC$ sayısının 3 ile bölümünden 2 verilmiş. Buna göre,

$$A5B9 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow A + 5 + B + 9 \equiv A + B + 2 \equiv 2 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow A + B \equiv 0 \pmod{3}$$

$$\Rightarrow A + B \in \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

olacaktır. O halde, $C = 9$ olduğundan

$$A + B + C \in \{12, 15, 18, 21, 24, 27\}$$

olabilir.

Test 11.23 AMC8-2019



A) Salı B) Çarşamba C) Cuma D) Pazar E) Perşembe

Çözüm : 10-uncu, 20-nci, ... , 60-ıncı günleri mod 7 de hesaplayalım.

$$10 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$20 \equiv 6 \pmod{7}$$

$$30 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$40 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$50 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$60 \equiv 4 \pmod{7}$$

olduğundan, belirtilen günler için sadece 0 kalanı elde edilmez. Pazar günü kapalı olduğu için, 0 kalanı olan yani, bugünü pazar kabul edebiliriz. Kısaca, $Pazar \equiv 0 \pmod{7}$ biçiminde ifade edebiliriz. O halde, $10 \equiv 3 \pmod{7}$ olduğundan ilk kuponu Pazar gününden üç gün sonra yani çarşamba günü kullanacaktır.

Test 11.24



A) 7 B) 4 C) 5 D) 9 E) 6

Çözüm : Üç basamaklı $A5B$ sayısının 12 ile bölümünden kalan 5 ise, $A5B$ sayısının 3 ile bölümünden kalan

$$5 \equiv 2 \pmod{3},$$

4 ile bölümünden kalan ise

$$5 \equiv 1 \pmod{4}$$

olur. Yani, $A5B$ sayısının 3 ile bölümünden kalan 2 ve 4 ile bölümünden kalan da 1'dir. Buna göre, $A5B$ sayısının 4 ile bölümünden kalanın 1 olması için son iki rakamının oluşturduğu sayının 4 ile bölümünden kalanın 1 olması gerekir. Yani, B rakamı 3 veya 7 olabilir.

$$B = 3 \Rightarrow A53 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow A = 3, 6, 9$$

$$B = 7 \Rightarrow A57 \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow A = 2, 5, 8$$

olabilir. O halde, $A5B$ sayısı

$$\{353, 653, 953, 257, 557, 857\}$$

olabilir.

Test

11.25



A) 1 B) 4 C) 0 D) Sonsuz E) 4

Çözüm :

$2A^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 2A^2 \equiv 4 \pmod{3} \Rightarrow A^2 \equiv 2 \pmod{3}$
 olur. Fakat bir sayının karesinin 3 ile bölümünden kalan 2
 olamaz. O halde, çözüm yoktur.

Test

11.27

UOMO-B-2016



A) 0 B) 4 C) 5 D) 9 E) 1

Çözüm : a, b, c, p asal sayı ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$$p = a^2 + b^2 + c^2 = n^2 - 8$$

biçiminde yazabiliriz. p bir tek asal sayı olacağından a, b
 ve c asal sayılarının üçünün de tek asal veya iki tanesinin 2
 birini tek asal olması gerekir. Bu iki durumu inceleyelim.

i. a, b, c tek asallar olsun. Bir tek sayının karesinin 4 ile
 bölümünden kalan daima 1 olduğunu kullanalım.

$$p = 1 + 1 + 1 \equiv n^2 - 8 \pmod{4} \Rightarrow n^2 \equiv 3 \pmod{4}$$

olur, Fakat, bir tam sayının karesinin 4 ile bölümünden kalan
 3 olamaz. O halde, a, b ve c asallarından ikisinin 2 olması
 gerekir.

ii. $a = 2, b = 2$ ve c tek asal olsun. Böylece

$$p = 2^2 + 2^2 + c^2 = n^2 - 8$$

eşitliği elde edilir.

$$n^2 - c^2 = 16 \Rightarrow (n - c)(n + c) = 16$$

eşitliğine göre n tek olduğundan c de tek olmalıdır. Buradan,
 $n = 5$ ve $c = 3$ elde edilebilir. Dolayısıyla da

$$p = 5^2 - 8 = 17$$

bulunur.

Test

11.26



A) 6 B) 4 C) 0 D) 9 E) 2

Çözüm : Sorudaki verileri matematiksel olarak

$$AB \equiv a \pmod{13} \text{ ve } BA \equiv b \pmod{13}$$

olmak üzere $a + b = 13$ biçiminde yazabiliriz. Yani,

$$AB + BA \equiv 0 \pmod{13}$$

olmalıdır. $AB = 10A + B$ ve $BA = 10B + A$ yazarsak

$$11A + 11B \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 11(A + B) \equiv 0 \pmod{13}$$

$$\Rightarrow A + B \equiv 0 \pmod{13}$$

elde edilir. Buna göre, AB sayısı 49, 58, 67, 76, 85, 94
 olmak üzere 6 şanslı sayı vardır.

Test

11.28 UOMO-B-2015



A) 31 B) 52 C) 73 D) 68 E) 71

Çözüm : $m \mid n^2 + 5$ ve

$$m \mid (n+2)^2 + 3 = n^2 + 4n + 7$$

olmasını istiyoruz. Bu durumda,

$$m \mid (n^2 + 4n + 7) - (n^2 + 5) = 4n + 2$$

olması gerekir. Benzer düşünceyle

$$m \mid 4(n^2 + 5) - n(4n + 2) = 20 - 2n.$$

olmalıdır. Son ikisinden de

$$m \mid (4n + 2) + 2(20 - 2n) = 42$$

olması gerekir. O halde, m sayısı

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$$

sayısının bir böleni olmalıdır. Yani, istenen şartı sağlayan m sayıları 1, 2, 3, 6, 14, 21 ve 42 olarak bulunur. En büyük m sayısı 42 olur.

$$20 - 2n \equiv 0 \pmod{42} \Rightarrow n \equiv 10 \pmod{21}$$

elde edilir. $n = 10$ iken verilen sayılar tek sayı olacağından 2 ile dolayısıyla da 42 ile bölünmez. $n = 10 + 21 = 31$ için her iki sayı da 42 ile bölünecektir. Yanıt : $42 + 31 = 73$

Test

11.29

A) x sayısının 25 ile bölümünden kalan 13'tür.B) x sayısının 33 ile bölümünden kalan 20'dir.C) x sayısının 11 ile bölümünden kalan 9'dur.D) y sayısının 5 ile bölümünden kalan 3'tür.E) x sayısının 3 ile bölümünden kalan 1'dir.**Çözüm : A)** Denklemi mod 25 te göz önüne alırsak

$$8y \equiv 4 \pmod{25} \Rightarrow 2y \equiv 1 \pmod{25} \Rightarrow y \equiv 13 \pmod{25}$$

ise $y = 25k + 13$ elde edilir. A) doğrudur.**B)** Denklemi mod 33 te göz önüne alırsak

$$25x \equiv 5 \pmod{33} \Rightarrow 5x \equiv 1 \pmod{33}$$

$$\Rightarrow 5x \equiv 1 + 99 \pmod{33}$$

$$\Rightarrow x \equiv 20 \pmod{33}$$

ise $x = 33k + 20$ formundadır. B) doğrudur.**C)** Önceki seçenekte $x = 33k + 20$ bulmuştuk. Denklemi mod 11 te göz önüne alırsak

$$x \equiv 9 \pmod{11}$$

elde edilir. İlk denklemden de bulabilirdik. İlk verilen denklemi mod 11'de göz önüne alırsak,

$$3x \equiv 5 \pmod{11} \Rightarrow 3x = 27 \pmod{11}$$

$$\Rightarrow x \equiv 9 \pmod{11}$$

olur.

D) $y = 25k + 13$ eşitliğini mod 5'te göz önüne alırsak

KÖKLÜ SAYILAR

Alıştırma 12.1.



Çözüm : a) $\sqrt{100} = 10$ b) $\sqrt{144} = 12$ c) $\sqrt{64} = 8$ d)
 $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

Alıştırma 12.2.



Çözüm : 25'in karekökü 5 olduğundan $a + 13 = 25$ ve
 $a = 12$ olmalıdır.

Alıştırma 12.3. FLS-1990



Çözüm :

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{9}{16}}} &= \sqrt{1 + \sqrt{\frac{25}{16}}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{5}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Alıştırma 12.4.



Çözüm : $0,3 = \frac{3}{10}$ sayısı rasyoneldir. $\sqrt{289} = 17$ ve
 $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ olduğundan rasyoneldir. a) irrasyoneldir.

Alıştırma 12.5.



Çözüm :

$\sqrt{100} < \sqrt{111} < \sqrt{121} \Rightarrow 10 < \sqrt{111} < 11$
 olduğundan 10 ile 11 arasındadır. $121 - 111 = 10$
 ve $111 - 100 = 11$ olduğundan $\sqrt{121} = 11$ 'e daha
 yakındır.

Alıştırma 12.6.



Çözüm :

$\sqrt{100} < \sqrt{111} < \sqrt{121} \Rightarrow 10 < \sqrt{111} < 11$
 olduğundan 10 ile 11 arasındadır. $121 - 111 = 10$
 ve $111 - 100 = 11$ olduğundan $\sqrt{121} = 11$ 'e daha
 yakındır. O halde,

$\sqrt{123 + \sqrt{111}} \simeq \sqrt{123 + 11} = \sqrt{134}$
 olur. $11^2 = 121 < \sqrt{134} < 12^2 = 144$ ve
 $144 - 134 = 10$, $134 - 121 = 13$ olduğundan
 $\sqrt{123 + \sqrt{111}} \simeq 12$ bulunur.

Alıştırma 12.7.



Çözüm : $588 = 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2$ olduğundan

$$\sqrt{588} = \sqrt{3 \cdot 49 \cdot 4} = 2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3} = 14\sqrt{3}$$

olur. Bu sayı en küçük $\sqrt{3}$ irrasyonel sayısının bir katıdır.

Alıştırma 12.8.



Çözüm :

$\sqrt{396} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 11} = 2 \cdot 3\sqrt{11}$
 olduğundan $\sqrt{11}$ 'in yaklaşık değeri bilinmelidir.

Alıştırma 12.9.**Çözüm :**

$$\sqrt{a+3} = \sqrt{10 \cdot 9} = \sqrt{90}$$

eşitliğinden $a + 3 = 90$ ve $a = 87$ bulunur.**Alıştırma 12.10.****Çözüm :**

$$\sqrt{5! \cdot n} = \sqrt{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n} = 2\sqrt{5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot n}$$

olduğundan en küçük $n = 5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ olmalıdır.**Alıştırma 12.11.****Çözüm :**

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(2 - \frac{1}{5}\right) \left(3 + \frac{1}{5}\right) \cdot n} \\ &= \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5} \cdot n} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{5} \sqrt{\frac{n}{5}} \end{aligned}$$

olduğundan n en küçük 125 olmalıdır. Bu durumda $A = 24$ olur.**Alıştırma 12.12.****Çözüm :**

$$\sqrt{\frac{64}{5}} = \sqrt{\frac{64 \cdot 5}{25}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

olduğundan $\frac{8}{5} = 1,6$ katıdır.**Alıştırma 12.13.****Çözüm :**

$$\begin{aligned} \sqrt{1600000 \cdot 10^3} &= \sqrt{16 \cdot 10^5 \cdot 10^3} \\ &= \sqrt{16 \cdot 10^8} \\ &= 4 \cdot 10^4 = 40000 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 12.14.**Çözüm :** Her iki tarafın karesini alırsak

$$\begin{aligned} \sqrt{9^{2x-7}} = 27 &\Rightarrow \sqrt{3^{4x-14}} = 3^3 \\ &\Rightarrow 3^{4x-14} = (3^3)^2 \\ &\Rightarrow 3^{4x-14} = 3^6 \\ &\Rightarrow 4x - 14 = 6 \\ &\Rightarrow 4x = 20 \\ &\Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 12.15. FLS-1997**Çözüm :** $2x = 2$ ise $x = 1$, $2y = 6$ ise $y = 3$ ve $2z = 4$ eşitliğinden $z = 2$ elde edilir. $x + y + z = 6$ olur.

Karekökün İçi Negatif Olamaz**Aıştırma 12.16.**

Çözüm : Bu ifadenin tanımlı olabilmesi için

$$6x - 23 \geq 0 \Rightarrow 6x \geq 23 \Rightarrow x \geq \frac{23}{6},$$

$$14 - 3x \geq 0 \Rightarrow 14 \geq 3x \Rightarrow x \leq \frac{14}{3}$$

olması gerekir. Yani, $\frac{23}{6} \leq x \leq \frac{14}{3}$ olmalıdır. Bu aralıkdaki tek tam sayı $x = 4$ olduğundan,

$$\sqrt{6 \cdot 4 - 23} + \sqrt{14 - 3 \cdot 4} = \sqrt{2} + 1$$

olur.

Ondalıklı İfadelerin Karekökü**Aıştırma 12.17.**

Çözüm : a) $\sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} = 0,1$

b) $\sqrt{1,44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{12}{10} = 1,2$

c) $\sqrt{0,000009} = \sqrt{9 \cdot 10^{-6}} = 3 \cdot 10^{-3} = 0,003$

Aıştırma 12.18.

Çözüm :

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{4 \cdot 10^{-4}} + \sqrt{121 \cdot 10^{-4}}}{\sqrt{1 \cdot 10^{-6}} + \sqrt{9 \cdot 10^{-6}}} \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-2} + 11 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}} \\ &= \frac{20 \cdot 10^{-3} + 110 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-3}} \\ &= \frac{130}{4} = \frac{65}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Köklü İfadelerde Toplama ve Çıkarma

Alıştırma 12.19.



Çözüm : $\sqrt{2}$ yerine x , $\sqrt{3}$ yerine y yazalım.

$$4y + 7y - 2x + 11y - x + 3x = 22y = 22\sqrt{3}$$

bulunur.

Alıştırma 12.20.



Çözüm :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4 \cdot 5} + 10\sqrt{9 \cdot 5} - 4\sqrt{16 \cdot 5} + 3\sqrt{25 \cdot 5} \\ &= 2\sqrt{5} + 30\sqrt{5} - 16\sqrt{5} + 15\sqrt{5} \\ &= 31\sqrt{5} \end{aligned}$$

olur.

Köklü İfadelerde Çarpma ve Bölme

Alıştırma 12.21.



Çözüm :

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} &= \sqrt{36} = 6, \text{ b) } \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2 \\ \text{c) } \frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{30}} &= \sqrt{\frac{24 \cdot 5}{30}} = \sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

Alıştırma 12.22.



Çözüm :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{4 \cdot 6} \cdot \sqrt{16 \cdot 3} \cdot 6 \cdot \sqrt{9 \cdot 2} \\ &= 2\sqrt{6} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{2} \\ &= (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3) \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2} \\ &= 144 \cdot \sqrt{36} = 144 \cdot 6 = 864 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 12.23.



Çözüm :

$$A = \frac{\sqrt{24} \cdot \sqrt{48}}{\sqrt{36} \cdot \sqrt{18}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 48}{36 \cdot 18}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$$

olur.

Alıştırma 12.24.



Çözüm : Bu kez tüm ifadeleri $\sqrt{3}$ cinsinden yazacağız.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 \cdot 3\sqrt{3} + 2 \cdot 5\sqrt{3} - 5 \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot 10\sqrt{3} - 4 \cdot 6\sqrt{3} + 3 \cdot 4\sqrt{3}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 12.25.



Çözüm : Bu kez tüm ifadeleri $\sqrt{3}$ cinsinden yazacağız.

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\sqrt{9 \cdot 6} + 5\sqrt{4 \cdot 6}}{6\sqrt{100 \cdot 3} - 7\sqrt{16 \cdot 3}} \\ &= \frac{6\sqrt{6} + 10\sqrt{6}}{60\sqrt{3} - 28\sqrt{3}} = \frac{16\sqrt{6}}{32\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma**12.26.** FLS – 1996

Çözüm :

$$\begin{aligned}\frac{c^3}{a^2 \cdot b} &= \frac{\overbrace{\sqrt{12}\sqrt{12}\sqrt{12}}^{12}}{\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}}_2} \\ &= \frac{12\sqrt{12}}{2\sqrt{3}} = \frac{12 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 12\end{aligned}$$

olur.

Alıştırma**12.27.** FLS – 1991

Çözüm :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ac} \cdot \sqrt{bc}}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} &= \frac{\sqrt{ab \cdot ac \cdot bc}}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \\ &= \frac{a \cdot b \cdot c}{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2} \\ &= \frac{1}{a \cdot b \cdot c}\end{aligned}$$

olur.

Alıştırma**12.28.**

Çözüm :

$$\begin{aligned}A &= (\sqrt{19} - 4)(\sqrt{19} + 4) \\ &= 19 - 4\sqrt{19} + 4\sqrt{19} - 16 \\ &= 3\end{aligned}$$

olur.

Alıştırma**12.29.**

Çözüm :

$$\begin{aligned}A &= \frac{9 \cdot 2 - 4 \cdot 3}{25 \cdot 2 - 16 \cdot 3} \\ &= \frac{6}{2} \\ &= 3\end{aligned}$$

olur.

Paydayı Rasyonel Yapma**Alıştırma 12.30.**

Çözüm : a) $\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{5})}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2}{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}} = \frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

c) $\frac{6}{\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)}} = \frac{6(\sqrt{3}+1)}{3-1} = 3(\sqrt{3}+1)$

Alıştırma 12.31.

Çözüm : Birinci ifadeyi $2 + \sqrt{3}$ ile, ikinci ifadeyi de $2 - \sqrt{3}$ ile genişletirsek paydaları $4 - 3 = 1$ olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} A &= \frac{2 + \sqrt{3}}{1} + \frac{2 - \sqrt{3}}{1} \\ &= 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} \\ &= 4 \end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 12.32.

Çözüm : Paydadaki ifadeleri rasyonel olacak şekilde kesirleri genişletelim.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{2-1} - \frac{\sqrt{2}-1}{2-1}}{\frac{3+\sqrt{8}}{9-8} + \frac{3-\sqrt{8}}{9-8}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1 - \sqrt{2}+1}{3+\sqrt{8}+3-\sqrt{8}} \\ &= \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Alıştırma 12.33.

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{24} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{6}} \right) &= \sqrt{24} \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= \sqrt{24} \left(\frac{2+3+1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= 2\sqrt{6} \cdot \frac{6}{\sqrt{6}} = 12 \end{aligned}$$

Alıştırma 12.34.

Çözüm : Paydadaki ifadeleri rasyonel olacak şekilde kesirleri genişletelim.

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt{27}+\sqrt{25}} + \frac{1}{\sqrt{29}+\sqrt{27}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{49}+\sqrt{47}} \\ &= \frac{\sqrt{27}-\sqrt{25}}{2} + \frac{\sqrt{29}-\sqrt{27}}{2} + \dots + \frac{\sqrt{49}-\sqrt{47}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{27}-\sqrt{25} + \sqrt{29}-\sqrt{27} + \dots + \sqrt{49}-\sqrt{47}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{49}-\sqrt{25}}{2} = \frac{7-5}{2} = 1 \end{aligned}$$

Karekök ve Mutlak Değer İlişkisi

Alıştırma 12.35.



Çözüm : $\sqrt{x^2} = |x|$ olduğu göz önüne alınarak aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(-2)^2} \\ &= \sqrt{2} + 1 - (\sqrt{2} - 1) + |-2| \\ &= \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 + 2 = 4 \end{aligned}$$

Kareköklü Denklemler

Alıştırma 12.36.



Çözüm : Her iki tarafın karesini alarak kökten kurtulalım.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{5x+4}{3-2x}} = 3 &\Rightarrow \frac{5x+4}{3-2x} = 9 \\ &\Rightarrow 5x+4 = 27-18x \\ &\Rightarrow 23x = 23 \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Kontrol edersek denklemi sağladığı görülebilir.

Alıştırma 12.37.



Çözüm : Köklü ifadeyi yalnız bırakalım.

$$\sqrt{3x+1} = x-1$$

Şimdi her iki tarafın karesini alarak kökten kurtulalım.

$$3x+1 = (x-1)^2 \Rightarrow 3x+1 = x^2-2x+1$$

Bütün terimleri aynı tarafa geçirelim.

$$x^2-5x = 0 \Rightarrow x(x-5) = 0$$

eşitliğinden $x = 0$ veya $x = 5$ olur. Fakat, $x = 0$ değeri denklemi sağlamaz ve sahte köktür. O halde, denklemi sağlayan tek kök $x = 5$ değeridir.

İrrasyonel Sayıların Özellikleri

Alıştırma 12.38.



Çözüm : Bu ifadenin bir tam sayı olması için, $\sqrt{b+5}$ tam sayı olmalıdır. O halde, $b \in \mathbb{Z}^+$ en az 4 olur.

$$\sqrt{3 + \sqrt{a+4+5}} = \sqrt{3 + \sqrt{a+3}} \in \mathbb{Z}$$

olması için, hem $\sqrt{a+3}$ tam sayı ve $3 + \sqrt{a+3}$ tam kare olmalıdır. Buna göre, en küçük olarak $\sqrt{a+3} = 1$ olabilir. Buna göre, $a = -2$ olacaktır. Böylece, $a + b$ en az $4 - 2 = 2$ olur.

Alıştırma**12.39.****Yüksek Dereceden Kökler****Çözüm :**

$$2\sqrt{5} + 11 = 3x + y$$

sağ taraftaki irrasyonel sayı sol taraftaki irrasyonel sayıya, sağ taraftaki rasyonel değerler de sol taraftaki rasyonel değerlere eşit olmalıdır. Buna göre, x irrasyonel ve y rasyonel olduğundan

$$3x = 2\sqrt{5} \text{ ve } y = 11$$

olmalıdır. Buradan, $3x + \sqrt{5}y = 2\sqrt{5} + 11\sqrt{5} = 13\sqrt{5}$ olur.

Alıştırma**12.40.****Çözüm :**

$$2x + y = (5y - 2x)\sqrt{2} + 12$$

eşitliğine göre,

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ 5y - 2x = 0 \end{cases}$$

olmalıdır. Buradan, taraf tarafa toplanır $y = \frac{12}{6} = 2$ elde edilir.

Alıştırma**12.41.**

Çözüm : a) $\sqrt[3]{-64} = -4$

b) $\sqrt[5]{-32} = -2$

c) $\sqrt[5]{243} = 3$

d) $\sqrt[3]{343 \cdot 125} = 7 \cdot 5 = 35$

Alıştırma 12.42.

Çözüm : a) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^{24}}} = 4$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{3^{60}}} = 81$

Alıştırma 12.43.

Çözüm :

$$\sqrt[n]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt[7]{2^{525}}}}} = \sqrt[n]{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt[5]{2^{525}}} \Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot n = 525$$

eşitliğinden $n = 5$ elde edilir.

Alıştırma 12.44.

Çözüm :

$$\sqrt[5]{a \sqrt{a \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a}}}} = \sqrt[5]{\sqrt{a^3 \sqrt[4]{a \sqrt[3]{a}}}} = \sqrt[5]{\sqrt[4]{a^{13} \sqrt[3]{a}}}$$

$$= \sqrt[3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2]{a^{40}} = \sqrt[120]{a^{40}}$$

elde edilir.

Alıştırma 12.45.

Çözüm :

$$x^2 \sqrt[3]{x \sqrt{x^2}} = \sqrt[3]{x^6 x \sqrt{x^2}} = \sqrt[3]{x^7 \sqrt{x^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{x^{14} x^2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{x^{16}} = \sqrt[3]{x^8} = x^{8/3}$$

olur ve $m = 8/3$ bulunur.

Alıştırma 12.46.

AMC10-2008



Çözüm : A) $\sqrt{x \sqrt[4]{x \sqrt[3]{x}}} = \sqrt{\sqrt[4]{x^5 \sqrt[3]{x}}} = \sqrt[24]{x^{16}}$

B) $\sqrt[3]{x \sqrt[4]{x \sqrt[2]{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x^5 \sqrt[2]{x}}} = \sqrt[24]{x^{11}}$

C) $\sqrt[4]{x \sqrt[3]{x \sqrt[2]{x}}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4 \sqrt[2]{x}}} = \sqrt[24]{x^9}$

D) $\sqrt[2]{x \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x}}} = \sqrt[2]{\sqrt[3]{x^4 \sqrt[4]{x}}} = \sqrt[24]{x^{17}}$

olduğundan en büyük D)'dir.

Köklü İfadelerde Sıralama**Alıştırma 12.47.**

Çözüm :

a) $a = \sqrt[4]{5} > c = \sqrt[4]{4} > b = \sqrt[4]{3}$.

b) $b = \sqrt[12]{36} < a = \sqrt[12]{64} < c = \sqrt[12]{81}$

c) $b = \sqrt[11]{11} > c = \sqrt[12]{11} > a = \sqrt[13]{11}$,

d) $a = \sqrt{5} - \sqrt{4}$, $b = \sqrt{9} - \sqrt{8}$, $c = \sqrt{7} - \sqrt{6}$
olduğundan

$b = \sqrt{9} - \sqrt{8} < c = \sqrt{7} - \sqrt{6} < a = \sqrt{5} - \sqrt{4}$
olur.

Aıştırma 12.48.

Çözüm : $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{1}$ ve $\frac{\sqrt{c}-\sqrt{d}}{1}$ ifadelerinin pay ve paydasını sırasıyla $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ ve $\sqrt{c}+\sqrt{d}$ ile çarpalım. $a-b=c-d=n$ olsun.

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{n}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad \text{ve} \quad \sqrt{c}-\sqrt{d} = \frac{n}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}$$

olacaktır. Buna göre, paydası büyük olan daha küçük olacaktır. $a > c$ ise $a-b=c-d$ olduğundan $b > d$ olur.

$$a > c \text{ ve } b > d \text{ ise } ab > cd$$

olacaktır. Bir önceki örnekte, $ab > cd$ ise $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{c}+\sqrt{d}$ olduğunu kanıtlamıştık. O halde,

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{c}-\sqrt{d}$$

elde edilir.

Aıştırma 12.49.

Çözüm : Tüm ifadelerin payı aynıdır. O halde, paydası büyük olan daha küçüktür.

$$\sqrt[3]{8} > \sqrt[3]{6} > \sqrt[3]{5}$$

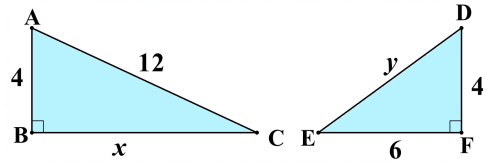
olduğundan, $b < c < a$ elde edilir.

Geometride Köklü Sayılar

Geometride köklü sayılarla sık olarak karşılaşacağız. Bu nedenle burada köklü formül veya sayı kullanılan bazı geometri problemleri vereceğiz. Köklü sayıların ortaya çıkışı da bir geometri problemindendir. Pisagor teoremine göre, bir dik üçgenin hipotenüsünün karesi, yani dik açının karşısındaki kenarın karesi dik kenarların karelerinin toplamına eşittir. Örneğin, dik kenarları 3 ve 4 ise hipotenüs $x^2 = 3^2 + 4^2$ eşitliğinden 5 bulunur. Fakat Pisagor'un bir öğrencisi olan **Hippasus**, kenar uzunlukları 1 birim olan bir dik üçgende hipotenüsün uzunluğunun bir rasyonel sayı olmadığını iddia etti. $x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ eşitliğini sağlayan bir rasyonel sayı olmadığını iddia eden Hippasus'un bu iddiası Pisagor okulunda çok büyük tartışmalar çıkardı. $x = \sqrt{2}$ sayısının bir irrasyonel sayı olduğunun kanıtı matematikteki en meşhur kanıtlardan biridir.

Aıştırma 12.50.

Çözüm : Kabul edelim ki $\sqrt{3}$ sayısı rasyonel sayı olsun. Yani, $a, b \in \mathbb{Z}$ ve $b \neq 0$ olmak üzere, $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ olsun ve a ile b aralarında asal olsun. Karesini alırsak $\frac{a^2}{b^2} = 3 \Rightarrow a^2 = 3b^2$ olur. Bu eşitliğe göre sağ taraf 3 ile bölündüğünden sol taraf da bölünmelidir. $a = 3k$ olmalıdır. Böylece, $9k^2 = 3b^2 \Rightarrow b^2 = 3k^2$ olur. O halde, $b = 3m$ olur. Yani hem a hem de b , 3 'ün katı. Demek ki, $\sqrt{3}$ sayısını $\frac{a}{b}$ biçiminde yazamayız. Yani, $\sqrt{3}$ bir irrasyonel sayıdır.

Aıştırma 12.51.

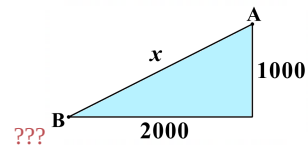
Çözüm :

$$x^2 = 12^2 - 4^2 = 128 \Rightarrow x = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$y^2 = 6^2 + 4^2 \Rightarrow y^2 = 52 \Rightarrow y = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

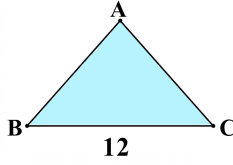
Aıştırma 12.52.

Çözüm :



$$x^2 = 1000^2 + 2000^2 = 1000^2 (1 + 2^2) = 5 \cdot 1000^2$$

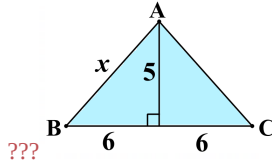
eşitliğinden $x = 1000\sqrt{5}$ metre elde edilir.

Alıştırma 12.53.

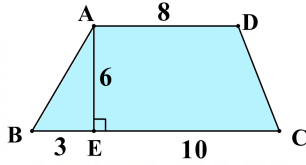
Çözüm : Üçgenin alanı taban ve yüksekliğin çarpımının yarısına eşittir.

$$\text{Alan} = \frac{12 \cdot h}{2} = 30 \Rightarrow h = 5$$

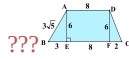
bulunur.



Buna göre, $x^2 = 6^2 + 5^2 = 61$ eşitliğinden $x = \sqrt{61}$ elde edilir.

Alıştırma 12.54.

Çözüm : Pisagor teoreminden $|AB| = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ olur.



Diğer yandan, D noktasından BC'ye yükseklik çizersek $|DF| = 6$ ve $|FC| = 2$ olacağından yine Pisagor teoreminden $|DC| = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$ olur. Çevre : $21 + 3\sqrt{5} + 2\sqrt{10}$ bulunur.

Alıştırma 12.55.

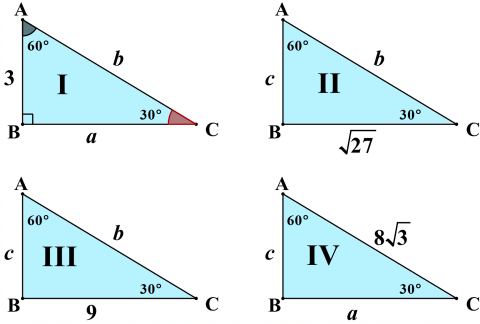
Çözüm : $2u = 13 + 14 + 15 = 42$ olduğundan $u = 21$ olur ve

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} \\ &= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \\ &= \sqrt{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} = \sqrt{3^2 7^2 2^2 2^2} \\ &= 3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 = 84 \end{aligned}$$

elde edilir.

Özel Açılı Üçgenlerde Kenar Uzunlukları

Alıştırma 12.56.



Çözüm : I. 30° nin karşısındaki kenar 3 br ise $b = 6$ ve $a = 3\sqrt{3}$ olur.

II. 30° nin karşısındaki kenar c br ise $b = 2c$ ve $\sqrt{27} = \sqrt{3}c$ olur.

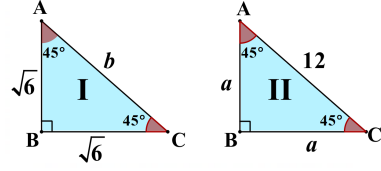
$$\sqrt{27} = \sqrt{3}c \Rightarrow 3\sqrt{3} = \sqrt{3}c \Rightarrow c = 3 \text{ ve } b = 6.$$

III. 30° nin karşısındaki kenar c br ise $b = 2c$ ve $9 = \sqrt{3}c$ olur.

$$9 = \sqrt{3}c \Rightarrow c = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \text{ ve } b = 6\sqrt{3}.$$

bulunur. IV. 30° nin karşısındaki kenar c br ise $8\sqrt{3} = 2c$ ve $a = \sqrt{3}c$ olur. $8\sqrt{3} = 2c \Rightarrow c = 4\sqrt{3}$ ve $a = 4\sqrt{3}\sqrt{3} = 12$.

Alıştırma 12.57.

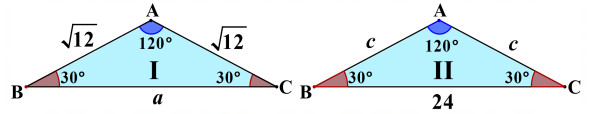


Çözüm : I. 45° nin karşısındaki kenar $\sqrt{6}$ br ise $b = \sqrt{2}\sqrt{6} = 2\sqrt{3}$ olur.

II. Hipotenüs 12 ise 45° nin karşısındaki kenar

$$a = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \text{ olur.}$$

Alıştırma 12.58.

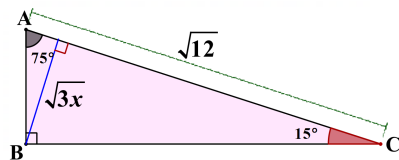


Çözüm : I. 30° nin karşısındaki kenar $\sqrt{12}$ br ise $a = \sqrt{12}\sqrt{3} = 6$ olur.

II. 120° nin karşısındaki kenar 24 ise 30° nin karşısındaki kenar

$$c = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ olur.}$$

Alıştırma 12.59.



Çözüm :

$$4\sqrt{3}x = \sqrt{12} \Rightarrow 16 \cdot 3x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}.$$

Alıştırma 12.60.

Çözüm : $a = \sqrt{12}$ olduğundan

$$\text{Alan} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{12\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3}$$

bulunur.

Alıştırma 12.61.

Çözüm : $2u = 20 + 16 + 9 + 5 = 50$ olduğundan
 $u = 25$ olur ve

$$\begin{aligned}\text{Alan} &= \sqrt{(25 - 20)(25 - 16)(25 - 9)(25 - 5)} \\ &= \sqrt{5 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 20} \\ &= 120\end{aligned}$$

bulunur.

Köklü İfadelerde Çarpanlara Ayırma**Alıştırma 12.62.**

Çözüm : $\sqrt{x} = a$ ve $x = a^2$ denilirse

$$x - 8\sqrt{x} + 12 = 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 2)(a - 6) = 0$$

$$\Rightarrow a = 2 \text{ veya } a = 6$$

olur. $\sqrt{x} = 2$ ise $x = 4$ ve $\sqrt{x} = 6$ ise $x = 36$ bulunur.

Alıştırma 12.63.

Çözüm :

$$\begin{aligned}(x - \sqrt{2})^2 &= (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \\ &= x^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}x + 2 \\ &= x^2 - 2\sqrt{2}x + 2\end{aligned}$$

bulunur.

Alıştırma 12.64.

Çözüm :

$$\begin{aligned}\frac{16x - 1}{4\sqrt{x} - 1} = 3 &\Rightarrow \frac{(4\sqrt{x} - 1)(4\sqrt{x} + 1)}{(4\sqrt{x} - 1)} = 3 \\ &\Rightarrow 4\sqrt{x} + 1 = 3 \Rightarrow 4\sqrt{x} = 2 \\ &\Rightarrow 16x = 4 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

olur.

Alıştırma 12.65.

Çözüm : $\sqrt{x - \frac{1}{x}} = a$ ve $x - \frac{1}{x} = a^2$ denilirse

$$a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a - 2) = 0$$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ veya } a = 2$$

olur.

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$

eşitliğinden $x = 1$ veya $x = -1$ bulunur.

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = 4 \Rightarrow x^2 - 4x = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 = 5$$

$$\Rightarrow x - 2 = \sqrt{5} \text{ veya } x - 2 = -\sqrt{5}$$

eşitliklerinden $x = \sqrt{5} + 2$ veya $x = -\sqrt{5} + 2$ bulunur.**Rasyonel Üslü Denklemlerin Çözümü****Alıştırma 12.66.****Çözüm :**

$$\sqrt[5]{27^{5x+1}} = \sqrt[3]{81^{x-2}} \Rightarrow 27^{(5x+1)/5} = 81^{(x-2)/3}$$

$$\Rightarrow 3^{3(5x+1)/5} = 3^{4(x-2)/3}$$

$$\Rightarrow \frac{3(5x+1)}{5} = \frac{4(x-2)}{3}$$

$$\Rightarrow 45x + 9 = 20x - 40$$

$$\Rightarrow x = -\frac{49}{25}$$

olur. $\sqrt{-x} = \sqrt{49/25} = 7/5$ bulunur.**Alıştırma 12.67.****Çözüm :**

$$\sqrt[5]{\frac{27}{\sqrt[3]{3^x}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{81}} \Rightarrow \sqrt[5]{\frac{3^3}{3^{x/3}}} = \sqrt[6]{3^{-4}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{3^{3-\frac{x}{3}}} = \sqrt[6]{3^{-4}}$$

$$\Rightarrow 3^{(3-\frac{x}{3})/5} = 3^{-\frac{4}{6}}$$

$$\Rightarrow \frac{(3-\frac{x}{3})}{5} = \frac{-4}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{3-\frac{x}{3}}{5} = -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow x = 19$$

bulunur.

Alıştırma 12.68.**Çözüm :**

$$\frac{\sqrt[5]{0,0000000243}}{\sqrt[3]{0,000000343}} = \frac{\sqrt[5]{3^5 \cdot 10^{-10}}}{\sqrt[3]{7^3 \cdot 10^{-9}}}$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-3}} = \frac{30}{7}$$

Alıştırma 12.69.

Çözüm : Denklemin her iki tarafının 4'üncü kuvvetini alırsak bu kökten kurtuluruz.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[4]{x^2 - 2x}\right)^4 &= 2^{3/4} \Rightarrow x^2 - 2x = 8 \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \\ &\Rightarrow (x + 2)(x - 4) = 0 \end{aligned}$$

eşitliğinden $x = -2$ veya $x = 4$ bulunur. Her ikisinin de denklemi sağladığı görülebilir. Ç.K.= $\{-2, 4\}$

Alıştırma 12.70.

Çözüm : Denklemin her iki tarafının 3'üncü kuvvetini alırsak küp kökten kurtuluruz.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[3]{11 - \sqrt{2x + 1}}\right)^3 &= 8 \Rightarrow 11 - \sqrt{2x + 1} = 8 \\ &\Rightarrow \sqrt{2x + 1} = 3 \\ &\Rightarrow 2x + 1 = 9 \Rightarrow x = 4 \end{aligned}$$

bulunur. Ç.K.= $\{4\}$

Karışık Sorular**Alıştırma 12.71.**

Çözüm : $101 = a$ diyelim.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(a+1)(a+2)} + a(a+3) - 2a^2}{\sqrt{(a+1)(a+2)} - a(a+3)} &= \sqrt{\frac{2(3a+1)}{2}} \\ &= \sqrt{3a+1} \end{aligned}$$

olur, $a = 101$ yazılırsa $\sqrt{304}$ olur.

Alıştırma 12.72.

Çözüm :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} \\ &= \sqrt{\frac{(\sqrt{5}+1)^2}{5-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-1)^2}{5-1}} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1}{2} = 1 \end{aligned}$$

Alıştırma 12.73.

Çözüm :

$$\begin{aligned} A &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{3}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{6}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = 2. \end{aligned}$$

KONU SONU TESTİ (Köklü Sayılar)(Çözümler)

Test 12.1



A) 143 B) 215 C) 141 D) 139 E) 120

Çözüm : Bu kümedeki

$$\sqrt{16}, \sqrt{25}, \sqrt{36} \dots = 4, 5, 6, \dots$$

elemanları tam sayıdır. O halde, 8-inci tam sayı $4 + 7 = 11$ olacaktır.

$$\{\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \dots, \sqrt{121}\}$$

olursa 8 tane tam sayı olur. Ama n en fazla kaç olabilir denilmiş. $\sqrt{12^2 - 1} = \sqrt{143}$ kümede olabilir.

$$\{\sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \dots, \sqrt{143}\}$$

olduğundan n en fazla 143 olabilir.

Test 12.2



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{6}$

Çözüm :

$$\frac{\sqrt{1,2}\sqrt{1,5}}{\sqrt{0,45}} = \frac{\sqrt{\frac{12}{10} \cdot \frac{15}{10}}}{\sqrt{\frac{45}{100}}} = \frac{\sqrt{\frac{12 \cdot 15}{100}}}{\sqrt{\frac{45}{100}}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 15}{45}} = \sqrt{4} = 2$$

olur.

Test 12.3



A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$ D) 4 E) $\sqrt{26}$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{13 + \sqrt{30\sqrt{0,09}}} &= \sqrt{13 + \sqrt{30\sqrt{\frac{9}{100}}}} \\ &= \sqrt{13 + \sqrt{30 \cdot \frac{3}{10}}} \\ &= \sqrt{13 + \sqrt{9}} = \sqrt{16} = 4 \end{aligned}$$

Test 12.4



A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 8

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{6\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + 10\sqrt{3}} &= \sqrt{\frac{x+1}{3}} \Rightarrow \frac{6\sqrt{2}}{12\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{x+1}{12}} \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{x+1}{12}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{12} = \frac{x+1}{12} \\ &\Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Test 12.5



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{1,28} + \sqrt{0,98} + \sqrt{0,5} &= \sqrt{\frac{128}{100}} + \sqrt{\frac{98}{100}} + \sqrt{\frac{50}{100}} \\ &= \sqrt{\frac{64 \cdot 2}{100}} + \sqrt{\frac{49 \cdot 2}{100}} + \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{100}} \\ &= \frac{8}{10}\sqrt{2} + \frac{7}{10}\sqrt{2} + \frac{5}{10}\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Test 12.6 FLS-1997

- A) 1 B) 5 C) 3 D) 2 E) 6

Çözüm :

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2 \cdot a} + 6\sqrt{2 \cdot a} + 12\sqrt{2 \cdot a} &= 40 \\
20\sqrt{2 \cdot a} &= 40 \\
\sqrt{2 \cdot a} &= 2 \\
2 \cdot a &= 4 \\
a &= 2
\end{aligned}$$

Test 12.7

- A) 1 B) 2 C)
- $\sqrt{2}$
- D)
- $\sqrt{3}$
- E)
- $\sqrt{6}$

Çözüm :

$$\begin{aligned}
3 + \sqrt{15} + \sqrt{21} &= \sqrt{3 \cdot 3} + \sqrt{3 \cdot 5} + \sqrt{3 \cdot 7} \\
&= \sqrt{3} (\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}) \\
&= \sqrt{3}x
\end{aligned}$$

olur.

Test 12.8

- A) 12 B) 24 C) 18 D) 16 E) 20

Çözüm : Üç eşitliği de taraf tarafa çarparsak

$$\begin{aligned}
\sqrt{a \cdot c \cdot a \cdot e \cdot c \cdot e} &= 6 \cdot 8 \cdot 12 \\
a \cdot c \cdot e &= 2^6 3^2
\end{aligned}$$

olur. O halde,

$$\sqrt{a \cdot c \cdot e} = \sqrt{2^6 3^2} = 2^3 3 = 24$$

bulunur.

Test 12.9

- A) 121 B) 25 C) 36 D) 49 E) 16

Çözüm :

$$\begin{aligned}
\sqrt{41 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{x}}}} &= 7 \\
\Rightarrow 41 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{x}}} &= 49 \\
\Rightarrow \sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{x}}} &= 4 \\
\Rightarrow 1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{x}} &= 16 \\
\Rightarrow \sqrt{1 + 4\sqrt{x}} &= 5 \\
\Rightarrow 1 + 4\sqrt{x} &= 25 \\
\Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x &= 36
\end{aligned}$$

elde edilir.

Test 12.10

- A)
- $3ab$
- B)
- $2ab$
- C)
- $\sqrt{2}ab$
- D)
- $\sqrt{3}ab$
- E)
- $6ab$

Çözüm :

$$\sqrt{216} = \sqrt{36 \cdot 6} = 6\sqrt{6} = 6\sqrt{2}\sqrt{3} = 6ab$$

Test 12.11

- A) 36 B) 25 C) 49 D) 64 E) 16

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{21+2\sqrt{2+3\sqrt{4+3\sqrt{x}}}} = 5 &\Rightarrow 21+2\sqrt{2+3\sqrt{4+3\sqrt{x}}} = 25 \text{ sayısı tam küp olmalıdır. Yani, üsler 3 ve 3'ün katı olabilir.} \\ &\Rightarrow \sqrt[3]{2+3\sqrt{4+3\sqrt{x}}} = 2 \\ &\Rightarrow 2+3\sqrt{4+3\sqrt{x}} = 8 \\ &\Rightarrow \sqrt[4]{4+3\sqrt{x}} = 2 \\ &\Rightarrow 4+3\sqrt{x} = 16 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} = 4 \\ &\Rightarrow x = 16 \end{aligned}$$

Test 12.13 UAMO-B-1998

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm : $\sqrt[3]{98 \cdot n}$ tam sayı ise

$$2 \cdot 7^2 \cdot n$$

25 sayısı tam küp olmalıdır. Yani, üsler 3 ve 3'ün katı olabilir.

i) $n = 0$ olabilir.ii) $n = 2^2 \cdot 7 = 28$ olabilir.iii) $n = 2^5 \cdot 7 = 224$ olabilir.

Yanıt : 3

Test 12.14

- A)
- $\frac{a}{13}$
- B)
- $\sqrt{39}a$
- C)
- a
- D)
- $\sqrt{13}a$
- E)
- $13a$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{13}} = a &\Rightarrow \sqrt{\frac{3 \cdot 13}{13 \cdot 13}} = a \\ &\Rightarrow \frac{\sqrt{39}}{13} = a \\ &\Rightarrow \sqrt{39} = 13a \end{aligned}$$

olur.

Test 12.12

- A)
- $\frac{3}{4}$
- B) 2 C)
- $\frac{3}{2}$
- D)
- $\frac{1}{2}$
- E)
- $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{0,9} + \sqrt{0,09}}{\sqrt{0,4} + \sqrt{0,04}} &= \frac{\sqrt{9 \cdot 10^{-2}} + \sqrt{9 \cdot 10^{-4}}}{\sqrt{4 \cdot 10^{-2}} + \sqrt{4 \cdot 10^{-4}}} \\ &= \frac{3 \cdot 10^{-1} \sqrt{10} + 3 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-1} \sqrt{10} + 2 \cdot 10^{-2}} \\ &= \frac{3 \cdot (10^{-1} \sqrt{10} + 10^{-2})}{2 \cdot (10^{-1} \sqrt{10} + 10^{-2})} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Test 12.15

- A)
- $\frac{y}{3}$
- B)
- $\frac{y}{4}$
- C)
- $\frac{2y}{3}$
- D)
- $\frac{\sqrt{y}}{2}$
- E)
- $\frac{\sqrt{y}}{3}$

Çözüm :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x} = 4 \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = a \end{cases}$$

olsun. Taraf tarafa çarparsak $x + y - x = 4a$ ve $y = 4a$ bulunur. O halde, $a = \frac{y}{4}$ olur.

Test 12.16

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm : $\sqrt{99} = 3\sqrt{11}$ olduğundan sağ taraf $\sqrt{11}$ irrasyonel sayısının bir katı olduğundan sol taraftaki sayılar da $\sqrt{11}$ sayısının tam katları olmalıdır. Buna göre, $\sqrt{x} = a\sqrt{11}$ ve $\sqrt{y} = b\sqrt{11}$ denilirse $a + b = 3$ olması gerektiği görülür. O halde,

$a = 2, b = 1$ ise $x = 44$ ve $y = 11$ ise $(x, y) = (44, 11)$
 $a = 1, b = 2$ ise $x = 11$ ve $y = 44$ ise $(x, y) = (11, 44)$
 olmak üzere 2 tane pozitif tam sayı ikilisi vardır.

Test 12.17

- A) 12 B) 23 C) 31 D) 13 E) 14

Çözüm :

$$\frac{1}{5 - \sqrt{x}} + \frac{1}{5 + \sqrt{x}} = 5 \Rightarrow \frac{5 + \sqrt{x} + 5 - \sqrt{x}}{25 - x} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{10}{25 - x} = 5$$

$$\Rightarrow x = 23$$

elde edilir.

Test 12.18

- A) 1919 B) 2000 C) 1918 D) 1923 E) 1920

Çözüm :

$$a(a+3)(a+1)(a+2) = (a^2 + 3a)(a^2 + 3a + 2)$$

$$= (\sqrt{1919} - 1)(\sqrt{1919} + 1)$$

$$= 1919 - 1$$

$$= 1918$$

bulunur.

Test 12.19 AMC10-2022

- A) $3 - a$ B) $2 - a$ C) $2a - 3$ D) $a - 6$ E) $3 - 2a$

Çözüm : $a < 0$ ise $a - 1 < 0$ olur ve

$$\sqrt{(a-1)^2} = 1 - a$$

olur. Buna göre,

$$\left| a - 2 - \sqrt{(a-1)^2} \right| = |a - 2 - (1 - a)|$$

$$= |2a - 3|$$

$$= 3 - 2a$$

elde edilir.

Test 12.20

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) 1 D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

Çözüm :

$$2\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 3\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 5\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 20,$$

$$10\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 20,$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{x}} = 2, \text{ (kare al)}$$

$$1 + \frac{1}{x} = 4$$

$$\frac{1}{x} = 3$$

eşitliğinde $x = \frac{1}{3}$ bulunur.

Test 12.21

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

Çözüm : Öncelikle kökün içi negatif olamayacağından,

$$x - 1 \geq 0 \text{ ve } 2x - 5 \geq 0$$

olmalıdır. Şimdi eşitsizliğin her iki tarafının karesini alalım.

$$x - 1 > 2x - 5 \Rightarrow x < 4$$

elde edilir. Böylece, çözüm kümesi

$$x \geq 1, x \geq 5/2 \text{ ve } x < 4$$

eşitsizliklerini sağlayan noktalar olmalıdır ki, bu $5/2 \leq x < 4$ olması gerekir. Bu aralıktaki tam sayılar sadece $x = 3$ olur.

Test 12.22

- A) 8 B) 11 C) 3 D) 4 E) 7

Çözüm :

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 3 &\Rightarrow \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}-2} = 7 \\ &\Rightarrow \sqrt{x}+2 = 7 \\ &\Rightarrow \sqrt{x} = 5 \\ &\Rightarrow x = 25 \end{aligned}$$

olur. Rakamları toplamı 7 bulunur.

Test 12.23

- A) $2(\sqrt{n}+1)$ B) $4(\sqrt{n}+1)$ C) $4(\sqrt{n}+2)$ D) $2(\sqrt{n}+2)$ E) $2(2\sqrt{n}+1)$

Çözüm :

$$n = a^2$$

ise bundan iki sonraki tam kare

$$n = (a+2)^2$$

olur. Buna göre, bizden istenen

$$Fark = (a+2)^2 - a^2 = a^2 + 4a + 4 - a^2 = 4(a+1)$$

sayısının n cinsinden değeridir. $a = \sqrt{n}$ yazılırsa, bu fark

$$4(\sqrt{n}+1)$$

bulunur.

Test 12.24

- A) 8 B) 11 C) 3 D) 4 E) 7

Çözüm : $1919 = a$ diyelim.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(a+4)(a+16) - a(a+20)} \\ &= \sqrt{a^2 + 4a + 16a + 64 - a^2 - 20a} \\ &= \sqrt{64} = 8 \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 12.25

- A) 37 B) 43 C) 41 D) 44 E) 40

Çözüm : Bir sayının sadece 3 pozitif tam böleni varsa bu sayı p asal olmak üzere, p^2 formunda olabilir. Gerçekten de tam bölenleri 1, p ve p^2 olur. Buna göre, a , b ve c sayılarının üçü de üç basamaklı ise, en küçük $a = 11^2 = 121$, $b = 13^2 = 169$ ve $c = 17^2 = 289$ olur. Buna göre, en küçük

$$\sqrt{11^2} + \sqrt{13^2} + \sqrt{17^2} = 41$$

elde edilir.

Test 12.26 LYS-2013

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) 1 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm : Her iki tarafın karesini alırsak

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &= (\sqrt{a+b-1})^2 \\ \Rightarrow a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b &= a + b - 1 \\ \Rightarrow 2\sqrt{ab} &= 1 \\ \Rightarrow \sqrt{ab} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow ab &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

elde edilir.

Test 12.27 AMC10 – 2022

A) 8 B) 15 C) 3 D) 4 E) 2

Çözüm :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \left(1+\frac{1}{5}\right)^2 \left(1+\frac{1}{7}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{3^2}\right) \left(1-\frac{1}{5^2}\right) \left(1-\frac{1}{7^2}\right)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right) \left(1+\frac{1}{3}\right) \left(1+\frac{1}{5}\right) \left(1+\frac{1}{5}\right) \left(1+\frac{1}{7}\right) \left(1+\frac{1}{7}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right) \left(1+\frac{1}{3}\right) \left(1-\frac{1}{5}\right) \left(1+\frac{1}{5}\right) \left(1-\frac{1}{7}\right) \left(1+\frac{1}{7}\right)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right) \left(1+\frac{1}{5}\right) \left(1+\frac{1}{7}\right)}{\left(1-\frac{1}{3}\right) \left(1-\frac{1}{5}\right) \left(1-\frac{1}{7}\right)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{8}{7}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6 \cdot 8}{2 \cdot 4 \cdot 6}} = \sqrt{4} = 2
 \end{aligned}$$

olur.

Test 12.28 AMC10A-2022

A) 8 B) 11 C) 7 D) 13 E) 9

Çözüm :

$$\begin{aligned}
 2^m \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{12}}} &= 2 \cdot \sqrt[m]{\frac{1}{2^{12}}} \Rightarrow 2^m \cdot \sqrt{\frac{1}{2^{12}}} = 2 \cdot \sqrt[m]{\frac{1}{2^{12}}} \\
 &\Rightarrow \frac{2^m}{2^6} = 2 \sqrt[m]{2^{-12}} \\
 &\Rightarrow 2^{m-6} = 2 \cdot 2^{\frac{-12}{m}} \\
 &\Rightarrow 2^{m-6} = 2^{1-\frac{12}{m}} \\
 &\Rightarrow m-6 = 1 - \frac{12}{m} \\
 &\Rightarrow m^2 - 6m = m - 12 \\
 &\Rightarrow m^2 - 7m + 12 = 0 \\
 &\Rightarrow (m-3)(m-4) = 0
 \end{aligned}$$

eşitliğinden $m = 3$ veya $m = 4$ olabilir. Yanıt : $3 + 4 = 7$.**Test 12.29**A) $\frac{36}{11}$ B) 1 C) $\frac{32}{11}$ D) $\frac{16}{11}$ E) $\frac{9}{11}$ **Çözüm :** Her iki tarafın karesi alınırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}
 x - \sqrt{x} + 2\sqrt{x - \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x}} + x + \sqrt{x} &= 12, \\
 2x + 2\sqrt{(x - \sqrt{x})(x + \sqrt{x})} &= 12 \\
 x + \sqrt{x^2 - x} &= 6, \\
 \sqrt{x^2 - x} &= 6 - x
 \end{aligned}$$

elde edilir. Tekrar her iki tarafın karesi alınırsa

$$x^2 - x = 36 - 12x + x^2 \Rightarrow 11x = 36 \Rightarrow x = \frac{36}{11}$$

bulunur.

KÜMELER

Alıştırma 13.1.



Çözüm : $k \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan ve $x < 50$ olduğundan k en az 1 en fazla 11 olabilir. O halde, A kümesi 11 elemanlıdır.

$$A = \{7, 11, 15, \dots, 47\} \text{ ve } s(A) = 11$$

biçiminde yazılabilir.

Alıştırma 13.2.



Çözüm :

$$\begin{aligned} |x + 2| < 8 &\Rightarrow -8 < x + 2 < 8 \\ &\Rightarrow -10 < x < 6 \end{aligned}$$

ve x asal olduğundan, x sayısı 2, 3 ve 5 olabilir.

$$A = \{2, 3, 5\} \text{ ve } s(A) = 3 \text{ bulunur.}$$

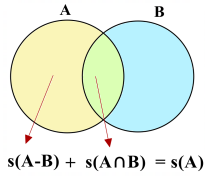
Kümelerde İşlemler

Bu konunun başlangıç seviyesindeki konu anlatımını ve sorularını Dahimatik 6'da bulabilirsiniz. Bu konuyu anlama da zorluk yaşayan öğrenciler öncelikle Dahimatik 6'daki kümeler kısmını bitirmelidir.

Alıştırma 13.3.



Çözüm :



Alıştırma 13.4.



Çözüm :

$$s(A \cup B) = s(A - B) + s(B - A) + s(A \cap B)$$

$$s(A \cup B) = 11 + 7 + 3 = 21$$

olduğunu bulabiliriz.

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B - A) \Rightarrow 21 = s(A) + 7$$

eşitliğinden $s(A) = 14$ bulunur.

Alıştırma 13.5.



Çözüm : $K = \{101, 102, 103, \dots, 302\}$ kümesinin 4 ile bölünen elemanların sayısını bulalım.

$$\{104, 108, \dots, 300\} \Rightarrow \frac{300 - 104}{4} + 1 = 50$$

olur. K kümesinin 9 ile bölünen elemanlarının sayısını bulalım.

$$\{108, 117, \dots, 297\} \Rightarrow \frac{297 - 108}{9} + 1 = 22.$$

Şimdi de, 4 ve 9 yani 36 ile bölünenlerin sayısını bulalım.

$$\{108, 144, \dots, 288\} \Rightarrow \frac{288 - 108}{36} + 1 = 6$$

olduğundan

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 50 + 22 - 6 = 66$$

bulunur.

Alıştırma 13.6.



Çözüm : $K = \{100, 101, \dots, 999\}$ kümesinin 5 ile bölünen elemanların sayısını bulalım.

$$\{100, 105, \dots, 995\} \Rightarrow \frac{995 - 100}{5} + 1 = 180$$

olur. Bunların arasında 3 ile bölünmeyenlerin sayısını çıkarmalıyız. Yani, 15'in katı olan eleman sayısını bulup çıkaracağız.

$$\{105, 120, \dots, 990\} \Rightarrow \frac{990 - 105}{15} + 1 = 60$$

olduğundan istenen yanıt $180 - 60 = 120$ bulunur.

Alıştırma

13.7.



Çözüm : a) **A** kümesindeki elemanlar 3-erli, **B** kümesindeki elemanlar da 4-erli artmaktadır. O halde,

$$A = \{x : x = 3k + 5 \text{ ve } k = 0, 1, 2, \dots, 10\},$$

$$B = \{x : x = 4k + 1 \text{ ve } k = 0, 1, 2, \dots, 10\}$$

biçiminde ifade edebiliriz. O halde, **A** kümesinin en büyük elemanı $n = 35$ ve **B** kümesinin en büyük elemanı $m = 41$ olur. **A** ve **B** kümelerindeki en küçük ortak eleman 5 olduğundan, ortak elemanlar $5 + (3 \cdot 4)k$ formundadır. Kesişimdeki elemanlar 35'ten küçük olmalıdır, $12 \cdot 3 + 5 = 41$ olduğundan k en fazla 2 olabilir. Böylece,

$$A \cap B = \{x : x = 5 + 12k, k = 0, 1, 2\} = \{5, 17, 29\}$$

biçiminde yazılabilir. $s(A \cap B) = 3$ bulunur.

b)

$$s(A - B) = s(A) - s(A \cap B) = 11 - 3 = 8 \text{ bulunur.}$$

Alt Küme Kavramı

Alıştırma

13.8.



Çözüm : $\mathcal{T}(\{2, 3\}) + T(B) = \mathcal{T}(\{1, 2, 3, 4\})$ eşitliğine göre,

$$5 + T(B) = 10 \Rightarrow T(B) = 5$$

olmasını istiyoruz. Buna göre, $B_1 = \{5\}$, $B_2 = \{1, 4\}$, $B_3 = \{2, 3\}$ olmak üzere üç küme olabilir.

Alıştırma

13.9.



Çözüm : $s(A - C) = 1$ olduğundan, **A** kümesinin elemanlarından 3 tanesi **C** kümesinde olması gerekir. Fakat **C** kümesi **B** kümesinin alt kümesi olduğu için bu elemanlar aynı zamanda **B** kümesinde olmalıdır. Buna göre, **C** kümesinde $\{2, 3, 4\}$ elemanlarının mutlaka olması gerekir. Böylece **C** kümesi

$\{2, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\}$, $\{2, 3, 4, 6\}$, $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümeleri olabilir.

Bir Kümenin Değili

Aıştırma 13.10.



Çözüm : E konferansa katılan araştırmacıların kümesi olmak üzere, Türk araştırmacıların kümesini A ile gösterelim. $s(A) = x$ olsun. Bu durumda $s(A') = 4x + 3$ olur.

$$s(A) + s(A') = s(E) = 203$$

$$\Rightarrow x + 4x + 3 = 203$$

$$\Rightarrow 5x = 200 \Rightarrow x = 40$$

elde edilir.

Aıştırma 13.11.



Çözüm : n 'den küçük olan pozitif tam sayıların kümesi

$$E = \{1, 2, 3, \dots, n - 1\}$$

biçimindedir. A kümesi bu kümesinin içerisinde 5 ile tam bölünen sayıların kümesi olsun.

$$A = \{5, 10, 15, \dots\}$$

olduğundan ve eleman sayısı A kümesinin en büyük elemanı $5 \cdot 15 = 75$ olur. $5 \cdot 16 = 80$ olduğundan

$$E = \{1, 2, 3, \dots, 79\}$$

seçilirse 5 ile tam bölünenlerin sayısı 15 ise 5 ile tam bölünmeyenlerin sayısı $79 - 15 = 64$ elde edilir.

İçerme - Dışarma İlkesi (İDİ)

Aıştırma 13.12.



$$\text{Çözüm : } s(A) = \frac{123 - 3}{5} + 1 = 25 \text{ ve}$$

$$s(B) = \frac{211 - 1}{3} + 1 = 71$$

biçiminde bulunabilir. Ortak elemanları bulalım. A ve B kümelerindeki en küçük ortak eleman 13 olduğundan, ortak elemanlar

$$13 + (3 \cdot 5)k = 15k + 13$$

formundadır. Kesişimdeki elemanlar 123 'ten küçük olmalıdır, $7 \cdot 15 + 13 = 118$ olduğundan k en fazla 7 olabilir. Böylece,

$$A \cap B = \{x : x = 13 + 15k, k = 0, 1, \dots, 7\}$$

olduğundan, $s(A \cap B) = 8$ bulunur. O halde,

$$\begin{aligned} s(A \cup B) &= s(A) + s(B) - s(A \cap B) \\ &= 25 + 71 - 8 = 88 \end{aligned}$$

bulunur.

Aıştırma 13.13.



Çözüm : $s(A)=7, s(B)=9, s(C)=5$ olduğu kolayca bulunabilir.

$$A \cap B = \{5 + 12k : k=0, 1\} = \{5, 17\},$$

$$A \cap C = \{5 + 20k : k=0, 1\} = \{5, 25\},$$

$$B \cap C = \{5 + 15k : k=0, 1\} = \{5, 20\},$$

olduğundan, $s(A \cap B) = s(A \cap C) = s(B \cap C) = 2$ olur. $A \cap B \cap C = \{5\}$ olduğundan,

$$s(A \cup B \cup C) = 7 + 9 + 5 - 2 - 2 - 2 + 1 = 16$$

elde edilir.

Küme İşlemleri ve Bağlaçların İlişkisi

Aıştırma 13.15.



Çözüm : Ukraynalı basketbol oynamayan mavi gözlü öğrenciler

$$(B \cap C \cap D') = (B \cap C - D)$$

biçiminde Ukraynalı olmayan kız öğrenciler

$$(A \cap B') = A - B$$

biçiminde gösterebiliriz. Bu iki ifade ile kelimesiyle yani birlikte anlamına gelen bir kelime ile birbirine bağlanmış ve birleşim kastedilmiş. O halde, bu ifadeyi kümelerle

$$(B \cap C - D) \cup (A - B)$$

biçiminde gösterebiliriz.

Aıştırma 13.14.



Çözüm : a) $A \cap B \cap C$

b) $C \cap (A \cup B)$

c) $A - B = A \cap B'$

d) $A \cap C \cap B' = A \cap C - B$

e) $C \cap B \cap A' = C \cap B - A$

f) $(A \cup B) \cap C' = (A \cup B) - C$

Aıştırma 13.16.



Çözüm : T kümesinin elemanlarından $\left\lfloor \frac{50}{2} \right\rfloor = 25$ tanesi 2'ye, $\left\lfloor \frac{50}{3} \right\rfloor = 16$ tanesi 3'e, $\left\lfloor \frac{50}{5} \right\rfloor = 10$ tanesi ise 5'e tam bölünür. Bunun yanında, $\left\lfloor \frac{50}{2 \cdot 3} \right\rfloor = 8$ tanesi 6'ya, $\left\lfloor \frac{50}{2 \cdot 5} \right\rfloor = 5$ tanesi 10'a, $\left\lfloor \frac{50}{3 \cdot 5} \right\rfloor = 3$ tanesi ise 15'e tam bölünür. Son olarak $\left\lfloor \frac{50}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor = 1$ tanesi ise 30'a tam bölünür. Buna göre,

a) $25 + 16 + 10 - 8 - 5 - 3 + 1 = 36$ tanesi 2 veya 3 veya 5 ile tam bölünür

b) $50 - 36 = 14$ tanesi 2, 3 ve 5'ten herhangi birine bölünmez.

c) $16 - 8 - 3 + 1 = 6$ tanesi 3'e tam bölünür ama 2 veya 5'e tam bölünmez.

Alıştırma

13.17.



Çözüm : n sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi A , m sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi B olsun. Bizden istenen $s(A - B)$ değeridir.

$$s(A \cup B) = 200 \text{ ve } s(B) = 120$$

verilmiş. Buna göre,

$$s(A - B) = s(A \cup B) - s(B) = 200 - 120 = 80$$

sayı vardır.

Alıştırma

13.18.

UAMO- 2004



Çözüm : 60^{50} sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi A , 50^{60} sayısını bölen pozitif tam sayıların kümesi B olsun. Bize $s(A - B)$ değeri lazım. Bunun için

$$s(A - B) = s(A) - s(A \cap B)$$

eşitliğini kullanabiliriz.

$$60^{50} = (2^2 \cdot 3 \cdot 5)^{50} = 2^{100} \cdot 3^{50} \cdot 5^{50} \Rightarrow s(A) = 101 \cdot 51 \cdot 51$$

olur.

$$50^{60} = (2 \cdot 5^2)^{60} = 2^{60} \cdot 5^{120}$$

olduğundan dolayı, $EBOB(60^{50}, 50^{60}) = 2^{60} \cdot 5^{50}$ bulunur. O halde,

$$s(A \cap B) = 61 \cdot 51$$

olur. O halde, 60^{50} 'nin bölünen olup, 50^{60} 'in bölünen olmayan pozitif sayıların sayısı

$$s(A - B) = 101 \cdot 51 \cdot 51 - 61 \cdot 51 = 51(101 \cdot 51 - 61)$$

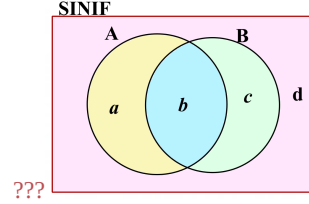
bulunur.

Alıştırma

13.19.



Çözüm :



a) Venn şemasına göre,

$$s(A - B) = 3 \Rightarrow a = 3,$$

$$s(A' \cap B') = 4 \Rightarrow s((A \cup B)') = d = 4,$$

$$s(A' \cup B') = 8 \Rightarrow s((A \cap B)') = a + c + d = 8$$

olur. Buradan $c = s(B - A) = 1$ olur. b)

$$s(A \cup B) = s(A \cap B) + s(A - B) + s(B - A)$$

$$11 = s(A \cap B) + 3 + 1$$

eşitliğinden $s(A \cap B) = 7$ edilir.

Alıştırma

13.20.



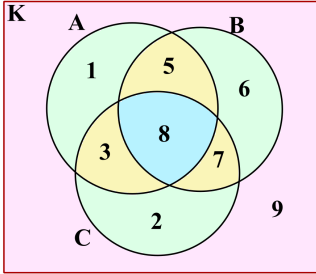
Çözüm : 6, 5 ve 7 ile bölünen sayıların kümesini sırasıyla A , B ve C ile gösterelim. Bizden istenen değer $s(A' \cup B' \cup C')$ değeridir. De Morgan kuralını kullanırsak

$$s(A' \cup B' \cup C') = s((A \cap B \cap C)')$$

$$= 100 - s(A \cap B \cap C)$$

$$= 100 - 11 = 89$$

bulunur. değeridir.

Aıştırma 13.21.

Çözüm : a)

$$s(B \cap A') = s(B - A) = 6 + 7 = 13$$

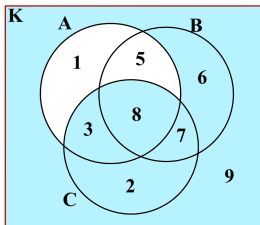
b)

$$\begin{aligned} s(B \cap C' \cap A') &= s(B \cap (C \cup A)') \\ &= s(B - (C \cup A)) = 6 \end{aligned}$$

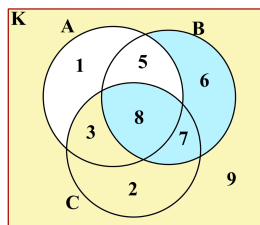
c)

$$\begin{aligned} s(A \cap C' \cap B') &= s(A \cap (C \cup B)') \\ &= s(A - (C \cup B)) = 1 \end{aligned}$$

d) 3'ün katı olmayan veya tam kare olan sayıların kümesi aşağıdaki mavi bölgeyle gösterilmiştir. Rakamları toplamı asal olanları B kümesiyle göstermiştik. 3'ün katı olmayan veya tam kare olan sayılardan asal olmayanların kümesi de 2. şekildeki sarı bölgeyle gösterilmiştir. Bu bölgedeki elemanların toplamı $s((A' \cup C) \cap B') = 3 + 2 + 9 = 14$ bulunur.



???

**Küme Problemleri****Aıştırma 13.22.**

Çözüm : Aksiyon izleyen erkek öğrencilerin sayısı x olsun. Buna göre aşağıdaki tablo doldurulabilir.

	Erkek	Kız	Toplam
Animasyon	$4x$	$2x$	$6x$
Aksiyon	x	$x + 11$	$2x + 11$
Toplam	$5x$	$3x + 11$	$8x + 11$

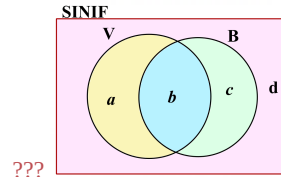
Buna göre, $8x + 11 = 51$ eşitliğinden $x = 5$ bulunur. O halde, animasyon filmi izleyen $6 \cdot 5 = 30$ kişi vardır.

Aıştırma 13.23.

Çözüm : Aşağıdaki gibi Venn şeması çizerek her bölgedeki eleman sayılarını a, b, c ve d ile gösterelim.

$$a + b + c + d = 40$$

olduğunu biliyoruz.



???

Soruda $s(V') = 13$ ve $s(B') = 15$ verilmiş. O halde, $a + b + c + d = 40$ olduğu da göz önüne alınırsa

$$s(V) = 27 \text{ ve } s(B) = 25$$

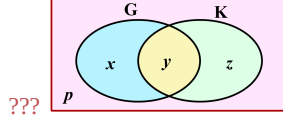
olur. Buradan da $a + b = 27$, $c + b = 25$ eşitlikleri elde edilir. Taraf tarafa çıkarılırsa $a - c = 2$ olur ki bu bizden istenen değerdir.

Aıştırma

13.24.



Çözüm : Tüm sınıf 100 kişi olsun. Gitar ve Keman çalabilenlerin sayılarını gösteren Venn şeması aşağıdaki gibi olsun.



%45'i gitar ve %16'sı keman çalabildiğinden yukarıdaki şema göz önüne alınırsa

$x + y + z + p = 100$, $x + y = 45$, $y + z = 16$ eşitlikleri yazılabilir. $z = 0$ alınırsa, en fazla $y = 16$ kişi hem keman hem de gitar çalabileceği görülür. Yanıt : %16.

Aıştırma

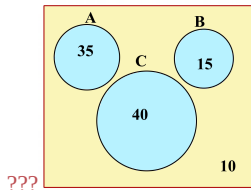
13.25.



Çözüm : 5 ile bölünenlerin kümesi A, 7 ile bölünenlerin kümesi B ve 3 ile bölünenlerin kümesi de C olsun. Verilenlerden %35'i 5 ile, %40'ı 3 ile ve %15'i 7 ile tam bölünebilir. Bu üç sayıyla da bölünemeyen eleman sayısının en az olması için, bunların tamamının ayrık olduğu ve hiç ortak elemanın olmadığı kabul edilmelidir. Bu durumda, öğrencilerin

$$\%(35 + 40 + 15) = \%90'ı$$

bu üç sayıdan biriyle bölünür. Bu üç sayıyla da bölünmeyenlerin yüzdesi de en az $\%(100 - 90) = \%10$ olur.



Alt Küme Sayısı

Aıştırma

13.26.



Çözüm : A kümesinin eleman sayısı n ise öz alt küme sayısı

$$2^n - 1 = 2m + 7 \Rightarrow 2^n = 2(m + 4)$$

verilmiş. Diğer yandan, $s(B) = n - 2$ ve alt küme sayısı m olduğundan,

$$2^{n-2} = m \Rightarrow 2^n = 4m$$

olur. Buradan,

$$2(m + 4) = 4m \Rightarrow m = 4$$

elde edilir. O halde, $2^n = 16$ eşitliğinden $n = 4$ bulunur ve $m + n = 8$ olur.

Aıştırma

13.27.



Çözüm :

$A \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$, $\{1, 3\}$ veya $\{2, 3\}$ olabilir.

$$A \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$$

ise A kümesinde 1 ve 2 olmalı 3 ise olmamalıdır. 4, 5, 6 elemanları olabilir. Buna göre, $\{4, 5, 6\}$ kümesinin $2^3 = 8$ alt kümesi vardır ve bu alt kümelerin her birine 1, 2 elemanları eklenirse koşul sağlanır. O halde, $A \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$ olacak şekilde 8 alt küme vardır. Benzer şekilde

$$A \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$$

$$A \cap \{1, 2, 3\} = \{2, 3\}$$

olacak şekilde de 8'er alt küme vardır ve toplam 24 tane A alt kümesi bulunabilir.

Aıştırma

13.28.



Çözüm : $A - \{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin eleman sayısı 2 ise, 5, 6, 7 elemanlarından sadece 2 tanesi A kümesinde olmalıdır.

$A - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6\}$, $\{5, 7\}$ veya $\{6, 7\}$ olabilir.

$$A - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6\}$$

ise A kümesinde 5 ve 6 olmalı 7 ise olmamalıdır. 1, 2, 3, 4 elemanları olabilir. Buna göre, $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin $2^4 = 16$ alt kümesi vardır ve bu alt kümelerin her birine 5 ve 6 elemanları eklenirse koşul sağlanır. O halde, $A - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6\}$ olacak şekilde 16 alt küme vardır. Benzer şekilde

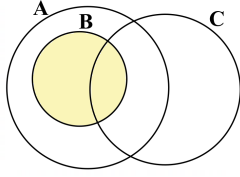
$$A - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 7\}$$

$$A - \{1, 2, 3, 4\} = \{6, 7\}$$

olacak şekilde de 16-şar alt küme vardır ve toplam $3 \cdot 16 = 48$ tane A alt kümesi bulunabilir.

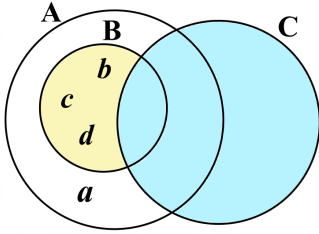
KONU SONU TESTİ (Kümeler)

Test 13.1



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm : $(A \cap B) = B$ olduğundan $B - C = \{b, c, d\}$ olacaktır. İlk iki bilgi yardımıyla şekildeki gibi doldurulabilir.



Buna göre, $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ olduğundan $C = \{e, f, g\}$ ve $s(C) = 3$ bulunur.

Test 13.2



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm :

$$A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

$$B = \{-10, -7, -4, -1, 2, 5, 8\}$$

$$A \cap B = \{-1, 2\}$$

$$C = \{-9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9\}$$

olduğundan A ve B kümesinin alt kümesi olup C kümesinin alt kümesi olmayan D kümeleri sadece

$$D = \{-1, 2\} ; D = \{2\}$$

olabilir.

Test 13.3



- A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 5

Çözüm : $s(A - C) = 2$ olduğundan, A kümesinin elemanlarından 2 tanesi C kümesinde olması gerekir. Fakat C kümesi B kümesinin alt kümesi olduğu için bu elemanlar aynı zamanda B kümesinde olmalıdır. Buna göre, C kümesinde $\{3, 4\}$ elemanları mutlaka olması gerekir. Böylece C kümesi

$$\{3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{3, 4, 6\}, \{3, 4, 7\}, \{3, 4, 5, 6\}, \\ \{3, 4, 5, 7\}, \{3, 4, 6, 7\}, \{3, 4, 5, 6, 7\},$$

kümeleri olabilir.

Test 13.4



- A) 120 B) 210 C) 180 D) 240 E) 200

Çözüm : 1 elemanı A kümesinin alt kümelerinde kaç kez bulunduğunu bulalım.

$$\{2, 3, 4, 5\}$$

kümesinin tüm alt kümelerine 1 eklersek her biri farklı küme olacaktır. Yani, $2^4 = 16$ tane elemanı 1 olan küme vardır. Benzer şekilde, 2, 3, 4, 5 elemanlarının bulunduğu yine 16 küme vardır. O halde, bunların tamamının toplamı

$$16 \cdot 1 + 16 \cdot 2 + 16 \cdot 3 + 16 \cdot 4 + 16 \cdot 5 = 240$$

bulunur.

Test 13.5



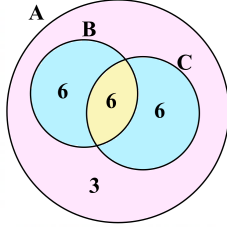
- A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 5

Çözüm : $A \subseteq C$ olduğu için, C kümesinin 1 ve 5 elemanları olmalıdır. C kümesi de B kümesinin alt kümesi olduğundan bu elemanlara sadece $\{3, 4, 5\}$ kümesinin alt kümelerinin elemanları eklenebilir. $\{3, 4, 5\}$ kümesinin $2^3 = 8$ alt kümesi olduğundan istenen şekilde 8 tane C kümesi vardır.

Test 13.6

- A) 20 B) 22 C) 21 D) 23 E) 24

Çözüm : $(B \cup C) \subset A$ olacak şekilde Venn şeması çizelim ve verilere göre eleman sayılarını bölgelerde gösterelim.



Buna göre, $s(A \cup B \cup C) = 6 + 6 + 6 + 3 = 21$ olur.

Test 13.7

- A) 8 B) 0 C) 10 D) 11 E) 12

Çözüm : Verilenlerden %20'si tiyatro kulübüne, %40'u spor kulübüne üyedir. Sınıfı 100 kişi kabul edersek

$$s(T \cup S) = s(T) + s(S) - s(S \cap T)$$

eşitliğinden,

$$50 = 20 + 40 - s(S \cap T) \Rightarrow s(S \cap T) = 10$$

olur. Yanıt %10.

$T = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ kümesi pozitif tek sayılar kümesidir.

$$A = \left\{ n : \frac{n+1}{2} \in T, n \leq 100 \right\}$$

$$B = \left\{ n : \frac{n+2}{3} \in T, n \leq 100 \right\}$$

olduğuna göre aşağıdaki üç soruyu yanıtlayınız.

Test 13.8

- A) 38 B) 41 C) 45 D) 42 E) 44

Çözüm : A kümesinde $\frac{n+1}{2}$ tek sayı olacak şekilde 100'den küçük n sayıları vardır. Küçük sayılar için kontrol edersek A kümesinin elemanlarının 1, 5, 9, ... şeklinde 4'er artan bir aritmetik örüntü olduğunu görürüz. O halde, A kümesini

$$A = \{n : n = 4k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, 24\}$$

biçiminde de yazabiliriz. Yani, $s(A) = 25$ olur.

Not : $n = 4k + 1$ olduğunu aşağıdaki şekilde de görebilirdik.

$$\frac{n+1}{2} \in T \Rightarrow \frac{n+1}{2} = (2k+1) \Rightarrow n = 4k + 1$$

olacaktır.

B kümesini de bu şekilde ifade edelim. Küçük sayılar için kontrol edersek B kümesinin elemanlarının 1, 7, 13, ... şeklinde 6-şar artan bir aritmetik örüntü olduğunu görürüz. O halde, B kümesini

$$B = \{n : n = 6k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, 16\}$$

biçiminde de yazabiliriz. Yani, $s(B) = 17$ olur.

$$\frac{n+2}{3} = 2k + 1 \Rightarrow n + 2 = 6k + 3 \Rightarrow n = 6k + 1$$

biçiminde de görebilirdik. Böylece, $s(A) + s(B) = 25 + 17 = 42$ olur.

Test 13.9

- A) 8 B) 7 C) 6 D) 4 E) 9

Çözüm :

$$A = \{n : n = 4k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, 24\}$$

$$B = \{n : n = 6m + 1, m = 0, 1, 2, \dots, 16\}$$

kümelerine göre A kümesi 1 eksiği 4 ile, B kümesi de 1 eksiği 6 ile tam bölünen sayılardan oluşuyor. O halde, $EKOK(4, 6) = 12$ olduğundan,

$$A \cap B = \{n : n = 12k + 1, k = 0, 1, 2, \dots, 8\}$$

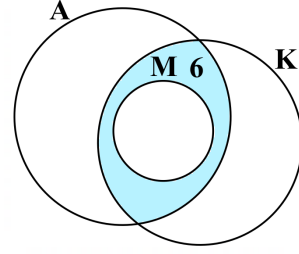
biçiminde tanımlanabilir. $s(A \cap B) = 9$ bulunur.

Test 13.10

- A) 35 B) 42 C) 36 D) 33 E) 32

Çözüm :

$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 42 - 9 = 33$
bulunur.

Test 13.13

- A) $s(A \cap K - M) = 6$ B) $s(A \cup K - M) = 6$ C) $s(A - M \cap K) = 6$

- D) $s(A \cap K \cap M) = 6$ E) $s(A \cap K \cup M) = 6$

Çözüm : Antalya'lı Kadın öğretmenlerden matematikçi olmayanların sayısı 6'dır. veya $s(A \cap K - M) = 6$ biçiminde ifade edebiliriz.

Test 13.14

Bir okuldaki öğretmenlerden aşağıdaki gibi üç küme belirlenmiştir.

$K = \{\text{Kadın öğretmenler}\}$

$M = \{\text{Matematik Öğretmenleri}\}$

$A = \{\text{Antalya'lı Öğretmenler}\}$

Buna göre aşağıdaki üç soruyu yanıtlayınız.

Test 13.11

- A) $(K \cap M) \subset A$ B) $(K \cap M) \cap A$ C) $(K \cap M) - A$
D) $(K \cup M) \subset A$ E) $A \subset (K \cap M)$

Çözüm :

$(K \cap M) \subset A$

Test 13.12

- A) $s(A \cup K' \cup M) = 15$ B) $s(A \cap K \cap M) = 15$ C) $s(A \cap K' \cap M') = 15$

- D) $s(A \cap K' \cap M) = 15$ E) $s(A \cup K \cup M) = 15$

Çözüm :

$s(A \cap K' \cap M) = 15$

Test 13.15

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 2 E) 5

Çözüm :

$$s(A - B') = s(A \cap B) = x + 1$$

$$s(A - (A \cap B)) = s(A - B) = 3x + 5$$

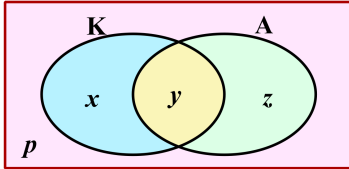
olarak yazabiliriz.

$s(A \cap B) + s(A - B) = s(A) \Rightarrow x + 1 + 3x + 5 = 14$
eşitliğinden $x = 2$ bulunur. Böylece, $s(A \cap B) = 2 + 1 = 3$ olur.

Test 13.16

- A) 15 B) 22 C) 20 D) 18 E) 14

Çözüm : Azerbaycan ve Kazakistan'a gidenlerin sayılarını sırasıyla **A** ve **K** kümeleriyle aşağıdaki Venn şemasında gösterelim. Sınıftaki öğrenci sayısına da 100 diyelim.



$$x + y + z + p = 100$$

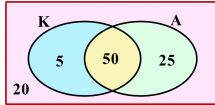
olur. Bizden istenen y değerinin en az kaç olacağıdır. %25'i Azerbaycan'a gitmemişse, %75'i gitmiştir.

$$y + z = 100,$$

olur. %55'i Kazakistan'a gitmemişse varsa, %55'i gitmiştir. ve

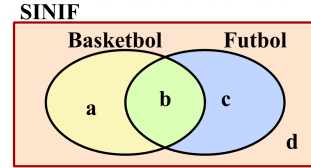
$$x + y = 55$$

olur. En az %5'i Azerbaycan'a gidip Kazakistan'a gitmemişse $x = 5$ alınırsa, $y = 50$ en fazla değerini alır. Bu durumda, $z = 25$, $p = 20$ olacaktır. O halde, her iki ülkeye de gitmeyenlerin yüzdesi %20 olur. Aşağıdaki şemada özetlenebilir.

**Test 13.17**

- A) 15 B) 22 C) 20 D) 18 E) 14

Çözüm : Soruya göre küme şemasını çizelim.



Verilenlerden

$$a + b + c + d = 30,$$

$$b = 6,$$

$$a + b + c = 20,$$

$$(b + c) - (a + b) = 4$$

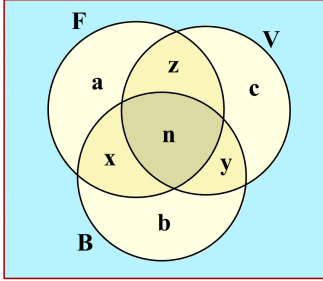
yazılabilir. Bu eşitliklerden $d = 10$, $a + c = 14$, $c - a = 4$ elde edilebilir. Son iki eşitlik taraf tarafa toplanırsa $2c = 18$ ve $c = 9$ olur. Böylece, $a = 5$ olur. Futbol oynamayan $a + d = 5 + 10 = 15$ kişi vardır.

Test 13.18



- A) 5 B) 2 C) 7 D) 8 E) 4

Çözüm : Aşağıdaki Venn diagramını çizelim ve bölgelerde öğrenci sayılarını harflerle gösterelim.



2 öğrenci her üç sporu da yaptığına göre $n = 2$ 'dir. Futbol oynayanların 8 tanesi basketbol, 4 tanesi de voleybol oynadığından

$$x + n = x + 2 = 8,$$

$$z + n = z + 2 = 4$$

eşitliklerinden de $x = 6$ ve $z = 2$ elde edilir. 5 öğrenci ise voleybol ve basketbol oynadığından,

$$n + y = 2 + y = 5$$

eşitliğinden $y = 3$ olur. Toplam öğrenci sayısı 38 olduğundan

$$a + b + c = 38 - 6 - 2 - 3 - 2 = 25,$$

olur. Basketbol oynayanlar da voleybol oynayanlardan 5 fazla ise

$$(b - c) + (x - z) = 5 \Rightarrow b - c = 5 - 6 + 2 = 1$$

ve futbol oynayanlar, voleybol oynayanların 2 katı olduğundan

$$a + z + n + x = 2(z + n + c + y),$$

veya

$$a + 10 = 2(7 + c) = 2c + 14 \Rightarrow a = 2c + 4$$

elde edilir. $a + b + c = 25$ eşitliğinde, $a = 2c + 4$ ve $b = c + 1$ yazılırsa,

$$2c + 4 + c + 1 + c = 25 \Rightarrow 4c + 5 = 25 \Rightarrow c = 5$$

olur. Yalnız voleybol oynayan 5 kişi vardır.

Test 13.19



Test 13.20



- A) 25 B) 26 C) 20 D) 29 E) 27

Çözüm : **A** kümesinin elemanlarının %70'i **B** kümesinin elemanı değilse %30'u elemanıdır. Yani, $A \cap B$ kümesinde **A** kümesinin elemanlarının %30'u bulunur.

B kümesinin elemanlarının %60'ı **A** kümesinin elemanı değilse %40'ı elemanıdır. Yani, $A \cap B$ kümesinde **B** kümesinin elemanlarının %40'ı bulunur.

Buna göre,

$$\frac{30}{100} \cdot s(A) = \frac{40}{100} \cdot s(B) \Rightarrow \frac{s(A)}{s(B)} = \frac{4k}{3k}$$

olacağından $s(A) = 4k$ ve $s(B) = 3k$ olabilir. Bu durumda,

$$s(A \cap B) = \frac{30}{100} \cdot s(A) = \frac{30}{100} \cdot 4k = \frac{6k}{5}$$

olur ki, bu ifadenin tam sayı olması için k en az 5 olabilir. Buna göre,

$$s(A) = 20, \quad s(B) = 15 \quad \text{ve} \quad s(A \cap B) = 6$$

elde edilir. Böylece,

$$s(A \cup B) = s(A) + s(B) - s(A \cap B) = 20 + 15 - 6 = 29$$

bulunur.

Çözüm : Sınıfta $100x$ kişi olsun.

$$s(\text{İ}) = \%40 \cdot 100x = 40x,$$

$$s(\text{B}) = \%80 \cdot 100x = 80x$$

Test 13.21

- A) 15 B) 22 C) 20 D) 18 E) 14

Çözüm : Hem gitar hem piyano çalabilenlerin sayısını bulalım.

Gitar çalabilenlerin %20'si piyano da çalabiliyorsa

$$s(G \cap P) = \%20 \cdot s(G)$$

olur. Piyano çalabilenlerin %90'ı gitar çalamıyorsa

$$s(G \cap P) = \%10 \cdot s(P)$$

olur. Buradan,

$$\frac{10}{100} s(P) = \frac{20}{100} s(G) \Rightarrow \frac{s(P)}{s(G)} = \frac{20}{10} = 2 \Rightarrow s(P) = 2s(G)$$

bulunur. $s(G) = a$ denilirse

$$s(P) = 2a \text{ ve } s(G \cap P) = \%20 \cdot a = \frac{20a}{100} = \frac{a}{5}$$

olur.

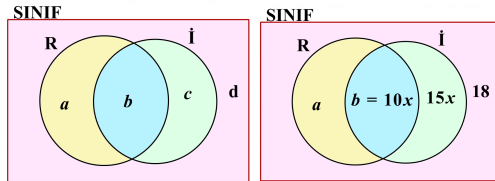
$$s(G \cup P) = s(G) + s(P) - s(G \cap P) \Rightarrow 42 = a + 2a - \frac{a}{5}$$

eşitliğinde $a = 15$ elde edilir.

Test 13.22

- A) 57 B) 60 C) 63 D) 70 E) 80

Çözüm : Rusça konuşamayanların kümesini **R** ile, İspanyolca konuşamayanların kümesini **İ** ile gösterelim. Aşağıdaki Venn şemasını çizerek d ile her iki dili konuşanlar gösterilmiş olur ve $d = 18$ bulunur. Sınıfta $100x$ kişi olsun. Bu durumda her iki dili konuşamayan $10x$ olur. İspanyolca konuşamayan $25x$ olduğundan sadece İspanyolca konuşamayan $15x$ olur. Aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



Rusça konuşabilenlerin sayısı $15x + 18 = 45x$ olduğundan $x = \frac{3}{5}$ elde edilir. Böylece, sınıfta $100x = 100 \cdot \frac{3}{5} = 60$ kişi vardır.

Test 13.23 UOMO-2001

- A) 13 B) 22 C) 10 D) 18 E) 14

Çözüm : Bu kümenin tüm elemanlarının toplamı :

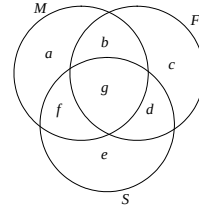
$$\left(\frac{127+1}{2} \right) \left(\frac{127-1}{1} + 1 \right) = 127 \cdot 64 = 2^6 \cdot 127$$

olduğundan, birleşimlerinin toplamı $127 \cdot 64$ olmalıdır. Bu kümenin, her birinin içindeki elemanların toplamı aynı olan n tane ayrık kümenin bileşimi olabilmesi için, n sayısının $127 \cdot 64$ sayısını bölmesi gerekir. $2^6 \cdot 127$ sayısının 1'den büyük pozitif tam bölenlerinin sayısı $(6+1)(1+1) = 14 - 1 = 13$ olur.

Test 13.24 UOMO-2001

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Çözüm :



Venn şemasına göre verilenlerde

$$a + b + f + g = 50,$$

$$b + g + c + d = 50,$$

$$f + g + e + d = 50$$

yazılabilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$3g + 2(b + f + d) + (a + c + e) = 150$$

bulunur.

$$a + c + e = 71 \text{ ve } b + f + d = 35$$

olduğundan, $3g + 70 + 71 = 150$ eşitliğinden, $g = 3$ bulunur.

SIRALAMA

Bu konuyu Dahimatik 6 kitabında başlangıç seviyesinde bulabilirsiniz.

Alıştırma 14.1.



Çözüm : $5! = 120$

Alıştırma 14.2.



Çözüm : a) $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

b) $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$

c) $4 \cdot 4 = 16$

Alıştırma 14.3. AMC8-2015



Çözüm : Erkekleri uçtan sıralamanın $2! = 2$ yolu vardır ve kızları ortadan sıralamanın $3! = 6$ yolu vardır. O halde, toplam $2 \times 6 = 12$ farklı düzende fotoğraflarını çekebilir.

Alıştırma 14.4.



Çözüm : $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ rakamlarıyla 4 basamaklı ve rakamları farklı

$$5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$$

sayı yazılabilir. 5 rakamı olmayanların sayısını bulalım.

$\{0, 1, 2, 3, 4\}$ rakamlarıyla 4 basamaklı ve rakamları farklı

$$4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$$

sayı yazılabilir. O halde, $300 - 96 = 204$ tanesinde 5 rakamı bulunur.

Alıştırma 14.5.



Çözüm :

$\{K, R, M, S\}$ $\{A, I\}$ $\{K, R, M, S\}$

$\{A, I\}$ $\{K, R, M, S\}$ $\{A, I\}$

durumlarından biri olabilir. İlk durumdan

$$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24,$$

ikinci durumdan

$$2 \cdot 4 \cdot 1 = 8$$

kelime yazılabilir. Yanıt : $24 + 8 = 32$ bulunur.

Alıştırma 14.6.



Çözüm :

$$9 + 8 + 7 + 6 = 30$$

olduğundan, istenen sayının rakamları $\{9, 8, 7, 4\}$ veya

$\{9, 8, 6, 5\}$ olabilir. Her iki rakam kümesiyle de $4! = 24$

sayı yazılabilir. Yanıt : $2 \cdot 24 = 48$ olur.

Alıştırma 14.7.**Çözüm :**

$$2 \cdot 3 \cdot 7 = 42$$

olduğundan, istenen sayının rakamları $\{6, 7, 1\}$ veya $\{2, 3, 7\}$ olabilir. Her iki rakam kümesiyle de $3! = 6$ sayı yazılabilir. Yanıt : $2 \cdot 6 = 12$ olur.

Alıştırma 14.8.**Çözüm :**

$$4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$$

Alıştırma 14.9.

Çözüm : Önce 3 basketbolcuyu bir bütün olarak tek kişi gibi düşünelim. Böylece 4 futbolcu ve 1 basketbolcu grup olmak üzere, 5 kişinin sıralanışı olarak düşünülürse

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

farklı şekilde sıralanırlar. Diğer yandan 3 basketbolcu da kendi arasında yan yana $3! = 6$ farklı şekilde sıralanabilir. O halde, istenen şekilde

$$120 \cdot 6 = 720$$

farklı sıralama vardır.

Alıştırma 14.10. AMC8-2020

Çözüm : Önce koşulsuz olarak kaç farklı şekilde sergileyebileceğini bulalım. 4 tane bilyeyi

$$\boxed{4} \boxed{3} \boxed{2} \boxed{1} \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

farklı şekilde yan yana koyabilir. Fakat, Steelie ve Tiger'ı yan yana koymak istemiyor. Bunların yan yana oldukları durumları sayıp bunları tüm durumda çıkaralım. S ve T'nin yan yana olduğu 6 durum aşağıdaki gibidir. Geriye kalan Aggie ve Bumblebee ise yine her biri için 2 şekilde olabilir.

$$\begin{array}{cccc} \boxed{S} & \boxed{T} & \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{T} & \boxed{S} & \boxed{} & \boxed{} \end{array}, \begin{array}{cccc} \boxed{} & \boxed{S} & \boxed{T} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{T} & \boxed{S} & \boxed{} \end{array}, \begin{array}{cccc} \boxed{} & \boxed{} & \boxed{S} & \boxed{T} \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{T} & \boxed{S} \end{array}$$

Böylece, S ve T'nin yan yana olduğu toplam 12 durum vardır. Bunları çıkarırsak, $24 - 12 = 12$ elde edilir.

Alıştırma 14.11. AMC8-2018

Çözüm : Rusça kitaplar bir arada olması gerektiği için tamamını 1 kitap gibi düşünebiliriz. Aynı şekilde ispanyolca kitaplar da bir arada olmak zorunda olduğu için tamamını tek bir kitap gibi ele alabiliriz. Buna göre, 1 Rusça kitabı, 1 İspanyolca kitabı ve 3 Almanca kitabı kaç farklı şekilde sıralayabileceğimizi bulmaya çalışıyoruz. 5 kitabı 5! farklı şekilde sıralayabiliriz. Bu arada iki Rusça kitabını kendi arasında 2! farklı şekilde, dört İspanyolca kitabını da kendi arasında 4! farklı şekilde sıralayabiliriz. Böylece, tüm kitapları koşula uygun şekilde

$$2! \cdot 4! \cdot 5! = 2 \cdot 24 \cdot 120 = 5760$$

farklı şekilde sıralayabiliriz.

Alıştırma 14.12.

Çözüm : Rakamları farklı olduğu için sayılar 1, 2, 3, 7 sayılarıyla oluşturulmalıdır. 1, 2 ve 3 ile başlayan 3! = 6-şar sayı vardır. İlk 18 sayı 1, 2, 3 ile başlar. Böylece, 19-uncu sayı 7123, yirminci sayı da 7132 ve yirmibirinci sayı 7213 olur. $7213 - 7132 = 81$ bulunur.

Aıştırma

14.13.



Çözüm : İstenen koşula uygun sayılar
 $A, B, C, D \in \{1, 2\}$ olmak üzere,

$A0BCD, AB0CD, ABC0D, ABCD0,$

Her biri için $2^4 = 16$ sayı yazılabilir. O halde, $4 \cdot 16 = 64$ sayı vardır.

Aıştırma

14.14.



Çözüm : İstenen koşula uygun sayılar
 $A, B, C, D \in \{0, 1\}$ olmak üzere,

$2ABCD,$

formunda veya $B, C, D \in \{0, 1\}$ olmak üzere,

$12BCD, 1B2CD, 1BC2D, 1BCD2$

formunda olabilir. O halde istenen şekilde
 $2^4 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 = 48$ sayı vardır.

Aıştırma

14.15.



Çözüm : İstenen koşula uygun sayılar $A, B, C \in \{1, 2\}$ olmak üzere,

$A00BC, A0B0C, A0BC0$

$AB00C, AB0C0, ABC00$

biçiminde 6 durum vardır. Her biri için $2^3 = 8$ sayı oluşturulabilir. O halde toplam $6 \cdot 8 = 48$ sayı vardır.

Tekrarlı Sıralamalar

Aıştırma

14.16.



Çözüm : Rakamları

$\{3, 4, 1, 1, 1\}; \{2, 6, 1, 1, 1\}; \{2, 2, 3, 1, 1\}$

kümelerinden birinin elemanları olabilir. Bunlarla oluşturulabilecek sayıların sayısı da

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!2!} = 20 + 20 + 30 = 70$$

bulunur.

Aıştırma

14.17.

AMC8-2009



Çözüm : 24 rakamların çarpımı olarak

$$24 = 1 \cdot 3 \cdot 8 = 1 \cdot 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 4$$

biçiminde yazılabilir. Buna göre,

1, 3, 8 ile $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sayı yazılabilir.

1, 4, 6 ile $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sayı yazılabilir.

2, 3, 4 ile $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sayı yazılabilir.

2, 2, 6 ile $\frac{3!}{2!} = 3$ sayı yazılabilir.

Toplam : $6 + 6 + 6 + 3 = 21$ sayı vardır.

Aıştırma

14.18.

AMC8-2004



Çözüm :

A	B	C	D
---	---	---	---

Dört hanenin her biri için kaç seçenek olduğunu hesaplayarak bu soruyu çözebiliriz. Öncelikle, ilk basamak için 2 ve 4 olmak üzere yalnızca 2 seçenek olduğunu biliyoruz, çünkü ilk basamakta 0 olursa dört basamaklı bir sayı oluşmaz. Basamaklardan birini zaten kullandığımız için ikinci basamak için 3 seçeneğimiz var ve üçüncü basamak için 2 seçeneğimiz var ve son olarak dördüncü ve son olarak yalnızca 1 seçeneğimiz var. O halde,

$$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

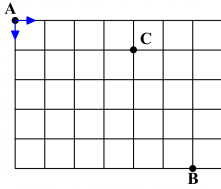
sayı oluşturabilir. **Fakat, 2 tane 0 rakamı olduğu için bu sonucu $2! = 2$ ile bölmemiz gerekir.** Yanıt : $12 \div 2 = 6$ bulunur.

Aıştırma 14.19.

Çözüm : Bizden istenen 3 tane T ve 5 tane Y nin sıralanış sayısıdır.

$$\frac{8!}{3!5!} = 56$$

bulunur.

Aıştırma 14.20.

Çözüm : .

$$\frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{7!}{3!4!} = 5 \cdot 35 = 175$$

elde edilir.

Aıştırma 14.21.

Çözüm : (1, 1) ikilisinde birinci sayının 2 arttırılmasını B ile ikinci sayısının 2 arttırılmasını da S ile gösterelim. Bizden istenen 4 tane B ile 4 tane S'nin kaç farklı şekilde sıralanacağı sorusudur. Buna göre, istenen yanıt

$$\frac{8!}{4!4!} = 70$$

bulunur.

Aıştırma 14.22.

Çözüm : (1, 1) ikilisinde birinci sayının 2 arttırılmasını B ile ikinci sayısının 4 arttırılmasını da S ile gösterelim. Bizden istenen 4 tane B ile 2 tane S'nin kaç farklı şekilde sıralanacağı sorusudur. Buna göre, istenen yanıt

$$\frac{6!}{4!2!} = 15$$

bulunur.

Aıştırma 14.23.

Çözüm : Son rakam 2 olması gerekir. O halde, Üç tane 1, iki tane 2 ve iki tane 3 rakamını kullanarak kaç tane 7 basamaklı sayı oluşturulacağını bulmalıyız.

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210$$

elde edilir.

Aıştırma 14.24.

Çözüm : 7 basamaklı sayının ilk rakamı 2 veya 3 olabilir. İlk rakam 2 ise,

2

için geri kalan üç tane 0, üç tane 3 ve bir tane 2 ile $\frac{7!}{3!3!} = 140$ sayı oluşturulabilir. İlk rakam 3 ise,

3

için geri kalan üç tane 0, iki tane 3 ve iki tane 2 ile $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$ sayı oluşturulabilir.

Sonuç olarak $140 + 210 = 350$ farklı sayı yazılabilir.

Aıştırma 14.25.

Çözüm : Üç tane 1'in yan yana olduğu durumların sayısını hesaplayıp tüm durumlardan çıkarabiliriz. Üç tane 1, üç tane 2 ve iki tane 3 rakamını kullanarak kaç tane 8 basamaklı sayı oluşturulacağını bulmalıyız.

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

sayı yazılabilir. Üç tane 1'in yan yana olduğu durumları hesaplayalım. 111'i bir rakam gibi düşünün.

111, üç tane 2, iki tane 3

ile

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

sayı yazılabilir. O halde, istenen şekilde $560 - 60 = 500$ sayı vardır.

Alıştırma

14.26.



Çözüm : 5 rakamlı sayı yazacağımız için, rakamlardan biri 2 kez kullanılmalıdır. Örneğin, 1 iki kez kullanılsın. Bu durumda, 1, 1, 2, 3 ve 4'ün permütasyonlarının sayısı :

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

olacaktır. Benzer şekilde, 2, 3 ve 4 iki kez kullanılırsa, yine permütasyon sayısı 60 olur. Yani, toplam $4 \times 60 = 240$ sayı yazılabilir.

Genişleterek Sıralama Yöntemi



Tekrar Eden Nesne Yoksa

Alıştırma

14.27.



Çözüm : Önce 1, 3 ve 5 rakamlarını kurala uygun olarak yazalım.

$$\square 1 \square 5 \square 3 \square$$

Şimdi geri kalan 2, 4, 6 rakamlarını yazalım. 2 rakamını boş karelerle gösterilen 4 boşluğa yazabiliriz. Yazılışlardan birini yazalım.

$$\square 1 \square 5 \square 2 \square 3 \square$$

Bu durumda, 4 rakamını yazabileceğimiz 5 boşluk olur. Yazılışlardan birini yazalım.

$$\square 1 \square 5 \square 2 \square 3 \square 4 \square$$

Geriye sadece 6 rakamı ve bu rakamı yazabileceğimiz 6 boşluk kalır. Sonuç olarak istenen şekilde

$$4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$$

sayı oluşturulur.

Tekrar Eden Özdeş Nesne Varsa**Alıştırma 14.29.**

Çözüm : 2 tane T ve iki tane N harfi $\frac{4!}{2!2!} = 6$ farklı şekilde sıralanabilir. Birini yazalım.

□ T □ T □ N □ N □

İlk A harfi şekilde boş karelerle gösterilen 5 yere yazılabilir.

□ T □ T ■ A ■ N □ N □

İkinci A harfi 4,

□ T □ T ■ A ■ N □ A ■ N □

ve üçüncü A harfi 3 yere yazılabilir. Sonuç olarak istenen şekilde

$$6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = 60$$

kelime vardır.

2. Yol. 2 tane T ve iki tane N harfi $\frac{4!}{2!2!} = 6$ farklı şekilde sıralanabilir. Birini yazalım.

□ T □ T □ N □ N □

A harfini 5 boş kutudan üçüne yazabiliriz. Yani

$$6 \cdot \binom{5}{3} = 6 \cdot 10 = 60$$

sıralamada iki A harfi yan yana değildir.

60

Alıştırma 14.28.

Çözüm : 2 tane 3 ve 1 tane 5 rakamlarını

□ 5 □ 3 □ 3 □

biçiminde yazmalıyız. Bu verilen koşula uygun yapabileceğimiz bir **tek** sıralamadır. Şimdi, ilk 1 rakamını 4 yere,

□ 5 □ 3 □ 1 □ 3 □

ikinci 1 rakamını 5 yere ve üçüncü 1 rakamını 6 yere yazabiliriz.

□ 5 □ 3 □ 1 □ 1 □ 3 □

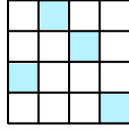
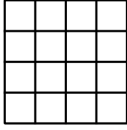
Sonuç olarak, $4 \cdot 5 \cdot 6$ sıralama elde edilir. Fakat, 3 tane 1 rakamını yazdıktan sonra 1 rakamlarının kendi arasındaki değişimleri farklı sıralama olmadığından $3!$ ile bölmeliyiz. Yanıt :

$$\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{3!} = 20$$

bulunur.

KONU SONU TESTİ (Sıralamalar)

Test 14.1



- A) 12 B) 18 C) 24 D) 72 E) 24

Çözüm : İlk satırda boyamak için 4, ikinci satırda boyamak için 3, üçüncü satırda boyamak için 2 seçenek ve son satırda sadece 1 seçenek vardır. O halde, $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ farklı şekilde boyanabilir.

Test 14.2



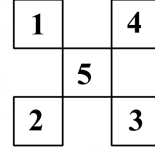
- A) 210 B) 180 C) 105 D) 126 E) 144

Çözüm : Soru 6 tane *S* ve 4 tane *Y* hafinin kaç farklı şekilde sıralanabileceği sorusudur. Bu ise tekrarlı sıralamadır ve

$$\frac{10!}{6!4!} = 210$$

değerine eşittir

Test 14.3



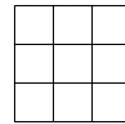
- A) 242 B) 252 C) 256 D) 236 E) 243

Çözüm : 1, 3, 5 numaralı kareleri boyamak için 7 renk seçeneğimiz vardır. 2 numaralı kare için 6 ve 4 numaralı kare için yine 6 renk boyama seçeneğimiz var. İstenen şekilde

$$7 \cdot 6 \cdot 6 = 252$$

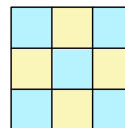
boyama mümkündür.

Test 14.4



- A) 21 B) 42 C) 24 D) 84 E) 27

Çözüm : Boyamak için sadece 2 renk gereklidir. Köşegen üzerindeki 5 kareyi boyamak için 7 renk, geri kalan kareleri boyamak için 6 renk seçeneği var. Yanıt : $6 \cdot 7 = 42$.



Test 14.5

A) 10 B) 18 C) 12 D) 11 E) 9

Çözüm : İki farklı rakamının çarpımının farklı bir rakam olduğu durumlar sadece

$$\{2, 3, 6\} \text{ ve } \{2, 4, 8\}$$

durumlarıdır.

i) 2, 3, 6 rakamlarıyla $2 \cdot 1 \cdot 2 = 4$ çift sayı yazılabilir. (Son rakam sadece 2 ve 6 olabilir. İlk rakam bu rakamdan farklı olarak yine 2 rakam olabilir. Son kalan rakam araya yazılır.

ii) 2, 4, 6 rakamlarıyla $3! = 6$ çift sayı yazılabilir.

O halde, $6 + 4 = 10$ basit çift sayı vardır.

Test 14.6

A) ANKAKB) ANKKAC) ANAKKD) AKNKAE) AKNAK

Çözüm : A harfi ile başlayan $\frac{4!}{2!} = 12$ kelime olduğundan 10'uncu kelime A ile başlayan bir kelimedir. O halde, sadece geriye kalan KANK kelimesinin alfabetik sırasını göz önüne almak yeterlidir.

$$\begin{bmatrix} A & A & * & * & * \end{bmatrix}, 2K, 1N \Rightarrow \frac{3!}{2!} = 3 \text{ kelime.}$$

$$\begin{bmatrix} A & K & * & * & * \end{bmatrix}, 1K, 1A, 1N \Rightarrow 3! = 6 \text{ kelime.}$$

olduğundan, 10'uncu kelime ikinci harf N olması gerekir ve ANAKK bulunur.

Test 14.7

A) 270 B) 180 C) 240 D) 720 E) 360

Çözüm : Bu dört rakamdan üçünü 4 şekilde belirleriz :

$$\{1, 2, 3\}; \{1, 2, 4\}; \{1, 3, 4\}; \{2, 3, 4\}$$

Şifreyi $\{1, 2, 3\}$ rakamlarıyla oluşturalım.

$$* 2 \text{ tane } 1, 2 \text{ tane } 2, 1 \text{ tane } 3 \text{ ile } \frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ şifre oluşturulur.}$$

$$* 2 \text{ tane } 1, 2 \text{ tane } 3, 1 \text{ tane } 1 \text{ ile } \frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ şifre oluşturulur.}$$

$$* 2 \text{ tane } 2, 2 \text{ tane } 3, 1 \text{ tane } 1 \text{ ile } \frac{5!}{2!2!} = 30 \text{ şifre oluşturulur.}$$

O halde, $\{1, 2, 3\}$ rakamlarıyla 90 şifre oluşturulur.

$\{1, 2, 4\}; \{1, 3, 4\}; \{2, 3, 4\}$ rakam gruplarından her biri için 90 şifre oluşturulacağından istenen şekilde $4 \cdot 90 = 360$ şifre oluşturulabilir.

Test 14.8 AJHSME-1990

A) 5742 B) 5274 C) 5427 D) 5724 E) 5472

Çözüm : 24 sayıdan 6 tane 2 ile, 6 tanesi 4 ile, 6 tanesi 5 ile, 6 tanesi de 7 ile başlayacaktır. Buna göre, 17-inci sayı 5 ile başlayan sayılar arasındadır.

13. sayı 5247,

14. sayı 5274,

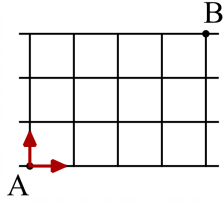
15. sayı 5427,

16. sayı 5472,

17. sayı 5724

18. sayı 5742

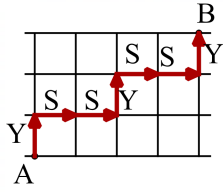
olacaktır.

Test 14.9

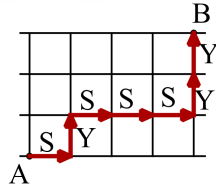
- A) 21 B) 18 C) 30 D) 32 E) 35

Çözüm : En kısa yol için, ya yukarı ya da sağa doğru gitmesi gerekir. Sola ve aşağıya hareket daima yolu uzatır. Sağa hareketi S ile yukarı hareketi de Y ile gösterelim. En kısa şekilde gitmesi için, birim karelerin kenarları üzerinde 4 kez sağa ve 3 kez yukarı gitmesi gerekir. Bu hareketleri hangi sırada yaparsa yapsın A'dan B'ye en kısa sürede ulaşmış olur.

Örneğin, aşağıdaki şekillerde YSSYSSY ve SYSSSY Yolları verilmiştir.



YSSYSSY



SYSSSY

O halde, toplam yol sayısı 4 tane S ve 3 tane Y harflerinin sıralanış sayısı kadardır. Buradan

$$\frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 35$$

elde edilir.

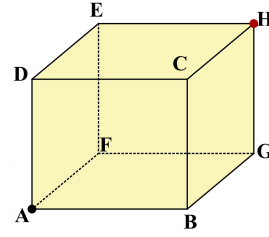
Test 14.10

- A) 10 B) 18 C) 15 D) 21 E) 35

Çözüm : Maviye boyanan evi M, sarıya boyanan evi S ile ifade edelim. Buradaki oluşabilecek farklı görüntü sayısı, SSSSMM kelimesinin harflerinin yerlerinin değiştirilmesiyle elde edilebilecek kelime sayısı kadardır. Buna göre, istenen yanıt

$$\frac{6!}{4!2!} = 15$$

elde edilir.

Test 14.11

- A) 6 B) 18 C) 12 D) 36 E) 9

Çözüm : Sağa gidiş S ile, yukarı gidiş Y ile ve ileri gidiş İ ile gösterilsin. En kısa yol için 1 kez ileri 1 kez sağa ve 1 kez yukarı gitmelidir. Y, S, İ harfleri $3! = 6$ şekilde sıralanabilir. Her sıralanış bir farklı yolu gösterir.

Test 14.12

6	5	9
7	8	4

- A) 144 B) 288 C) 126 D) 252 E) 242

Çözüm : Toplamın tek olması için her rengin altındaki sayıların birinin tek birinin çift olması gerekir. Sol en üstteki rakam bu altı rakamın herhangi biri olabilir. Bu sayı tek ise altına yazılacak çift sayı için 3 seçenek vardır. Bu rakam çift ise yine altına yazılacak 3 tek rakam seçeneği olur. O halde, sol alttaki kutuya 3 farklı rakam yazılabilir. Böylece, geriye 2 tek 2 çift sayı kalır. Ortadaki üstteki rakam 4 rakamın herhangi biri olabilir. Ortadaki alttaki rakam ise 2 rakam olabilir. Geriye 2 rakam kaldı. Sağ üstteki kutuya bu iki rakamdan birini yazabiliriz. Sağ alttaki karedeki rakam için geriye tek rakam kalır. Buna göre, istenen şekilde $6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 = 288$ tablo oluşturulabilir.

Test 14.13

A) 1111 B) 2222 C) 3333 D) 2211 E) 1133

Çözüm : Oluşturulabilecek 4 basamaklı sayıların sayısı

$$4! = 24$$

tanedir. 1, 2, 3 ve 6 rakamlarının her biri her basamakta

$$24 \div 4 = 6$$

kez yer alır. O halde,

$$\begin{array}{r} 1236 \\ 1263 \\ : \\ +6321 \\ \hline \text{AAAA} \end{array}$$

ifadesi toplandığında, toplamada taşıma işlemi yapılmadan her basamaktaki rakamların toplamı

$$A = 6(1 + 2 + 3 + 6) = 72$$

olacağından bu toplam

$$72 \cdot 10^3 + 72 \cdot 10^2 + 72 \cdot 10^1 + 72 = 72 \cdot 1111$$

olur. Aritmetik ortalaması da

$$A.O. = \frac{72 \cdot 1111}{24} = 3333$$

bulunur.

Test 14.14

A) 44444 B) 33333 C) 34343 D) 43434 E) 40000

Çözüm : Oluşturulabilecek 5 basamaklı sayıların sayısı

$$\frac{5!}{2!3!} = 10$$

tanedir. Şimdi bu sayıların tamamını toplayıp 10'a bölerek aritmetik ortalamayı bulacağız. Burada 3 tane 6 ve 2 tane 1 rakamı olduğundan, oluşturulan her sayıdaki "6" ve "1" rakamlarının sayıları arasında 3 : 2 oranı vardır. O halde, oluşacak tüm sayılarda kaç tane 6 ve kaç tane 1 olduğu bu orana göre belirlenmelidir. Beş basamaklı tüm sayılarda

$$10 \div 5 = 2$$

olduğundan her basamakta $2 \cdot 3 = 6$ kez "6" rakamı ve $2 \cdot 2 = 4$ kez de "1" rakamı bulunur. O halde,

$$\begin{array}{r} 11222 \\ 12122 \\ : \\ +22211 \\ \hline \text{AAAAA} \end{array}$$

ifadesi toplandığında, toplamada taşıma işlemi yapılmadan her basamaktaki rakamların toplamı

$$A = 4 \cdot 1 + 6 \cdot 6 = 40$$

olur. Yani, bu toplam

$$40 \cdot 10^4 + 40 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^2 + 40 \cdot 10^1 + 40$$

olur. Aritmetik ortalaması da

$$\begin{aligned} A.O. &= \frac{40 \cdot 10^4 + 40 \cdot 10^3 + 40 \cdot 10^2 + 40 \cdot 10^1 + 40}{10} \\ &= 44444 \end{aligned}$$

elde edilir.

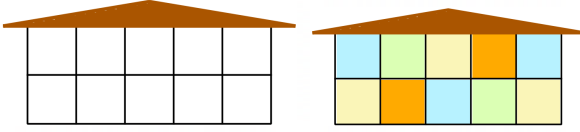
Test 14.15 AMC8-2022

A) 12 B) 18 C) 24 D) 36 E) 9

Çözüm : E harflerini

$$E \square E \square E \square E \square E$$

biçiminde yazarsak iki harfin yan yana olmaması için E harfleri arasındaki 4 boşluktan her birine B, K, P, R harflerinin biri yazılmalıdır. İlk boşluk için 4, ikinci boşluk için 3, üçüncü boşluk için 2 ve son boşluk için 1 seçenek vardır. Yanıt : $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ olur.

Test 14.16

- A) 190 B) 182 C) 192 D) 81 E) 144

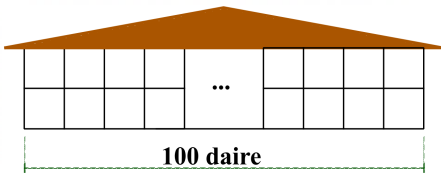
Çözüm : Sol üst daireden itibaren boyamaya başlayalım. En sol üst daireyi 4 farklı boya ile boyayabiliriz. Bu durumda, altındaki daire için 3 boya, yanındaki daire için 2 boya ve çaprazındaki daire için 1 boya seçeneği kalır.

4	2	2	2	2
3	1	1	1	1

Böylece, soldan ilk iki katın 4 daire boyanmış olur. Soldan üçüncü daireleri sadece soldan ilk daireleri boyadığımız renklerle boyayabiliriz. Yani en üstteki için iki altındaki için tek seçenek vardır. Benzer düşünce ile soldan dördüncü olan daireleri soldan ikinci olan dairelerin renkleriyle, en sağdaki daireleri de soldan üçüncü olan dairelerin renkleriyle boyamak mümkündür. Buna göre, boyama sayıları yukarıdaki şekilde belirtildiği gibi olur. Sonuç olarak,

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 192$$

farklı şekilde boyanabilir.

Test 14.17

- A) 54 B) 56 C) 58 D) 59 E) 53

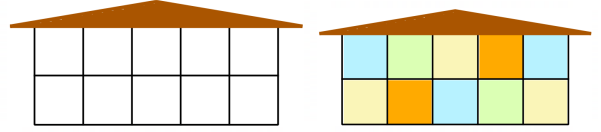
Çözüm : Bir önceki sorudaki gibi düşünülürse

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2)}_{48 \text{ tane } 2}$$

farklı şekilde boyatılabilir. Bu sayıyı da

$$3 \cdot 2^{51}$$

biçiminde yazabiliriz. $m = 3$ ve $n = 51$ alınırsa $m + n = 54$ bulunur.

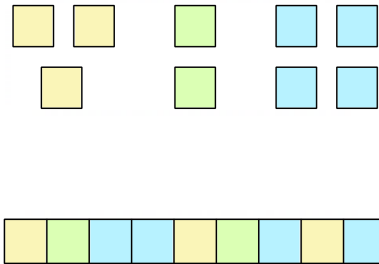
Test 14.18

- A) 1000 B) 180 C) 840 D) 960 E) 768

Çözüm : Öncelikle verilen 5 renk arasından 4 tanesini belirlemek gerekir. 5 renkten 4 tanesini 5 farklı şekilde belirleriz. Belirlenen bu dört renk ile boyamaya başlayalım. 2 önceki örnekteki problemde olduğu gibi çözülebilir ve 192 bulunur. O halde, istenen şekildeki boyama sayısı

$$5 \cdot 192 = 960$$

bulunur.

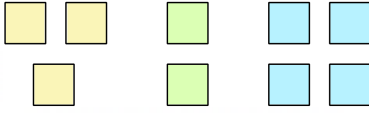
Test 14.19

- A) 1000 B) 1200 C) 1260 D) 1152 E) 1296

Çözüm :

$$\frac{9!}{3!2!4!} = 1260$$

farklı şekilde kaplanabilir.

Test 14.20

- A) 1000^3 B) 1200^3 C) 1260^3 D) 1152^3 E) 1296^3

Çözüm : Bir sıra

$$\frac{9!}{3!2!4!} = 1260$$

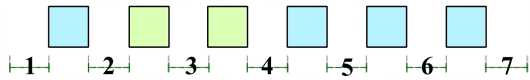
farklı şekilde kaplanabilir. Tamamı 1260^3 farklı şekilde kaplanabilir.

Test 14.21

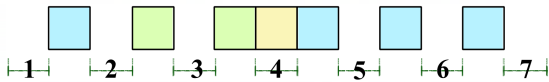
- A) 220 B) 540 C) 480 D) 525 E) 405

Çözüm :

4 mavi ve 2 yeşil fayans $\frac{6!}{4!2!} = 15$ farklı şekilde sıralanabilir. Örneğin bir sıralama aşağıdaki gibi olsun.



Geriye kalan 3 sarı fayans bu fayansların aralarındaki 7 boşluğa yerleştirilmelidir. İlk sarı fayans için 7 yer olabilir. Bunu yerleştirelim. ,



Benzer düşünceyle, ikinci sarı fayans için 6 yer ve son sarı fayans için 5 yer olabilir. Fakat, sarı fayansların kendi aralarındaki değişimler farklı olmadığından $3!$ ile bölünmelidir. O halde,

$$\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$$

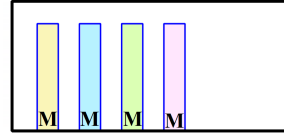
farklı şekilde kaplanabilir. Sonuç olarak istenen şekilde $15 \cdot 35 = 525$ kaplama yapılabilir.

Test 14.22

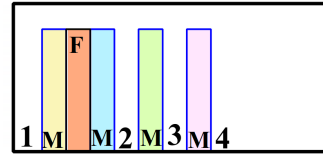
- A) 1080 B) 1150 C) 1260 D) 1440 E) 1200

Çözüm :

1. **Yol :** 4 farklı matematik kitabı $4!$ farklı şekilde yan yana dizilebilir. Şimdi fen bilgisi kitaplarını bu kitapların aralarına ve yanlarına koyacağız.



İlk Fen bilgisi kitabı için matematik kitaplarının aralarındaki ve yanlarındaki 5 seçenek vardır. İkinci Fen bilgisi kitabı için 4 ve son Fen bilgisi kitabı için 3 seçenek vardır.



O halde, istenen şekilde

$$4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1440$$

sıralama mümkündür.

2. Yol. 4 farklı matematik kitabı $4!$ farklı şekilde dizilir. Bunların arasındaki ve yanlarındaki 5 boşluktan 3 tanesi $\binom{5}{3} = 10$ farklı şekilde seçilebilir. Bu seçilen yerlere 3 farklı Fen bilgisi kitabı $3!$ farklı şekilde yerleştirilir. Yanıt. $4! \cdot 3! \cdot 10 = 1440$ bulunur.

Test 14.23

A) 190 B) 240 C) 150 D) 210 E) 280

Çözüm : Torbada 7 kart çekildikten sonra geriye 1 kart kalır.

i) Torbada kalan son kart 1 ise, 3 tane 1 ve 3 tane 2 ve 1 tane 3 ile

$$\frac{7!}{3!3!} = 140$$

tane 7 basamaklı sayı yazılabilir.

ii) Torbada kalan son kart 2 ise, 4 tane 1 ve 2 tane 2 ve 1 tane 3 ile

$$\frac{7!}{4!2!} = 105$$

tane 7 basamaklı sayı yazılabilir.

iii) Torbada kalan son kart 3 ise, 4 tane 1 ve 3 tane 2 ile

$$\frac{7!}{4!3!} = 35$$

tane 7 basamaklı sayı yazılabilir.

Sonuç olarak toplam $140 + 105 + 35 = 280$ sayı yazılabilir.**Test 14.24**

A) 190 B) 240 C) 150 D) 210 E) 280

Çözüm : Burada 7 harf var. Kullanılmayan harf T, A veya N olabilir.i) Kullanılmayan harf T ise, 3A, 1 T ve 2 N ile $\frac{6!}{3!2!} = 60$ kelime yazılır.ii) Kullanılmayan harf N ise, 3A, 2 T ve 1 N ile $\frac{6!}{3!2!} = 60$ kelime yazılır.iii) Kullanılmayan harf A ise, 2A, 2 T ve 2 N ile $\frac{6!}{2!2!2!} = 90$ kelime yazılır.Sonuç olarak toplam $60 + 60 + 90 = 210$ kelime yazılabilir.**Test 14.25**

A) 1440 B) 1260 C) 1200 D) 1210 E) 1260

Çözüm :

Kullanılmayan rakam 1 ise, 3 tane 1, 3 tane 2 ve 2 tane 5 ile

$$\frac{8!}{3!3!2!} = 560$$

sayı oluşturulur.

Kullanılmayan rakam 2 ise, 4 tane 1, 2 tane 2 ve 2 tane 5 ile

$$\frac{8!}{4!2!2!} = 420$$

sayı oluşturulur.

Kullanılmayan rakam 5 ise, 4 tane 1, 3 tane 2 ve 1 tane 5 ile

$$\frac{8!}{4!3!1!} = 280$$

sayı oluşturulur.

O halde, toplam $560 + 420 + 280 = 1260$ sayı oluşturulabilir.**Test 14.26****Test 14.26 UMO - 1994**

A) 180 B) 240 C) 150 D) 210 E) 270

Çözüm : $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ olduğundan, beş basamaklı sayının rakamları çarpımları 90 olan,

$$\{2, 5, 3, 3, 1\}, \{3, 6, 5, 1, 1\} \text{ veya } \{2, 5, 9, 1, 1\}$$

rakamlarından oluşabilir. Buna göre,

$$\frac{5!}{2!} + \frac{5!}{2} + \frac{5!}{2} = 180$$

tane istenen şekilde pozitif tam sayı vardır.

Test 14.27 UOMO - 2001

A) 3652147B) 3654217C) 3652741D) 3652417E) 3675241

Çözüm : Her bir rakam ile başlayan, $6! = 720$ tane sayı vardır. 1 ile başlayanların sayısı 720, 2 ile başlayanların sayısı 720'nin toplamı 1440 olur. $2001 < 3 \cdot 720$ olduğundan, 2001'inci sayı 3 ile başlamalıdır. Bu şekilde devam ederek, tabloda yazalım. Tabloda, kesin olarak belirli olan sayıları koyu yazıyoruz. Diğer sayılar permütasyonların sayısını hesaplamak için yazılıyor.

1 ile başlayan :	1	6	5	4	3	2	1	→	$6! = 720$ tane	720
2 ile başlayan :	2	6	5	4	3	2	1	→	$6! = 720$ tane	1440
31 ile başlayan :	3	1	5	4	3	2	1	→	$5! = 120$ tane	1560
32 ile başlayan :	3	2	5	4	3	2	1	→	$5! = 120$ tane	1680
34 ile başlayan :	3	4	5	4	3	2	1	→	$5! = 120$ tane	1800
35 ile başlayan :	3	5	5	4	3	2	1	→	$5! = 120$ tane	1920
361 ile başlayan :	3	6	1	4	3	2	1	→	$4! = 24$ tane	1944
362 ile başlayan :	3	6	2	4	3	2	1	→	$4! = 24$ tane	1968
364 ile başlayan :	3	6	4	4	3	2	1	→	$4! = 24$ tane	1992
3651 ile başlayan :	3	6	5	1	3	2	1	→	$3! = 6$ tane	1998
36521 ile başlayan :	3	6	5	2	1	2	1	→	$2! = 2$ tane	2000
3652417 ile başlayan :	3	6	5	2	4	1	7	→	1 tane	2001

O halde 2001-inci sıradaki sayı 3652417 olur.

Test 14.28 UMO - 2004

A) 810 B) 840 C) 756 D) 360 E) 720

Çözüm : İlk basamak 1 veya 2 olabilir. Buna göre, ilk basamak 1 ise, geri kalan 9 rakam, dört 0, dört 1, ve bir 2 ile

$$\frac{9!}{4!4!1!} = 630$$

sayı oluşturabiliriz. İlk basamak 2 ise, geri kalan 9 rakam, dört 0, beş 1 ile,

$$\frac{9!}{4!5!} = 126$$

sayı oluşturabiliriz. Böylece, toplam, $126 + 630 = 756$ sayı yazılabilir.

Test 14.29 UOMO - 2007A) $10 \cdot 6!$ B) $6 \cdot 6!$ C) $30 \cdot 6!$ D) $12 \cdot 6!$ E) $8 \cdot 6!$

Çözüm : Sesli harfler, bir O, iki İ ve bir A'dan oluşmaktadır. Bunları kendi arasında $4!/2! = 12$ şekilde sıralayabiliriz. Tüm sesli harfleri bir harfmiş gibi kabul edelim. Bu durumda, L, M, P, Y ve T ve sesli harfler ile, $6!$ sıralama yapılabilir. Böylece, $12 \cdot 6! = 2 \cdot 3! \cdot 6! = 8640$ şekilde sıralanabilir.

Test 14.30 UOMO - 2011

A) 8820 B) 8400 C) 7560 D) 3600 E) 7200

Çözüm : 4 siyah ve 4 kırmızı topu, $\frac{8!}{4!4!} = 70$ farklı şekilde yerleştirebiliriz. Örneğin,

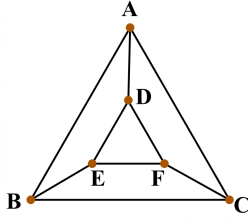
— * — * — * — * — — — — — — — —

gibi yerleştirilebilir. Geriye 4 kırmızı topu yerleştirmek kaldı. Şimdi, kırmızı olmayan topun sağ ve solundaki 9 boşluktan herhangi dördünü seçerek, kırmızı topları yerleştirebiliriz.

Her seçim farklı bir sıralama verecektir. Bu seçimi de

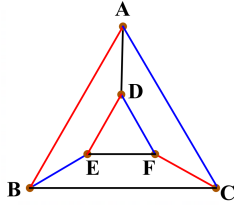
$$\binom{9}{4} = 126$$

farklı şekilde yapabiliriz. Sonuç olarak, $70 \cdot 126 = 8820$ farklı sıralama vardır.

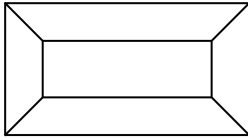
Test 14.31

- A) 8 B) 4 C) 12 D) 6 E) 9

Çözüm : Bağlamaya A noktasından başlayalım. [AB] ipi üç renkten herhangi biriyle bağlanabilir. Bu durumda, [AD] ipi geri kalan iki renkten biri olabilir. [AC] ipi ise geriye kalan son renkteki ip olmalıdır. Bundan sonra paralel olanlar aynı renkte olması gerekir. Böylece iki üçgeni birleştiren [BE] ve [CF] ipleri de tek türlü belirli olur. O halde istenen şekilde $3 \cdot 2 = 6$ farklı bağlama vardır.

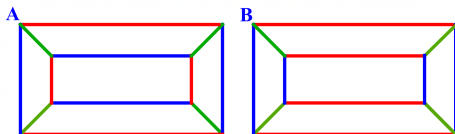


Bir örnek verilmiştir. Görüldüğü gibi daima paralel olan iki ip parçası ile bu kenarlarla ortak olmayan diğer ip parçası aynı renkte olması gerekir.

Test 14.32

- A) 8 B) 4 C) 12 D) 6 E) 9

Çözüm : En sol üst köşeyi birleştiren üç duvar $3 \cdot 2 = 6$ farklı şekilde boyanabilir. Bundan sonra geriye kalan tüm duvarlar bu üç duvarın boyanmasına göre iki türlü boyanmak zorundadır. Yanıt $6 \cdot 2 = 12$ olur.

**Test 14.33 AMC8-2001**

- A) 80 B) 48 C) 72 D) 60 E) 144

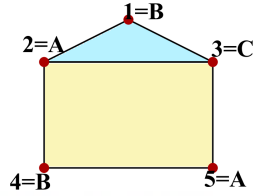
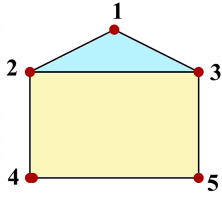
Çözüm :

Et için 3 olasılık ve tatlı için 4 olasılık vardır. İlk sebze için 4 ikinci sebze için 3 olasılık var. İki sebze yemeğinin sırası önemli olmadığı için sebze yemeklerinin seçimi 2 kat fazla sayılmıştır. O halde,

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 72$$

farklı öğün seçebilir.

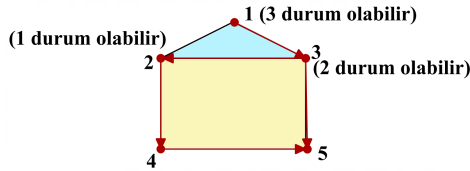
Test 14.34



- A) 8 B) 16 C) 12 D) 6 E) 18

Çözüm :

Harflendirmeye 1 numaradan başlayarak ok yönünde ilerleyelim. 1 numara için 3 harf seçeneğimiz var. 3 numara için 2 harf seçeneğimiz var. 2 numara için ise 1 seçeneğimiz var. Böylece çatı olarak görülen kısmı $3! = 6$ farklı şekilde harflendirmiş oluruz.



4'üncü köşeyi iki farklı şekilde harflendirebiliriz. Fakat 5 numaralı köşe 4 numaralı köşenin harflendirilmesine bağlı olarak iki farklı şekilde harflendirilebilir.

i) Eğer 3 ve 4'üncü köşeler aynı harf ise 5'inci köşe iki farklı şekilde harflendirilebilir. Böylece, $3! \cdot 2 = 12$ farklı harflendirme elde edilir.

ii) 3 ve 4'üncü köşeler farklı harf ise 5'inci köşe tek şekilde harflendirilebilir. Böylece $3! = 6$ farklı harflendirme elde edilir.

Sonuç olarak $12 + 6 = 18$ farklı şekilde harflendirilebilir.

Test 14.35



- A) 27 B) 24 C) 25 D) 28 E) 20

Çözüm :

Zaten 10 rakam var ve beş basamaklı sayıda 0, 8, 9 rakamlarını kullandığımızda 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 rakamlarından da en az ikisini de kullanmak zorundayız. O halde, 5 basamaklı rakamları farklı tüm sayılar koşulu sağlar.



Soldan ilk rakam 0 haricinde 9 rakam olabilir. Soldan ikinci rakam yine 9 rakam olabilir. Bu düşünceyle



yazılabilir ve $n = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ olur. O halde,

$$\frac{5 \cdot n}{7!} = \frac{5 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 27$$

bulunur.

Test 14.36



- A) 38885 B) 38886 C) 38887 D) 38888 E) 38889

Çözüm :



sayılarından,



biçiminde $10^4 - 1 = 9999$ sayı vardır. Yani, 9999 tanesinin birler basamağında 0 vardır. Benzer düşünceyle, onlar, yüzler ve binler basamağında 0 olan sayıların sayısı da

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline A & B & C & 0 & E \\ \hline \end{array} \Rightarrow (10^3 - 1) 10 = 10^4 - 10$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline A & B & 0 & D & E \\ \hline \end{array} \Rightarrow (10^2 - 1) 10^2 = 10^4 - 10^2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline A & 0 & C & D & E \\ \hline \end{array} \Rightarrow (10 - 1) 10^3 = 10^4 - 10^3$$

biçiminde bulunabilir. Sonuç olarak, sıfır rakamı sayısı

$$4 \cdot 10^4 - (1 + 10 + 100 + 1000) = 38889$$

bulunur.

Test 14.37



A) 36000 B) 35000 C) 35200 D) 36200 E) 34200

Çözüm :

Elde edilen sayının basamak sayısını bulalım. 1 basamaklı 9, iki basamaklı $99 - 10 + 1 = 90$, üç basamaklı $999 - 100 + 1 = 900$ ve dört basamaklı $9999 - 1000 + 1 = 9000$ sayı olduğundan, elde edilen sayı

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 900 + 4 \cdot 9000 = 38889$$

basamaklı olacaktır.

A	B	C	D
---	---	---	---

sayılarından,

A	B	C	0
---	---	---	---

biçiminde $10^3 - 1 = 999$ sayı vardır. Yani, 999 tanesinin birler basamağında 0 vardır. Benzer düşünceyle, onlar ve yüzler basamağında 0 olan sayıların sayısı da

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & B & 0 & D \\ \hline \end{array} \Rightarrow (10^2 - 1) 10^1 = 10^3 - 10^1$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline A & 0 & C & D \\ \hline \end{array} \Rightarrow (10 - 1) 10^2 = 10^3 - 10^2$$

biçiminde bulunabilir. Sonuç olarak, sıfır rakamı sayısı

$$3 \cdot 10^3 - (1 + 10 + 100) = 2889$$

bulunur. Buna göre, $n = 38889$ ve $m = 2889$ olduğundan

$$n - m = 38889 - 2889 = 36000$$

elde edilir.

Test 14.38



A) 360 B) 216 C) 720 D) 144 E) 288

Çözüm :

7 basamaklı sayının soldan ilk üç rakamı A , B ve C olsun.

A	B	C				
---	---	---	--	--	--	--

Buna göre, diğer basamakları belirlemeye çalışalım.

$$B \equiv A + C \pmod{9} \Rightarrow C \equiv B - A \pmod{9}$$

olacaktır. Bu şekilde devam edersek sayının

A	B	B - A	(-A)	(-B)	(A - B)	A
---	---	-------	------	------	---------	---

formunda olması gerektiği görülür. Şimdi, A ve B 'nin eşit olup veya sıfırdan ve 9'dan farklı olup olmamasına göre kaç farklı sayı oluşturabileceğimizi bulalım. Bir rakam 0 ise yerine 9 rakamı da yazılabilir. Aksi durumlarda tek şekilde yazılır.

i) $A \neq B$, $A \neq 0, 9$, $B \neq 0, 9$ ise

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 8 \cdot 7 = 56$$

sayı yazılabilir. Yani, A için 8 ve B için 7 rakam yazılabilir.

ii) $A = B$, $A \neq 0$ ise, $B - A$ ile $A - B$ değerleri 0 veya 9 olabilir.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

sayı yazılabilir. Yani, A için 8 durum, $B - A$ ile $A - B$ için ikişer rakam vardır.

iii) $A \neq 0, 9$ ve $B = 0, 9$ ise,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 8 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

sayı yazılabilir. Yani, A için 8, B için 2, $(-B)$ için 2 rakam yazılabilir.

iv) $A = 9$ ve $B \neq 0, 9$ ise,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 9 & 8 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 8 \cdot 2 \cdot 2 = 32$$

sayı yazılabilir. Yani, B için 8, $(-A)$ ve birler basamağındaki A için de 0 ve 9 olmak üzere iki rakam yazılabilir.

v) $A = 9$, $B = 0, 9$ ise,

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 9 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64$$

sayı yazılabilir.

Sonuç olarak, toplam

$$56 + 32 \cdot 3 + 64 = 216$$

sayı yazılabilir.

Test

14.39



A) 36 B) 35 C) 38 D) 40 E) 42

Çözüm :

Genelliği bozmadan

$$a \geq b \geq c \geq d \geq e$$

kabul edelim. Buna göre,

$$5a \geq a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \Rightarrow 5 \geq b \cdot c \cdot d \cdot e$$

olur. $a, b, c, d, e \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan aşağıdaki tabloyu hazırlayabiliriz.

b	c	d	e	$\Rightarrow$	$a + b + c + d + e = a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$
5	1	1	1	$\Rightarrow$	$a + 8 = 5a \Rightarrow a = 2$ (Çelişki $a > 5$)
4	1	1	1	$\Rightarrow$	$a + 7 = 4a \Rightarrow a \notin \mathbb{Z}$ (Çelişki)
3	1	1	1	$\Rightarrow$	$a + 6 = 3a \Rightarrow a = 3 \Rightarrow (3, 3, 1, 1, 1)$
2	1	1	1	$\Rightarrow$	$a + 5 = 2a \Rightarrow a = 5 \Rightarrow (5, 2, 1, 1, 1)$
1	1	1	1	$\Rightarrow$	$a + 4 = a \Rightarrow 0 = 4$ (Çelişki)
2	2	1	1	$\Rightarrow$	$a + 6 = 4a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow (2, 2, 2, 1, 1)$

Böylece, 3 durum için eşitliğin sağlanacağı görülür. Bulunan bu durumların herhangi sıralanışları da eşitliği sağlar. Yani,

$$\{a, b, c, d, e\} = \{3, 3, 1, 1, 1\} \Rightarrow \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$$\{a, b, c, d, e\} = \{5, 2, 1, 1, 1\} \Rightarrow \frac{5!}{3!} = 20$$

$$\{a, b, c, d, e\} = \{2, 2, 2, 1, 1\} \Rightarrow \frac{5!}{2!3!} = 10$$

olmak üzere,

$$10 + 20 + 10 = 40$$

tane sıralı (a, b, c, d, e) beşlisi bulunabilir.

SEÇME (KOMBİNASYON)

Alıştırma 15.1.



Çözüm :

$$\binom{9}{5} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

bulunur.

El Sıkışma Sayısı

Alıştırma 15.2.



Çözüm : $k = 12$ olursa eşitlik sağlanır. Fakat bir k değeri daha var. Bunu unutma!

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \Rightarrow \binom{23}{12} = \binom{23}{11}$$

eşitliği de sağlandığından, $k = 11$ de olabilir. O halde, yanıt $11 + 12 = 23$ olur.

Turnuvadaki Maç Sayısı

Alıştırma 15.3.



Çözüm :

$$4 \binom{n}{2} = 84 \Rightarrow \binom{n}{2} = 21 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 21$$

eşitliğinden $n = 7$ olur.

Alıştırma 15.4.



Çözüm : Toplam kişi sayısı 15'tir. 15 kişiden herhangi ikisi

$$\binom{15}{2} = 105$$

farklı şekilde seçilebilir. Ama 6 evli çift var ve eşler birbiriyle el sıkışmadığı için $105 - 6 = 99$ el sıkışması yapılır.

Birden Fazla Grup Seçme

Aıştırma 15.5.



Çözüm :

$$\binom{10}{3} \binom{7}{4} \binom{3}{3} = 120 \cdot 35 \cdot 1 = 4200$$

Aıştırma 15.6.



Çözüm : Her sınıftan 1 kişi alınması gerekiyor. Buna göre, 3 kişi

$$\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} = 8$$

farklı şekilde seçilir. Seçilmeyen kişiler de diğer takımı oluşturur. Fakat, seçilen kişilerin oluşturduğu takım ile seçilmeyen kişilerin oluşturduğu takımın yer değiştirmesi farklı iki takım olmadığı için bu değeri 2 ile bölmeliyiz. O halde, $8 \div 2 = 4$ farklı şekilde iki takım belirlenebilir.

Aıştırma 15.7.



Çözüm : Ekip için 2 durum olabilir.

2 kız, 1 erkek veya 2 erkek, 1 kız.

2 kız, 1 erkek olan durumların sayısı :

$$\binom{5}{1} \binom{6}{2} = 5 \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} = 75,$$

2 erkek, 1 kız olan durumların sayısı da :

$$\binom{5}{2} \binom{6}{1} = \frac{5 \cdot 4}{2} \cdot 6 = 60$$

olduğundan, istenen şekilde $75 + 60 = 135$ ekip oluşturulabilir.

Kümelerde Seçme ve Alt küme Sayısı

Aıştırma 15.8.



Çözüm : a) $2^5 = 32$ b) $\binom{5}{3} = 10$

c) $\binom{5}{3} + \binom{5}{4} + \binom{5}{5} = 16$

d) $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 26$

Aıştırma 15.9.



Çözüm : İstenen alt kümeler $\{1, \dots\}$ biçimindedir. ... ile gösterilen elemanları $\{2, 4, 5, 6\}$ kümesinin elemanlarından seçmeliyiz. Bu kümenin de $2^4 = 16$ alt kümesi olduğundan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümelerinin 16 tanesinde 1 bulunur ama 3 bulunmaz

Aıştırma 15.10.



Çözüm : A kümesinin n elemanı olsun.

$$\binom{n}{5} = \binom{n}{4} \Rightarrow n = 5 + 4 = 9$$

elde edilir. Buna göre, A kümesinin 3 elemanlı

$$\binom{9}{3} = 84$$

alt kümesi vardır.

Alıştırma 15.11.

Çözüm : A kümesinin 1 elemanı bulunan alt küme sayısı $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt küme sayısı kadardır ve $2^5 = 32$ olur. A kümesinin 6 elemanı bulunan alt küme sayısı $\{2, 3, 4, 5, 1\}$ kümesinin alt küme sayısı kadardır ve $2^5 = 32$ olur. Fakat, hem 1 hem de 6 olanları iki kere saydık. Buna göre, 1 ve 6 olan alt kümelerin sayısını çıkarmalıyız. A kümesinin 1 ve 6 olan alt kümelerin sayısı $\{2, 3, 4, 5\}$ kümesinin alt küme sayısı kadardır ve $2^4 = 16$ olur. O halde, istenen şekildeki alt küme sayısı $32 + 32 - 16 = 48$ bulunur.

**Alıştırma 15.12.**

Çözüm : Önce 5'i içeren 3 elemanlı kaç alt küme olduğunu bulalım. 5 zaten varsa geriye 1, 2, 3, 4, 6 elemanlarından ikisini seçmemiz gerekir. Bunu

$$\binom{5}{2} = 10$$

farklı şekilde seçebiliriz. O halde, 5'i içeren 3 elemanlı 10 alt küme vardır. Bu alt kümelerin tamamında 5 var. Peki 1 kaç tanesinde var? Şimdi de bunu bulalım. $\{1, 5, c\}$ olmak üzere, c elemanı $\{2, 3, 4, 6\}$ elemanlarından biri olabilir. O halde, 4 tanesinde 1 elemanı var. Benzer şekilde 4 tanesi 2, 4 tanesinde 3 ve 4 tanesinden 6 elemanı olacaktır. Sonuç olarak bu elemanların toplamı :

$$10 \cdot 5 + 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 6) = 114$$

bulunur.

Alıştırma 15.13.

Çözüm :

$$\binom{17}{0} + \binom{17}{1} + \binom{17}{2} + \dots + \binom{17}{17} = 2^{17}$$

olduğundan 17-inci kuvvetine bölünür.

Alıştırma 15.14.

Çözüm :

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 1 + 15 + 15 + 1 = 32$$

veya kısaca

$$\binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} + \binom{6}{6} = 2^5 = 32$$

şeklinde bulunabilir.

Aıştırma**15.15.**

Çözüm : $A = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ kümesinin alt küme sayısı 2^{30} ve

$$\binom{25}{0} + \binom{25}{1} + \binom{25}{2} + \dots + \binom{25}{25} = 2^{25}$$

olduğundan $\frac{2^{30}}{2^{25}} = 2^5 = 32$ katıdır.

Geometride Seçme (Kesişim Sayıları)**Aıştırma****15.16.****Aıştırma****15.17.****Aıştırma****15.18.**

Alıştırma

15.19.



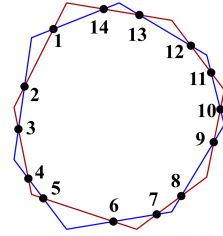
Alıştırma

15.21.



Alıştırma

15.22.



Alıştırma

15.20.



Aıştırma 15.23.

Çözüm : İki kare birbiriyle en fazla 8 noktada kesiştiğinden, 6 kare birbiriyle en fazla

$$8 \binom{6}{2} = 120$$

noktada kesişirler. İki üçgen birbiriyle en fazla 6 noktada kesiştiğinden, 4 üçgen birbiriyle en fazla

$$6 \binom{4}{2} = 36$$

noktada kesişirler. Bir üçgen ile bir kare en fazla kenar sayısı daha az olanın 2 katı kadar olan noktada yani 6 noktada kesişirler. Buna göre, 6 kare ve 4 üçgeninin kesişim noktalarının sayısı da

$$6 \cdot \binom{6}{1} \binom{4}{1} = 144$$

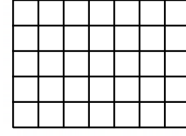
olduğundan 6 kare ile 4 üçgen en fazla $120 + 36 + 144 = 300$ noktada kesişirler.

Aıştırma 15.24.

Çözüm : Her dört noktanın birleştirilmesiyle oluşan kırışların kesişmesiyle çember içinde sadece 1 tane nokta oluşur. Buna göre, $\binom{8}{4} = 70$ nokta oluşur.

Aıştırma 15.25.

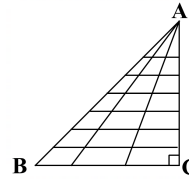
Çözüm : Her dört noktanın birleştirilmesiyle oluşan kırışların kesişmesiyle çember içinde sadece 1 tane nokta oluşur. Buna göre, $\binom{n}{4} = 35$ olmalıdır. $\binom{6}{4} = 15$ ve $\binom{7}{4} = 35$ değerleri kontrol edilerek $n = 7$ olduğu bulunabilir.

Aıştırma 15.26.

Çözüm : Yan kenarlar 8 dikey doğru parçasından herhangi ikisini seçerek, alt-üst kenarlar da 6 tane yatay doğru parçasından herhangi ikisini seçerek belirlenebilir. Her seçim bir dikdörtgen oluşturacaktır. Buna göre,

$$\binom{8}{2} \binom{6}{2} = 420$$

dikdörtgen vardır

Aıştırma 15.27.

Çözüm : Bir dik üçgen oluşması için yan kenarlardan birinin AC doğru parçası üzerinde olması gerekir. Buna göre, köşesi A olan dik üçgenlerin yan kenarlarını A'dan geçen AC dışındaki 3 doğru parçasından biriyle, AC doğru parçasını seçerek oluşturabiliriz. Taban ise, BC ve BC'ye paralel olan 7 doğrudan biri olabilir. O halde,

$$\binom{3}{1} \binom{7}{1} = 21$$

dik üçgen vardır.

İlginç Kombinasyon Soruları

KONU SONU TESTİ (Seçme)



Test 15.1 AMC8-2004



A) 3 B) 5 C) 4 D) 6 E) 8

Çözüm : Dört kişiden başlangıç üçlüsü

$$\binom{4}{3} = 4$$

farklı şekilde seçilebilir.

Test 15.2



A) 336 B) 125 C) 56 D) 112 E) 224

Çözüm : 8 kişilik bir sınıftan 1 başkan 8 farklı şekilde seçilir. Geriye kalan 7 kişi arasından 1 başkan yardımcısı 7 farklı şekilde seçilir. Geriye 6 kişi kaldı. Bu altı kişiden de nöbetçi öğrenci 6 farklı şekilde seçilebilir. O halde, 1 başkan, 1 başkan yardımcısı ve 1 nöbetçi öğrenci

$$8 \times 7 \times 6 = 336$$

farklı şekilde seçilebilir.

Test 15.3



A) 13 B) 11 C) 15 D) 16 E) 14

Çözüm :

$$\begin{cases} a + b + c = 31 \\ b + c + d = 33 \\ a + c + d = 27 \\ a + b + d = 29 \end{cases}$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$3(a + b + c + d) = 120 \Rightarrow a + b + c + d = 40$$

olur. O halde, elemanlarından en büyüğü $40 - 27 = 13$ bulunur.

Test 15.4



A) 18 B) 10 C) 15 D) 21 E) 16

Çözüm : 3 elemanlı alt kümede 5 kesinlikle olması gerekir. O halde, geriye kalan iki eleman $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$ kümesinden seçilecek iki eleman olabilir. Bunların sayısı da

$$\binom{7}{2} = 21$$

bulunur.

Test 15.5



A) 18 B) 19 C) 15 D) 21 E) 16

Çözüm : Herhangi iki doğru farklı noktada kesişseydi, 8 doğru en fazla

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{2!6!} = 28$$

noktada kesişirdi. Fakat, 5 tane doğru aynı noktada kesiştikleri için bu değerden

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

çıkarılmalı ve beş doğrunun kesiştiği 1 nokta eklenmelidir. O halde, en fazla $28 - 10 + 1 = 19$ noktada kesişebilirler.

Test 15.6

- A) 18 B) 24 C) 26 D) 25 E) 20

Çözüm : Herhangi iki doğru farklı noktada kesişseydi, 10 doğru en fazla

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

noktada kesişirdi. Fakat, 5 tane doğru aynı noktada kesiştikleri için bu değerden

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

çıkarılmalı ve bu beş doğrunun kesişimi 10 nokta eklenmelidir. Ayrıca, paralel olan doğrular kesişmezler. O halde,

$$\binom{5}{2} = 10$$

nokta daha çıkarılmalıdır. Sonuç olarak, en fazla

$$45 - 10 + 1 - 10 = 26$$

noktada kesişebilirler.

Test 15.7

- A) 144 B) 36 C) 72 D) 70 E) 71

Çözüm : Herhangi iki çember 2 farklı noktada kesişir. O halde,

$$2 \cdot \binom{7}{2} = 42$$

farklı noktada kesişirler. Bir çember ve bir doğru iki noktada kesişirler. O halde, 7 çember ve 2 doğru

$$2 \cdot \binom{7}{1} \binom{2}{1} = 28$$

noktada kesişebilirler. İki doğru en fazla bir noktada kesişebilir. Buna göre,

$$42 + 28 + 1 = 71$$

noktada kesişirler.

Test 15.8

- A) 133 B) 130 C) 120 D) 240 E) 266

Çözüm :

Beşgen ve üçgenlerin kesişmesiyle en fazla

$$6 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} = 72 \text{ nokta,}$$

beşgen ve çemberlerin kesişmesiyle en fazla

$$10 \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{2}{1} = 40 \text{ nokta,}$$

üçgen ve çemberlerin kesişmesiyle en fazla

$$6 \cdot \binom{3}{1} \binom{2}{1} = 36 \text{ nokta,}$$

4 beşgenin birbiriyle kesişimiyle en fazla

$$10 \cdot \binom{4}{2} = 60 \text{ nokta,}$$

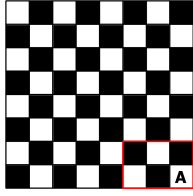
üç üçgenin birbiriyle kesişimiyle en fazla

$$6 \cdot \binom{3}{2} = 18 \text{ nokta}$$

oluşabilir. Çemberler iç içe olduğundan birbiriyle kesişmezler. O halde, toplam en fazla

$$72 + 40 + 36 + 60 + 18 = 266$$

nokta oluşabilir.

Test 15.9

- A) 1118 B) 1232 C) 1200 D) 1080 E) 1296

Çözüm : Dikdörtgen için dikey ve yatay 9 doğrudan ikişer tanesi seçilmelidir. Buna göre, toplam oluşacak dikdörtgen sayısı

$$\binom{9}{2} \binom{9}{2} = 36 \cdot 36 = 1296$$

olduğu görülebilir. Bundan A noktasını içeren dikdörtgen sayısını çıkaralım. Bir dikdörtgenin A noktasını içine alması için dikdörtgenin alt kenarı dama tahtasının en alt kenarı, dikdörtgenin yan kenarı da dama tahtasının en sağ kenarı olması gerekir. Buna göre, dikdörtgenin alt ve sağ kenarının bulunacağı kenar belirlidir. Sol kenarı 8 tane dikey çizgiden biri, üst kenarı da yine 8 tane üst çizgiden biri olabilir. O halde, istenen şekilde

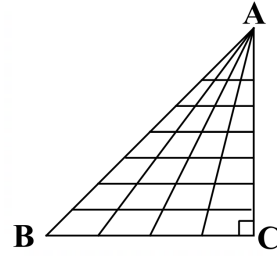
$$8 \cdot 8 = 64$$

dikdörtgen vardır.

Sonuç olarka dama tahtasının A noktasını içine almayan dikdörtgen sayısı

$$1296 - 64 = 1232$$

elde edilir.

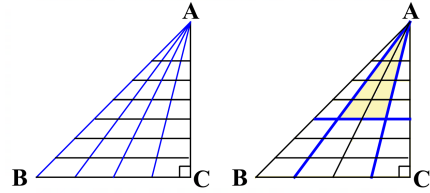
Test 15.10

- A) 24 B) 20 C) 40 D) 42 E) 48

Çözüm : Üçgenin bir köşesi A olmalıdır. Geniş açılı üçgenin yan kenarları A'dan geçen dik AC kenarı dışındaki 4 kenarın ikisinin üzerinde olabilir. Taban ise, BC ve BC'ye paralel 7 kenar arasından birinin üzerinde olabilir. Buna göre, oluşacak geniş açılı üçgen sayısı

$$\binom{4}{2} \binom{7}{1} = 42$$

bulunur.

**Test 15.11**

- A) 12 B) 10 C) 15 D) 8 E) 16

Çözüm : Bir kümenin elemanlarının çarpımının tek sayı olması için tüm elemanları tek sayı olmalıdır. O halde, $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ kümesinin 3 elemanlı alt kümesi sayısını bulmamız yeterlidir. Bu ise

$$\binom{5}{3} = 10$$

olarak bulunur.

Test 15.12

- A) 16 B) 30 C) 32 D) 18 E) 22

Çözüm :

$A = \{1, 3, 5, 7\} \cup \{2, 4, 6\}$ biçiminde tek ve çift sayıların birleşimi olarak yazalım.

i) 2 tane tek sayı, 1 tane çift sayı olan altkümeleri

$$\binom{4}{2} \binom{3}{1} = 18$$

olur.

ii) 3 tane tek sayı olan altkümeleri

$$\binom{4}{3} = 4$$

olur.

Sonuç olarak az 2 tane tek sayı olan alt küme sayısı $18 + 4 = 22$ olur.

Test 15.13

- A) 20 B) 30 C) 35 D) 21 E) 48

Çözüm :

Kümenin eleman sayısı n olsun.

$$\binom{n}{2} = 15 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 15$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 15$$

$$\Rightarrow n(n-1) = 30$$

$$\Rightarrow n = 6$$

bulunur. Buna göre, üç elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\binom{6}{3} = 20$$

olur.

Test 15.14

- A) 48 B) 30 C) 35 D) 21 E) 56

Çözüm : İlk rakam 0 olamaz. O halde, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinden seçilecek herhangi üç elemanın küçükten büyüğe yazılmasıyla oluşturulan sayı koşulu sağlar. Yanıt :

$$\binom{8}{3} = 56$$

olur.

Test 15.15 AJHSME-1990

- A) 40 B) 35 C) 30 D) 45 E) 50

Çözüm :

Dolu olan koltukları $\otimes$ ile boş koltukları $\bigcirc$ ile gösterelim. Bir sonraki oturacak kişinin mutlaka bir başkasının yanında oturması için ve en az dolu koltuk için, dolu koltuklar arasında iki boşluk bırakabiliriz. İlk koltuğu da boş alarak başlarız. Böylece,

$$\bigcirc \otimes \bigcirc \bigcirc \otimes \bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc \bigcirc \otimes \bigcirc$$

biçiminde oturma düzeni belirlenebilir. Böylece, bir sonraki oturacak kişi mutlaka bir kişinin yanına oturmak zorunda kalacaktır. Koltukları $\bigcirc \otimes \bigcirc$ biçiminde üçerli gruplarsak her üçerli grupta bir dolu koltuk olacağından, 120 koltukta 40 dolu koltuk olur.

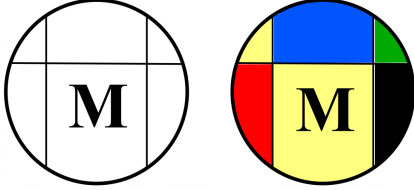
Test 15.16

- A) 48 B) 36 C) 72 D) 84 E) 56

Çözüm : A kümesinden 2, B ve C kümelerinden ise 1 eleman seçilmelidir. Buna göre şifresi

$$2! \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} = 72$$

farklı durum olabilir. 72 denemede şifresini kesinlikle bulur.

Test 15.17

- A) 480 B) 360 C) 720 D) 960 E) 900

Çözüm : Öncelikle aynı renk olan iki bölgeyi kaç farklı şekilde seçeceğimizi bulalım. 6 bölgeden ikisi

$$\binom{6}{2} = 15$$

farklı şekilde seçilebilir. Ama yan yana ve üst üste olanların sayısını çıkarmalıyız. Yan yana olan iki bölge sayısı 4 ve alt alta olan iki bölge sayısı 3 olduğundan $15 - 4 - 3 = 8$ tane iki renk aynı olabilecek boyama vardır. Böylece, boyanacak alanlar belirlenmiş olur ve beş bölgeye indirgenir bu beş bölge 5 renk boya ile $5!$ farklı şekilde boyanabilir. Sonuç olarak

$$8 \cdot 5! = 960$$

farklı logo tasarlanabilir.

Test 15.18

- A) 84 B) 90 C) 65 D) 75 E) 86

Çözüm : B kümesi A kümesinin bir alt kümesi olsun.

B kümesinin en büyük elemanı 2 asal sayısı ise B 'nin 2 dışındaki elemanları $\{1\}$ kümesinin alt kümeleri olabilir. $2^1 = 2$ tane.

B kümesinin en büyük elemanı 3 asal sayısı ise B 'nin 3 dışındaki elemanları $\{1, 2\}$ kümesinin alt kümeleri olabilir. $2^2 = 4$ tane.

B kümesinin en büyük elemanı 5 asal sayısı ise B 'nin 5 dışındaki elemanları $\{1, 2, 3, 4\}$ kümesinin alt kümeleri olabilir. $2^4 = 16$ tane.

B kümesinin en büyük elemanı 7 asal sayısı ise B 'nin 7 dışındaki elemanları $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ kümesinin alt kümeleri olabilir. $2^6 = 64$ tane.

O halde, koşula uygun $2 + 4 + 16 + 64 = 86$ alt küme vardır.

Test 15.19

- A) 36 B) 30 C) 35 D) 21 E) 48

Çözüm : 3 elemanlı alt kümenin elemanları çarpımının 3 ile tam bölünebilmesi elemanlarından en az birinin 3 veya 6 olması gerekir.

1. Yol.

$$6 \notin \{3, a, b\} \text{ için } a, b \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \text{ ise } \binom{6}{2} = 15$$

$$3 \notin \{6, a, b\} \text{ için } a, b \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \text{ ise } \binom{6}{2} = 15$$

$$\{3, 6, b\} \text{ için } a, b \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \text{ ise } \binom{6}{1} = 6$$

olabilir. O halde, $15 + 15 + 6 = 36$ tanesinin elemanları çarpımı 3 ile tam bölünür.

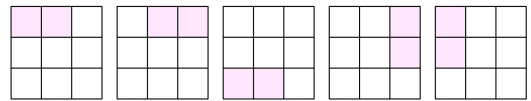
2. Yol. İçerme dışarma ilkesiyle yapalım.

$$\{3, a, b\} \text{ için } a, b \in \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\} \text{ ise } \binom{7}{2} = 21$$

$$\{3, a, b\} \text{ için } a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\} \text{ ise } \binom{7}{2} = 21$$

$$\{3, 6, b\} \text{ için } a, b \in \{1, 2, 4, 5, 7, 8\} \text{ ise } \binom{6}{1} = 6$$

olduğundan $21 + 21 - 6 = 36$ olur.

Test 15.20 AJHSME-1990

- A) 8 B) 24 C) 6 D) 9 E) 12

Çözüm : Farklı boyama sayısını iki durumda sayalım.

1. Eğer köşedeki karelerden biri boyalı ise, geri kalan kareler 5 farklı şekilde boyanabilir.

2. Eğer köşelerde olmayan karelerden biri boyalı ise, geri kalan kareler 3 farklı şekilde boyanabilir.

Böylece, toplam $5 + 3 = 8$ farklı boyama vardır.

Test

15.21 AMC8-2019



A) 190 B) 210 C) 180 D) 105 E) 240

Çözüm : İlk önce Alp'in 2 tane elması olduğunu varsayalım. Geriye 22 elma kalır.

Berk	Can
2	20
3	19
4	18
⋮	⋮
20	2

Yani, 22 elmayı Berk ve Can'a $20 - 2 + 1 = 19$ farklı şekilde dağıtabilir.

Eğer Alp 3 elma alsaydı. Geriye 21 elma kalır ve bu kez 18 farklı şekilde dağıtırdı. Eğer Alp 4 elma alsaydı. Geriye 20 elma kalır ve bu kez 17 farklı şekilde dağıtırdı. Bu şekilde devam edersek, Alp 20 elma alırsa, Berk ve Can'a 2'ser elma dağıtılabilir ve 1 farklı şekilde dağıtırdı. Buna göre, toplam dağıtım sayısı

$$19 + 18 + 17 + \cdots + 2 + 1 = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

elde edilir.

Test

15.23 UOMO - 2011



A) 20 B) 30 C) 35 D) 21 E) 18

Çözüm : $\{50, 100, 1000, 2000, 2010, 2011, 2012, 3000\}$ kümesindeki elemanların 3'e bölündüklerinde kalanlar sırasıyla, 2,1,1,2,0,1,2,0 şeklindedir. Üç elemanlı bir altkümesinin elemanları toplamının 3'e bölünmesi için, ya kalanları birbirinden farklı olan sayılar alınmalı, ya da üçü de aynı kalanı veren sayı alınmalıdır. Buna göre,

$$\binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{2}{1} + \binom{3}{3} + \binom{3}{3} = 20$$

elde edilir.

Test

15.22 UOMO - 2004



A) 2002 B) 2003 C) 2004 D) 2005 E) 2001

Çözüm : Bu kümenin 2^{2004} alt kümesi vardır. Bunların yarısında tek sayıda eleman, yarısında da çift sayıda eleman bulunur. Buna göre, tek sayıda eleman içeren

$$\frac{2^{2004}}{2} = 2^{2003}$$

alt kümesi vardır. O halde, $a = 2003$ bulunur.

Test 15.24 UMO - 2010**A) 3 B) 5 C) 11 D) 13 E) 17****Çözüm :** 100 elemanlı bir kümenin 50 elemanlı alt kümelerinin sayısı

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!50!}$$

ile bulunur. Bu sayının 3,5,11,13 ve 17 çarpanları bulunup bulunmadığını inceleyelim.

11 için inceleyelim.

$$\left\lfloor \frac{100}{11} \right\rfloor = 9$$

olduğundan, 100! içinde 9 tane 11 çarpanı vardır. Diğer yandan,

$$\left\lfloor \frac{50}{11} \right\rfloor = 4$$

olduğundan, 50! içinde 4 tane 11 çarpanı vardır. O halde,

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!50!}$$

sayısının $9 - 2 \cdot 4 = 1$ tane 11 asal çarpanı vardır.**5 için inceleyelim.**

$$\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor = 20, \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 4$$

olduğundan, 100! içinde $20 + 4 = 24$ tane 5 çarpanı vardır. Diğer yandan,

$$\left\lfloor \frac{50}{5} \right\rfloor = 10, \left\lfloor \frac{50}{25} \right\rfloor = 2$$

olduğundan, 50! içinde 24 tane 5 çarpanı vardır. Buna göre

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!50!}$$

sayısının $24 - 2 \cdot 12 = 0$ tane 5 asal çarpanı vardır.

Yani, 5 sayısına bölünmez.

Diğerlerinin bölündüğünü de siz görünüz.

Test 15.25 UOMO - 2012**A) $8^3 \cdot 13$ B) $8^3 \cdot 11$ C) $8^3 \cdot 10$ D) $8^3 \cdot 9$ E) $8^3 \cdot 14$** **Çözüm :** $\{1, 2, 3, \dots, 17\}$ kümesini,

$$A = \{1, 5, 9, 13, 17\}; B = \{2, 6, 10, 14\};$$

$$C = \{3, 7, 11, 15\}; D = \{4, 8, 12, 16\}$$

biçiminde 4 kümeye ayıralım.

 B kümesinden 8 altküme seçilebilir. Bunlar,

$$\emptyset; \{2\}; \{6\}; \{10\}; \{14\}; \{2, 10\}; \{2, 14\}; \{6, 14\}.$$

Benzer şekilde C ve D kümelerinden de 8 altküme seçilebilir. A kümesinden ise, istenen şekilde 13 altküme seçilebilir? **239**Bunlar, $\emptyset$ ve tek elemanlı kümeler ile,

$$\{1, 9\}; \{1, 13\}; \{1, 17\}; \{5, 13\}; \{5, 17\}; \{9, 17\}; \{1, 9, 17\}$$

Test 15.26 UOMO-2012**A) 1728 B) 2304 C) 2880 D) 3456 E) 9216****Çözüm :** 4 sıradan iki sıra beyaz, iki sıra kırmızı tişörtlülerden oluşacaktır. Buna göre, beyaz tişörtlü öğrencilerin oturacağı sıraları $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde belirleriz. Bu iki sıra belirlendikten sonra diğer iki sırayada kırmızı tişörtlü öğrenciler oturacaktır. Bundan sonra geriye, kırmızı ve beyaz tişörtlü öğrencileri kendi aralarında değiştirmek, yani kaç farklı şekilde oturabileceklerini hesaplamak kalır. Sonuç olarak,

$$6 \cdot 4! \cdot 4! = 3456$$

farklı biçimde oturabilirler.

DAĞILIM



Farklı Nesneleri Dağıtma

Koşulsuz Dağılım

Alıştırma 16.1.



Çözüm : Her öğrenci için iki seçenek vardır. O halde,

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$$

farklı şekilde dağıtılır.

Alıştırma 16.2.



Çözüm : Her matematik kitabı için 3 seçenek vardır. O halde,

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

farklı şekilde dağıtılır.

Dağıtılan Kişilerden Belirli Birinin Koşullu Durumu

Alıştırma 16.5.



Çözüm : Hangi kişinin 3 kitap alacağını 4 kişi arasından $\binom{4}{1} = 4$ farklı şekilde seçeriz. 3 kitap alan kişinin alacağı 3 kitap $\binom{5}{3} = 10$ farklı şekilde seçilebilir. Geriye 2 kitap kalır. Bu iki kitabın her birini geri kalan üç kişiye $3 \cdot 3 = 9$ farklı şekilde verebiliriz. O halde, istenen dağıtım sayısı

$$4 \cdot 10 \cdot 9 = 360$$

bulunur.

Alıştırma 16.3.



Çözüm : Fenerbahçe'nin transfer edeceği 2 basketbolcu $\binom{6}{2} = 15$ farklı şekilde seçilebilir. Geriye 4 basketbolcu kalır. Bu 4 basketbolcu Beşiktaş veya Karşıyaka takımlarına transfer olabilir. Yani, her basketbolcu için 2 seçenek vardır. Bunların sayısı da $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ olur. O halde, istenen dağıtım sayısı $15 \cdot 16 = 240$ bulunur.

Alıştırma 16.4.



Çözüm :

i) Berk 4 kitap alırsa, bu 4 kitap $\binom{6}{4} = 15$ farklı şekilde seçilebilir. Geriye kalan 2 kitabı Alp ve Ece'ye verebiliriz. Her kitap için 2 seçenek var. O halde, $15 \cdot (2 \cdot 2) = 60$ farklı şekilde dağıtılabilir.

ii) Berk 5 kitap alırsa, bu 5 kitap $\binom{6}{5} = 6$ farklı şekilde seçilebilir. Geriye kalan 1 kitap kaldırı. Alp ve Ece'ye verebiliriz. Yani 2 seçenek var. O halde, $6 \cdot 2 = 12$ farklı şekilde dağıtılabilir.

ii) Berk 6 kitap alırsa, bu 6 kitap $\binom{6}{6} = 1$ farklı şekilde seçilebilir. geriye kitap kalmaz.

Sonuç olarak $60 + 12 + 1 = 73$ farklı şekilde dağıtılabilir.

Dağıtılan Kişilerden Herhangi Birinin Koşullu Durumu

Alıştırma 16.6.



Çözüm :

Hangi kutuda 3 top olacağını $\binom{3}{1} = 3$ farklı şekilde belirleriz. Bu kutuya 6 farklı toptan 3 tanesini $\binom{6}{3} = 20$ farklı şekilde seçerek koyarız. Geriye 3 top kalır. Bu üç topun her biri için geriye iki seçenek vardır. Bunların sayısı da $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ olur. O halde, istenen dağıtım sayısı

$$3 \cdot 20 \cdot 8 = 480$$

bulunur.

Dağıtılan Kişilerden Her Birinin Koşullu Durumu

Alıştırma 16.7.



Çözüm : 5 top iki farklı kutuya

$\{1, 4\} ; \{2, 3\} ; \{3, 2\} ; \{4, 1\}$

biçiminde dağıtılabilir. Buna göre,

$$\binom{5}{1}\binom{4}{4} + \binom{5}{2}\binom{3}{3} + \binom{5}{3}\binom{2}{2} + \binom{5}{4}\binom{1}{1} = 30$$

farklı şekilde dağıtılabilir.

Aynı Olan Nesneleri Dağıtma

Alıştırma 16.8.



Çözüm :

a) 4 kısma ayırma için 3 ayraç gerekir.

b) 12 kısma ayırma için 11 ayraç gerekir.

Alıştırma 16.9.



Çözüm : Birbirinin aynısı 7 top 4 öğrenciye dağıtmak için 3 ayraç gerekir. 7 topu 7 T harfiyle, 3 ayrı da 3 A harfiyle göstereyim. Buna göre, sorumuz 7 T harfi ve 3 A harfi kaç farklı şekilde sıralanır sorusuna dönüşür.

TTTTTTTAAA

harflerinin farklı sıralama sayısı ise tekrarlı sıralama olduğundan

$$\frac{10!}{7!3!} = \binom{10}{3} = 120$$

bulunur. Yani 120 farklı şekilde dağıtılabilir.

Alıştırma 16.10.



Çözüm : Birbirinin aynısı 8 topu 3 kutuya dağıtmak için 2 ayraç gerekir. 8 topu 8 T harfiyle, 2 ayrı da 2 A harfiyle göstereyim. Buna göre, sorumuz 8 T harfi ve 2 A harfi kaç farklı şekilde sıralanır sorusuna dönüşür.

TTTTTTTTTAA

harflerinin farklı sıralama sayısı ise tekrarlı sıralama olduğundan

$$\frac{10!}{8!2!} = 45$$

şeklinde yazılabilir.

Alıştırma 16.11.



Çözüm : 4 elmanın 3 günde tüketimin gösterecek şekilde elmaların aralarına koymak için $3 - 1 = 2$ ayraç gerekli. Buna göre, 4 elma ve 2 ayraçın sıralama sayısını hesaplayalım. $\frac{6!}{4!2!} = 15$ bulunur.

Dağıtılan Kişilerden Her Birinin Koşullu Durumu

Alıştırma

16.12.



Çözüm :

Her birine birer çanta verelim. Geriye 3 çanta kalır. 4 öğrenciye paylaşmak için 3 ayraç gerekir. 3 çanta ve 3 ayraç

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

farklı şekilde sırlanabilir. Bu sayı paylaşma sayısını verir.

Alıştırma

16.13.



Çözüm : 3 tablet alacak kişi 4 kişi arasından $\binom{4}{1} = 4$ farklı şekilde belirlenir. Bu kişiye 3 tablet verelim. Geriye 6 tablet kalır. Bu 6 tablet geri kalan 3 kişiye dağıtılacak. Bunun için 2 ayraç gerekli. 6 tablet ve 2 ayraç

$$\frac{8!}{6!2!} = 28$$

farklı şekilde dağıtılır. O halde, $4 \cdot 28 = 112$ farklı şekilde dağıtılabilir.

Alıştırma

16.14.



Çözüm : 7 özdeş top 3 kişiye kaç farklı şekilde paylaşılabilir sorusunun denkleme dönüşmüş biçimi gibi düşünebilirsiniz. 3 kişiye dağıtacağımız için 2 ayraç gereklidir. Buna göre, 7 top ve 2 ayraç $\frac{9!}{7!2!} = 36$ farklı şekilde sıralanır. Yani denklemin 36 çözümü vardır.

KONU SONU TESTİ (Dağılım)

Test 16.1



- A)
- 2^3
- B)
- 3^5
- C)
- 5^3
- D)
- 3^4
- E)
- 2^5

Çözüm :

Her eleman 3 kümeden birine yazılabilir. Yanıt

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

Test 16.2



- A) 27 B) 18 C) 24 D) 72 E) 81

Çözüm : Her öğrenci için 3 sınıf olabilir.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$$

Test 16.3



- A) 27 B) 18 C) 24 D) 72 E) 48

Çözüm : Alp ve Berk'i bir bütün olarak düşünelim. O halde, Ege, Deniz ve (Alp-Berk)'in her biri 3 farklı sınıfa dağıtılabilir.

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$$

Test 16.4



- A) 27 B) 18 C) 24 D) 72 E) 48

Çözüm : Alp, Berk, Ege ve Deniz 'den üçü $\binom{4}{3} = 4$ farklı şekilde seçilebilir. Üç kişilik grup için 3, geri kalan 1 kişi için de 2 sınıf seçeneği vardır. O halde, üç tanesinin aynı sınıfta olduğu

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

durum söz konusudur. Diğer yandan, tamamı aynı sınıfta da olabilir. Tamamının aynı sınıfta olabileceği 3 sınıf seçeneği vardır. Sonuç olarak en az üç tanesinin aynı sınıfta olması koşuluyla $24 + 3 = 27$ dağıtım yapılabilir.

Test 16.5



- A) 27 B) 18 C) 24 D) 12 E) 9

Çözüm :

Müzik kulübünde 3 kişi varsa bu kişiler dört öğrenci arasından $\binom{4}{3} = 4$ farklı şekilde seçilebilir. Geriye kalan tek kişi spor ve tiyatro kulübüne gidebilir. Yani, 2 seçeneği var. O halde, $4 \cdot 2 = 8$ dağıtım mümkündür.

Müzik kulübünde 4 kişi varsa bu kişiler dört öğrenci arasından $\binom{4}{4} = 1$ farklı şekilde seçilebilir.

Sonuç olarak, en az üç tanesi müzik kulübünde olması koşuluyla $8 + 1 = 9$ farklı şekilde dağıtılabilir.

Not : Bir önceki örnekte 27 bulmuştuk. Burada hangi kulüpte en az 3 kişi olacağı belirli olduğundan $27 \div 3 = 9$ biçiminde de sonuca ulaşabilirsiniz.

Test 16.6



- A) 27 B) 18 C) 24 D) 36 E) 25

Çözüm :

Burada kümelerin isimleri belirli değil. Eleman sayılarına göre

$$\{1, 1, 3\}, \{1, 2, 2\}$$

biçimlerinde ayrılabilir.

$\{1, 1, 3\}$ için

$$\frac{\binom{5}{3} \binom{2}{1} \binom{1}{1}}{2!} = 10$$

durum vardır. (Kümeler isimsiz iki tane 1 elemanlı kümenin yerinin değişmesi farklı değil.)

Bzner şekilde $\{1, 2, 2\}$ için

$$\frac{\binom{5}{2} \binom{3}{2} \binom{1}{1}}{2!} = 15$$

durum vardır.

O halde, $10 + 15 = 25$ farklı biçimde ayrılabilir.

Test 16.7

- A) 189 B) 168 C) 672 D) 756 E) 945

Çözüm : Hangi kutuda 5 top olacağını $\binom{4}{1} = 4$ farklı şekilde belirleriz. Bu kutuya 7 farklı toptan 5 tanesini $\binom{7}{5} = 21$ farklı şekilde verebiliriz. Geriye 2 top kalır. Bu iki topun her biri için kalan 3 seçenek vardır. Bunların sayısı da $3 \cdot 3 = 9$ olur. O halde, istenen dağıtım sayısı

$$4 \cdot 21 \cdot 9 = 756$$

bulunur.

Test 16.8 AMC8-2004

- A) 10 B) 18 C) 15 D) 36 E) 21

Çözüm : Her birine önce birer tane kalem verelim. Geriye paylaştırılması gereken 3 kalem kaldı. 3 kişiye paylaşım için elimize 2 ayrıncı çubuk alabiliriz. Buna göre, 3 kalem ve 2 ayrıncı çubuğun sıralama sayısı bize dağıtım sayısını verecektir.

↑ ↑ ↑ | |

Buradan,

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

elde edilir.

Test 16.9

- A) 35 B) 84 C) 24 D) 56 E) 63

Çözüm : Birbirinin aynısı 6 top 4 öğrenciye dağıtmak için 3 ayraç gerekir. 6 topu 6 T harfiyle, 3 ayraç da 3 A harfiyle gösterelim. Buna göre, sorumuz 6 T harfi ve 3 A harfi kaç farklı şekilde sıralanır sorusuna dönüşür.

TTTTTAA

harflerinin farklı sıralama sayısı ise tekrarlı sıralama olduğundan

$$\frac{9!}{6!3!} = 84$$

bulunur. Yani 84 farklı şekilde dağıtılabilir.

Test 16.10

- A) 21 B) 18 C) 15 D) 10 E) 30

Çözüm : 3 öğrenciye en başta 2-şer kalem verirken geriye $10 - 6 = 4$ kalem kalır. O halde, sorumuz 4 özdeş kalem 3 öğrenciye kaç farklı şekilde paylaştırılabilir sorusudur. 4 Kalem ve 2 Ayraç'ın sıralama sayısı

$$\frac{6!}{4!2!} = 15$$

bulunur.

Test 16.11

- A) 21 B) 18 C) 24 D) 36 E) 25

Çözüm : 4 kalem alacak kişi 3 kişi arasından $\binom{3}{1} = 3$ farklı şekilde belirlenir. Bu kişiye 4 kalem verelim. Geriye $10 - 4 = 6$ kalem kalır. Bu 6 kalem geri kalan 2 kişiye dağıtılacak. Bunun için 1 ayraç gerekli. 6 kalem ve 1 ayraç

$$\frac{7!}{6!1!} = 7$$

farklı şekilde dağıtılır. O halde, $3 \cdot 7 = 21$ farklı şekilde dağıtılabilir.

Test 16.12

- A) 21 B) 35 C) 56 D) 84 E) 126

Çözüm : 6 özdeş top 4 kişiye kaç farklı şekilde paylaştırılabilir sorusunun denkleme dönüşmüş biçimi gibi düşünebilirsiniz. 4 kişiye dağıtacağımız için 3 ayraç gereklidir. Buna göre, 6 top ve 3 ayraç

$$\frac{9!}{6!3!} = 84$$

farklı şekilde sıralanır. Yani denklemin 84 çözümü vardır.

Test 16.13

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 10 E) 21

Çözüm : a 'nın en az 3 top alması koşuluyla 5 özdeş top 4 kişiye kaç farklı şekilde paylaştırılabilir sorusunun denkleme dönüşmüş biçimi gibi düşünebilirsiniz. Önce a 'ya 3 top verelim. Böylece geriye 2 top kalır. O halde, sorumuz bu 2 topun 4 kişiye kaç farklı biçimde dağıtılacağı sorusudur. 4 kişi için 3 ayrıç gereklidir. Buna göre, 2 top ve 3 ayrıç

$$\frac{5!}{2!3!} = 10$$

biçiminde sıralanabilir. Her sıralama $a \geq 3$ olmak üzere bir (a, b, c, d) dördlüsünü verir.

Test 16.15 AMC8-2020

- A) 180 B) 150 C) 147 D) 90 E) 96

Çözüm : Eleman sayılarına göre ödüller öğrencilere

$$\{1, 1, 3\}, \{1, 3, 1\}, \{3, 1, 1\},$$

$$\{1, 2, 2\}, \{2, 1, 2\}, \{2, 2, 1\}$$

biçimlerinde dağıtılabilir. Öğrenciler isimli kabul edildiği için buradaki her sıralama farklıdır.

$\{1, 1, 3\}$ için $\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 20$, olduğundan $\{1, 1, 3\}$, $\{1, 3, 1\}$, $\{3, 1, 1\}$ biçimlerinde $3 \cdot 20 = 60$ dağıtım vardır.

$\{1, 2, 2\}$ için $\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = 30$, olduğundan $\{1, 2, 2\}$, $\{2, 1, 2\}$, $\{2, 2, 1\}$ biçimlerinde $3 \cdot 30 = 90$ dağıtım vardır.

O halde, toplam $60 + 90 = 150$ farklı dağıtım vardır.

2. Yol : (İçerme-Dışlama İlkesi) Her öğrencinin en az bir ödül alması kısıtlaması olmasaydı, 5 ödülün her birini alıp 3 öğrenciye verilebileceğinden ödülleri dağıtmanın $3^5 = 243$ yolu olurdu. Bu sayıdan, en az bir öğrencinin ödül almadığı durumları çıkarırsak sonuca ulaşırız. **Bir öğrenci bir ödül almazsa.** Bu 3 farklı öğrenci olabilir. O zaman 5 ödül geriye kalan 2 öğrenciye $2^5 = 32$ farklı şekilde dağıtılır. Yani, bir öğrencinin ödül almadığı dağıtımların sayısı $3 \cdot 32 = 96$ olur. Fakat, 3 ile çarptığımız için 2 öğrencinin ödül almadığı durumlar iki kere sayılmış olacak. O halde, iki öğrencinin ödül amadığı durumları hesaplayalım. Ödül almayan iki öğrenci $\binom{3}{2} = 3$ şekilde seçilebilir. 5 ödül kalan 1 kişiye tek şekilde verilebilir. Buna göre, dağıtım sayısı

$$243 - 96 + 3 = 150$$

bulunur.

Test 16.14

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 10 E) 21

Çözüm : a, b, c sıfır olmamalı. Bu nedenle her birine başta 1 top verilirse pozitif olma koşulu sağlanır ve soru $7 - 3 = 4$ özdeş topun 3 kişiye kaç farklı şekilde paylaştırılabilir sorusuna dönüşür. 3 kişiye dağıtacağımız için 2 ayrıç gereklidir. Buna göre, 4 top ve 2 ayrıç

$$\frac{6!}{4!2!} = 15$$

farklı şekilde sıralanır. Yani denklemin 15 pozitif tam sayı çözümü vardır.

Test 16.16

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 10 E) 21

Çözüm : Elmalar özdeş kabul edilir. Öncelikle 4 elma 2-şer olarak Verk ve Cengiz'e verilir. Böylece, 2 elma koşulu sağlanır. Geriye 20 elma kalır. 20 elmayı 2 kişiye paylaşmak için 1 ayrıç gereklidir. O halde, 20 elma ve 1 ayrıç

$$\frac{21!}{20!1!} = 21$$

farklı şekilde sıralanacağından 21 farklı şekilde paylaşılabilir.

Test 16.17 AMC8-2019

- A) 380 B) 180 C) 190 D) 200 E) 85

Çözüm : Elmalar özdeş kabul edilir. 24 elmadan 2-şer tane Alper, Cengiz ve Berk alırsa geriye 18 elma kalır. 18 elmayı 3 kişiye paylaşmak için 2 ayraç gereklidir. O halde, 18 elma ve 2 ayraç

$$\frac{20!}{18!2!} = 190$$

farklı şekilde sıralanacağından 190 farklı şekilde paylaşılabilir.

Test 16.18

- A) 10! B) 9! C) 5!5! D) 10 · 5! E) 2 · 10!

Çözüm : 10 tane farklı kitap 10! farklı şekilde sıralanabilir. Bu sıralamaların her birinde ilk 5 kitabı birinci, son beş kitabı ikinci rafa koyabiliriz. O hade, tüm kitaplar kitaplığın iki rafına 10! farklı şekilde yerleştirilebilir

Test 16.19

- A)
- $\frac{10!}{2!}$
- B)
- $\frac{11!}{3!}$
- C) 21 · 8! D) 20 · 8! E) 4!3!3!

Çözüm : 8 tane farklı kitap 8! farklı şekilde sıralanabilir. Bu sıralamayı üç kısma ayırıp ilkinin birinci, ikincisini ikinci ve üçüncüsünü üçüncü rafa yerleştirebilir. 8 kitap sıralandıktan sonra üç parçaya ayırmak için

$$K \square K \square K \square K \square K \square K \square K$$

sıralanışında kitapların arasındaki 7 boşluktan 2 tanesi seçilip seçilen bölmelere ayraç konulabilir. Bu ise $\binom{7}{2} = 21$ farklı şekilde mümkündür. O halde, 21 · 8! farklı şekilde yerleştirilebilir

Test 16.20 AMC8-2004

- A) 15 B) 18 C) 20 D) 10 E) 21

Çözüm : Her birine başta 1 kalem verilir. Böylece en az 1 kalem alma koşulu sağlanır ve soru 3 kalemin 3 arkadaşına paylaşırma durumuna dönüşür. 3 arkadaşına paylaşmak için 2 ayraç gerekir. 3 kalem ve 2 ayraç

$$\frac{5!}{3!2!} = 10$$

farklı şekilde sıralanabilir. O halde, her biri en az 1 kalem alması koşuluyla 10 farklı şekilde paylaşılabilirler.

Test 16.21 AMC8-2004

- A) 3 · 6! B) 6 · 6! C) 5 · 7! D) 5 · 6! E) 5 · 5!

Çözüm : Kargoları teslim edilme sırasına göre 6! farklı şekilde dağıtmak mümkündür. Her kargocu en az bir kargo dağıtmalıdır. Buna göre,

$$\blacksquare K \square K \square K \square K \square K \square K \blacksquare$$

biçiminde sıralarsak kargolar arasındaki 5 boşluktan birini seçip bu boşluğa ayraç koyabiliriz. Ayraçların ayırdığı kısımlardan sol taraftaki pazartesiyi, sağ taraftaki de sahiyi gösterebilir. O halde, istenen şekilde

$$5 \cdot 6!$$

dağıtım mümkündür. Bu şekilde tüm durumları tam olarak bir kez saymış oluruz

Test 16.22 UMO-2007

- A) 36 · 10! B) 50 · 10! C) 55 · 10! D) 81 · 10! E) Hiçbiri

Çözüm : $1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 \square 9 \square 10$ kitaplarını 10! şekilde yerleştirebiliriz. Her parçada en az 1 kitap olacak şekilde üç parçaya ayırabilmek için, aralardaki 9 boşluktan ikisine iki çubuk koymak yeterlidir. Bunu ise $\binom{9}{2} = 36$ şekilde yapabiliriz. O halde, 36 · 10! şekilde yerleştirilebilir.

Test 16.23 UMO-2000

- A) 163 B) 393 C) 858 D) 1716 E) Hiçbiri

Çözüm : 7 kırmızı top 7 kutuya dağıtıldıktan sonra, 7 beyaz top tek türlü dağıtılacaktır. O halde, 7 kırmızı topu 7 kutuya kaç değişik şekilde dağıtabileceğimizi bulalım. Her kutuda en fazla 2 top olacağından, topları,

$$(2, 2, 2, 1), (2, 2, 1, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

şeklinde dağıtabiliriz.

(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) olacak şekilde, yani her kutuya 1 top olacak şekilde tek türlü dağıtılabilir.

(2, 1, 1, 1, 1, 1) ise, 7 kutudan 1'ine 2 top, 6 kutudan 5 tanesine de 1 top, $\binom{7}{1} \binom{6}{5} = 42$ değişik şekilde dağıtılabilir.

(2, 2, 1, 1, 1) ise, 7 kutudan 2'sine 2 top, 5 kutudan 3'üne 1 top, $\binom{7}{2} \binom{5}{3} = 210$ değişik şekilde dağıtılabilir.

(2, 2, 2, 1) ise, 7 kutudan 3'üne 2 top ve 4 kutudan 1'ine 1 top, $\binom{7}{3} \binom{4}{1} = 140$ değişik şekilde dağıtılabilir. Sonuç olarak, toplam, $1 + 42 + 210 + 140 = 393$ şekilde dağıtılabilir.

Test 16.2 UMO-2006

- A) 512 B) 64 C) 1025 D) 256 E) 126

Çözüm : 10 şekeri $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ $\textcircled{S}$ gibi sıralayalım. Şeker aralarına çubuk koyarak günleri ayıralım. Böylece, kaç günde kaç değişik şekilde yiyeceğini hesaplayalım.

Şekerleri, 10 günde yer ise, şekerlerin arasındaki 9 boşluğa da çubuk koyulmalıdır. 9 çubuk 9 boşluğa tek şekilde yerleştirilir. Yani, Ali, 10 günde $\binom{9}{9} = 1$ değişik şekilde yiyebilir. $\textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S}$.

Ali 9 günde yer ise, 8 çubuk yeterlidir ve 8 çubuk 9 boşluğa $\binom{9}{8}$ değişik şekilde yerleştirilir. Örneğin, $\textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S} | \textcircled{S}$.

Ali 8 günde yer ise, 7 çubuk yeterlidir ve 7 çubuk 9 boşluğa $\binom{9}{7}$ değişik şekilde yerleştirilir.

⋮

Ali 2 günde yer ise, 1 çubuk yeterlidir ve 9 boşluğa 1 çubuk $\binom{9}{1}$ değişik şekilde yerleştirilir.

Ali 1 günde yer ise, çubuk gerekli değildir $\binom{9}{0}$ değişik şekilde yiyebilir.

Böylece, Ali, şekerleri $\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \cdots + \binom{9}{8} + \binom{9}{9}$ değişik biçimde yiyebilir. Binom açılımı göz önüne alınırsa (Bknz. Binom Açılımı.),

$$\binom{9}{0} + \binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \cdots + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} = 2^9 = 512$$

bulunur.

Test 16.25 UOMO-2013

- A) 1050 B) 1014 C) 990 D) 972 E) 1062

Çözüm : 4 farklı kutudan tek sayıda top bulunacak olanları $\binom{4}{2} = 6$ farklı şekilde seçebiliriz. Tam olarak 2 kutuda tek sayıda top varsa, diğer iki kutuda da çift sayıda top bulunmalı. Buna göre, kutulardaki top sayılarını,

$$2x, 2y, 2n + 1 \text{ ve } 2m + 1$$

ile ifade edebiliriz. $2x + 2y + (2n + 1) + (2m + 1) = 18$ eşitliğinden,

$$x + y + m + n = 8$$

elde edilir. Bu denklemin, $\binom{8+4-1}{4-1} = 165$ çözümü vardır. O halde, $6 \cdot 165 = 990$ farklı şekilde dağıtım yapmak mümkündür.

Test 16.26 UOMO-2012

- A) 330 B) 300 C) 275 D) 240 E) 165

Çözüm : Herhangi iki günde yediği şekerlerin farkının 3'e bölünmemesini istiyoruz. Bu ise, Ahmet'in 3 gün boyunca şekerleri $3k, 3n + 1$ ve $3m + 2$ sayılarınca yemesini gerektirir. Buna göre,

$$(3k) + (3n + 1) + (3m + 2) = 30$$

eşitliğini sağlayan (k, n, m) negatif olmayan tam sayı üçlülerinin sayısını arıyoruz. Bu denklemden,

$$k + n + m = 9$$

elde edilir. Bu eşitliği sağlayan $\binom{9+3-1}{3-1} = 55$ tane (k, n, m) üçlüsü vardır. Diğer yandan, $3k, 3n + 1$ ve $3m + 2$ durumlarının kendi aralarındaki permütasyonu da göz önünde bulundurulursa, $55 \cdot 3! = 330$ farklı şekilde şekerleri yiyebilir.

OLASILIK

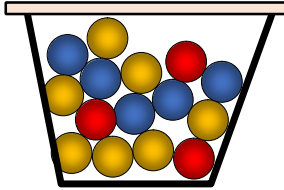
Bir Olayın Olasılığı

Alıştırma 17.1.



Çözüm :

Alıştırma 17.2.



Çözüm :

Alıştırma 17.3.



Çözüm : 2, 3, 5 asaldır. Yani $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Alıştırma 17.4.



Çözüm : 4! farklı sayı yazılabilir. 4 ile bölünebilmesi için son iki rakamının 12, 32 veya 24 olması gerekir.

Son iki rakamı 12 olan 2! = 2 sayı vardır.

Son iki rakamı 32 olan 2! = 2 sayı vardır.

Son iki rakamı 24 olan 2! = 2 sayı vardır.

O halde, oluşan sayılardan $2 + 2 + 2 = 6$ tanesi 4 ile bölünebilir. İstenen olasılık

$$\frac{6}{4!} = \frac{6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Alıştırma 17.5.



Çözüm : Her bir para ya yazı ya da tura gelebilir. Yani, toplam durum sayısı

$$2 \cdot 2 = 4$$

olur. İstenen olay ise

$$A = \{(Yazı, Tura), (Tura, Yazı)\}$$

durumdur. Yani 2 durum istenen durumdur. O halde, istenen olasılık :

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

Alıştırma 17.6.



Çözüm : Sarı top sayısını S ile gösterelim.

$$P(S) = \frac{\text{Sarı top sayısı}}{\text{Tüm top sayısı}} = \frac{S}{36} = \frac{1}{4} \Rightarrow S = 9$$

olur. Kırmızı topların sayısı $2 \cdot 9 = 18$ ve mavi top sayısı da $36 - 9 - 18 = 9$ olur. Kırmızı olmayan $9 + 9 = 18$ top var. Kırmızı olmayan top çekme olasılığı $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ olur.

Alıştırma 17.7.

Çözüm : a) Toplam top sayısı 24'tür. Üzerinde sarı renk olan top sayısı $10 + 8 = 18$ olduğundan çekilen topun üzerinde sarı renk olma olasılığı

$$P(S) = \frac{\text{Sarı top sayısı}}{\text{Tüm top sayısı}} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}$$

olur.

b) Üzerinde mavi veya kırmızı olan top sayısı $10 + 6 = 16$ olduğundan istenen olasılık

$$P(M \cup K) = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

olur.

c) Üzerinde sarı renk olup, beyaz renk olmayan 10 tane top vardır. O halde istenen olasılık

$$P(S - B) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$$

olur.

Alıştırma 17.8.

Çözüm :

$$1 - \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$$

Alıştırma 17.9. AMC8-2001

Çözüm : İki sayının çarpımının 5'in katı olabilmesi için zarlardan en az bir tanesinin 5 gelmesi yeterlidir. İki sayının çarpımının 5'in katı olma olasılığını hesaplamak için, iki sayının çarpımının 5'in katı olmama olasılığını hesaplayıp 1'den çıkarabiliriz. Her iki zarda da 5 gelmeme olasılığı $\frac{5}{6}$ olduğundan iki zarda da 5 gelmeme olasılığı

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$$

bulunur. O halde, Gelen iki sayının çarpımının 5'in katı olma olasılığı

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

elde edilir.

Alıştırma 17.10.

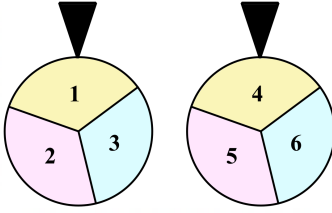
Çözüm : Gümüş madalya alma olasılığı P olsun.

$$P + \frac{6}{11} + \frac{1}{11} = \frac{21}{22} \Rightarrow P = \frac{7}{22}$$

elde edilir.

Aıştırma

17.11. AJHSME-1991



Çözüm : Çarpımın tek sayı gelme olasılığını bulup 1'den çıkararak çift sayı gelme olasılığı bulunabilir. Çarpımın tek sayı gelmesi için her iki durumda da tek sayı gelmelidir. Buna göre istenen olasılık

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

olacağından çarpımın çift olma olasılığı

$$1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

elde edilir.

Birden Fazla Bağımsız Olayın Olasılığı

Aıştırma

17.12.



Çözüm :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

olur.

Aıştırma

17.13.



Çözüm : Toplam 36 durum var. Üst yüze gelen sayıların toplamının 10'dan büyük olduğu durumlar

$$\{(5, 6); (6, 5); (6, 6)\}$$

durumlardır. O halde, istenen olasılık $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ olur.

Aıştırma

17.14.

AMC8-2016



Çözüm : Çekiliş 3 kırmızı veya 2 yeşil top çekilene kadar devam ettiği için, 3 kırmızı top çekebileceğimiz 4 durum vardır.

$$KKK \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10},$$

$$KYKK \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10},$$

$$KKYK \Rightarrow \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

$$YKKK \Rightarrow \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$$

Görüldüğü 4 durumda da istenen olasılık $\frac{1}{10}$ olduğundan 3 kırmızı top çekme olasılığı

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

bulunur.

Karşılaştırmalı Olasılık Soruları

Aıştırma 17.15.



Çözüm : Keloğlan için 6 durum söz konusudur. Cankız için ise $6 \times 6 = 36$ durum söz konusudur. O halde, ikisi de zar attıktan sonra

$$6 \cdot (6 \cdot 6) = 216$$

durum olabilir.

i) Hiç 3 atılmama durumlarının sayısı :

Keloğlan'ın 3 atmadığı 5 durum vardır. Cankız'ın ise 3 atmadığı $5 \cdot 5 = 25$ durum vardır. O halde, $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ durumda ikisinde de 3 gelmemiştir.

ii) 1 tane 3 atılma durumlarının sayısı :

Keloğlan için 1 durum vardır. Cankız için $1 \cdot 5 + 5 \cdot 1 = 10$ durum vardır. (Zarlardan biri 3 iken diğeri 3 dışındakiler olabilir)

O halde, istenen şekilde $125 + 10 = 135$ durum vardır.

İstenen olasılık da

$$\frac{135}{216} = \frac{5}{8}$$

bulunur.

Olasılık Sorularında "ve", "veya" Bağlaçları

Aıştırma 17.16.



Çözüm :

1. Yol : Asal veya tek sayı olanlar $\{1, 2, 3, 5\}$ olduğundan istenen olasılık $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ olur.

2. Yol : Asal olma olasılığı $\{2, 3, 5\}$ için $\frac{3}{6}$, tek sayı olma olasılığı $\{1, 3, 5\}$ için $\frac{3}{6}$, asal ve tek olma olasılığı $\{3, 5\}$ için $\frac{2}{6}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

bulunur.

Aıştırma 17.17.



Çözüm : A kümesinin elemanlarından 33 tanesi 3 ile, 20 tanesi ise 5 ile tam bölünür. 6 tanesi ise her ikisiyle de yani 15 ile tam bölünür.

$$\begin{array}{r|l} 100 & 3 \\ - 9 & \textcircled{33} \\ \hline 10 & \\ - 9 & \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 100 & 5 \\ - 10 & \textcircled{20} \\ \hline 00 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 100 & 15 \\ - 90 & \textcircled{6} \\ \hline 10 & \end{array}$$

???

Buna göre, istenen olasılık :

$$\begin{aligned} P(3 \cup 5) &= P(3) + P(5) - P(3 \cap 5) \\ &= \frac{33}{100} + \frac{20}{100} - \frac{6}{100} \\ &= \frac{47}{100} \end{aligned}$$

elde edilir.

Koşullu Olasılık

Alıştırma

17.18.



Çözüm : Çarpımın negatif sayı olması için çarpılanlardan birinin negatif diğerinin pozitif olması gerekir. Tüm durumların sayısı

$$\binom{4}{1} \binom{3}{1} = 12$$

olur. Bu durumlardan tek olanların sayısını bulmalıyız. Her iki çarpanın da tek olması gerekir. O halde, istenen durumların sayısı $\{-3, -1\}$ sayılarından biri ile $\{1, 3\}$ sayılarından birinin seçilme sayılarının çarpımı kadardır. Bunların sayısı da

$$\binom{2}{1} \binom{2}{1} = 4$$

bulunur. Böylece istenen olasılık

$$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

olur.

KONU SONU TESTİ (Olasılık)

Test 17.1 AMC8-1999



- A) $\frac{7}{12}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{11}{12}$ E) $\frac{5}{12}$

Çözüm : Işığın yeşil olmadığı toplam $5 + 30 = 35$ saniye vardır Buna göre istenen olasılık

$$\frac{35}{60} = \frac{7}{12}$$

bulunur.

Test 17.2



- A) 33 B) 34 C) 43 D) 41 E) 37

Çözüm : Toplam top sayısı $12 + n$ olduğundan mavi top çekme olasılığı

$$\frac{7}{12 + n}$$

ve mavi top çekme olasılığı

$$1 - \frac{7}{12 + n} = \frac{n + 5}{n + 12}$$

olur. Buna göre

$$\frac{n + 5}{n + 12} = \frac{6}{7} \Rightarrow 7n + 35 = 6n + 72 \Rightarrow n = 37$$

bulunur.

Test 17.3 AMC8-2002



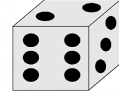
- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{5}{12}$

Çözüm : Ok şans çarkının bir yerinde duracaktır. İki bölgedeki olasılıklar verilmiş. Buna göre geri kalan C bölgesinde durma olasılığı

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

elde edilir.

Test 17.4



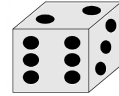
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{5}{12}$

Çözüm : Zarın üzerindeki tek olan sayılar 1, 3 ve 5'tir. O halde, zarın üst yüzüne gelen sayının tek olma olasılığı

$$\frac{\text{Tek olanların sayısı}}{\text{Tüm durum sayısı}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

olur.

Test 17.5



- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm : Zarın üzerindeki 5'ten küçük sayılar 1,2,3,4. O halde, zarın üst yüzüne gelen sayının 5'ten küçük olma olasılığı

$$\frac{\text{5'ten küçüklerin sayısı}}{\text{Tüm durum sayısı}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

olur.

Test 17.6



- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

Çözüm : Toplam 36 durum var. Üst yüzüne gelen sayıların çarpımının 2'nin pozitif kuvveti olduğu durumlar

$$\left\{ \begin{array}{l} (1, 2); (2, 1); (1, 4); (4, 1); \\ (2, 2); (2, 4); (4, 2); (4, 4) \end{array} \right\}$$

durumlardır. O halde, istenen olasılık $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ olur.

Test 17.7

- A) $\frac{13}{25}$ B) $\frac{14}{25}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{18}{25}$ E) $\frac{11}{25}$

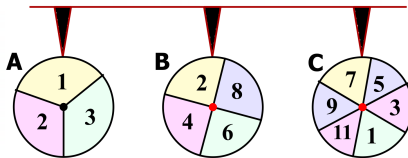
Çözüm : Üzerinde rakamları toplamı 5'ten büyük olmayan sayılar şunlardır:

1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23.

Yani, 25 sayıdan 14 tanesi koşulu sağlarlar. O halde, istenen olasılık

$$\frac{14}{25}$$

elde edilir.

Test 17.8 AMC8-2006

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm : Üçüncü çarkta sadece tek sayılar, ikinci çarkta da sadece çift sayılar olduğundan, gelen üç sayının toplamın tek olması için gelen sayıların

Çift + Çift + Tek

olması durumunda mümkündür. Buna göre, istenen olasılık

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{4} \cdot \frac{6}{6} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Test 17.9 AJHSME-1999

- A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

Çözüm : Çantada n tane yeşil top olsun. Çantadan mavi top çekme olasılığından

$$\frac{6}{n+6} = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 18$$

elde edilir.

Test 17.10

- A) 0 B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{2}$ E) 1

Çözüm : Bir doğal sayının karesinin 4'e bölündüğünde hangi kalanları elde edeceğimizi görelim. Bunun için, ilk dört sayının karesine bakmamız yeterlidir.

$0^2 = 0$ ise 4'e bölündüğünde kalan 0,

$1^2 = 1$ ise 4'e bölündüğünde kalan 1,

$2^2 = 4$ ise 4'e bölündüğünde kalan 0,

$3^2 = 9$ ise 4'e bölündüğünde kalan 1,

Devam ederseniz kalanın ya 0, ya da 1 olduğunu görürsünüz.

O halde istenen olasılık 0'dır.

Test 17.11 AMC8-2009

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

Çözüm : Üç basamaklı sayılar,

$$\{135, 153, 351, 315, 513, 531\}$$

şeklinde. 5 ile bitenler birler basamağı 5 olanlardır. Yani sadece iki tanesi 5 ile bölünebilir. O halde, istenen olasılık

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

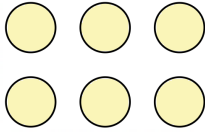
Test 17.12 AJHSME-1987

- A) $\frac{1}{9}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{4}{9}$

Çözüm : Koşulsuz durumda Cengiz 10, Çetin 9 farklı top çekebilir. Yani, 90 farklı olası durum vardır. Biz bu sayıdan toplamaları tek sayı olanları çıkarırsak toplamaları çift sayı olanları buluruz. Toplanan sayının tek olması için toplananlardan birinin tek birinin çift olması gerekir. Buna göre, Cengiz tek sayı çekerse Çetin çift sayı, Cengiz çift sayı çekerse Çetin tek sayı çekmelidir. Bu durumların sayısını bulalım. Cengiz 10 toptan birini çektiğinde toplamın tek olması Çetin'in çekebileceği sadece 5 top vardır. O halde, 50 durumda toplam tek sayı, $90 - 50 = 40$ durumda toplam çift sayı olur. Böylece, istenen olasılık

$$\frac{40}{90} = \frac{4}{9}$$

elde edilir.

Test 17.13 AMC8-2018

- A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{8}{15}$ C) $\frac{1}{6}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

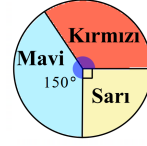
Çözüm : Burada diğer 4 kişinin konumuyla ilgilenmiyoruz. Onların nerede oturduğu göz ardı edilebilir. Alp ve Berk ise bu altı yerden herhangi ikisinde

$$\binom{6}{2} = 15$$

farklı şekilde bulunabilirler. Alp ve Berk'in aynı sırada yan yana olduğu 4 durumu, aynı sütunda yan yana olduğu 3 durum vardır. O halde, istenen olasılık

$$\frac{4+3}{15} = \frac{7}{15}$$

elde edilir.

Test 17.14

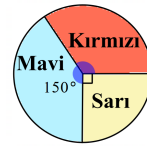
- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{5}{12}$ E) $\frac{7}{16}$

Çözüm :

Mavi bölgedeki açı 360° açının 150° lik kısmıdır ve o halde istenen olasılık

$$\frac{150}{360} = \frac{5}{12}$$

bulunur.

Test 17.15

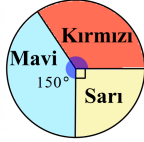
- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

Çözüm :

Sarı veya mavi bölgeyi oluşturan kısım $150 + 90 = 240$ derecelik kısım olduğundan istene olasılık

$$\frac{240}{360} = \frac{2}{3}$$

bulunur.

Test 17.16

- A) $\frac{10}{59}$ B) $\frac{11}{59}$ C) $\frac{12}{59}$ D) $\frac{9}{59}$ E) $\frac{8}{59}$

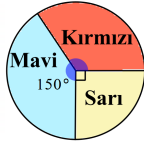
Çözüm :

Bu soruda top sayılarına ihtiyacımız var. 360° lik açının tamamı 60 topu gösteriyorsa 6° lik açısı 1 top gösterir. Buna göre, 150° lik bölgede mavi top olduğundan $\frac{150}{6} = 25$ mavi top, 90° lik bölgede sarı top olduğundan $\frac{90}{6} = 15$ sarı top vardır. İlk mavi top çekme olasılığı $\frac{25}{60}$ ve ikinci mavi top

çekme olasılığı $\frac{24}{59}$ olduğundan istenen olasılık

$$\frac{25}{60} \cdot \frac{24}{59} = \frac{10}{59}$$

bulunur.

Test 17.17

- A) $\frac{25}{118}$ B) $\frac{27}{118}$ C) $\frac{24}{118}$ D) $\frac{30}{118}$ E) $\frac{25}{59}$

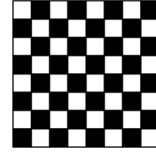
Çözüm :

Bu soruda top sayılarına ihtiyacımız var. 360° lik açının tamamı 60 topu gösteriyorsa 6° lik açısı 1 top gösterir. Buna göre, 150° lik bölgede mavi top olduğundan $\frac{150}{6} = 25$ mavi top, 90° lik bölgede sarı top olduğundan $\frac{90}{6} = 15$ sarı top vardır.

İlk top sarı ikinci top mavi veya ilk top mavi ikinci top sarı olabilir. Buna göre istenen olasılık

$$\frac{15}{60} \cdot \frac{25}{59} + \frac{25}{60} \cdot \frac{15}{59} = \frac{25}{118}$$

bulunur.

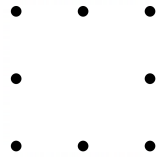
Test 17.18 AMC8-2009

- A) $\frac{7}{16}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{9}{16}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{5}{8}$

Çözüm : Dama tahtasında toplam $8^2 = 64$ birim kare vardır. Dış kenarındaki birim kare sayısı $4(8 - 1) = 28$ ve dış kenarına değmeyen $64 - 28 = 36$ kare vardır. Buna göre bu karelerden birini seçme olasılığı

$$\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

elde edilir.

Test 17.19 AMC8-2008

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{3}{7}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{5}$

Çözüm : 8 noktadan iki noktayı seçmenin $\binom{8}{2} = 28$ yolu vardır. Seçilen iki noktanın yan yana olması durumunda aralarındaki uzaklık 1 br olur. Yani, 8 durum vardır. O halde istenen olasılık

$$\frac{8}{28} = \frac{2}{7}$$

bulunur.

Test 17.20 AMC8-2008

- A) $\frac{11}{50}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{11}{60}$ D) $\frac{13}{60}$ E) $\frac{1}{6}$

Çözüm : Sayıların çarpımı en fazla 60 olabilir. 60'dan küçük tam kareler 1, 4, 9, 16, 25, 36, ve 49'dır. Çarpımları bu tam kareleri veren olası sayı çiftleri aşağıdaki gibidir.

(1, 1); (1, 4); (2, 2); (4, 1); (3, 3); (9, 1);
(4, 4); (8, 2); (5, 5); (6, 6); (9, 4).

Yani, 11 durumda bir tam kare elde edilir. O halde istenen olasılık

$$\frac{11}{60}$$

elde edilir.

Test 17.22 AMC8-2019

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{5}{9}$ C) $\frac{3}{5}$ D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{9}$

Çözüm : Toplamların çift sayı olması için her ikisinde gelen sayının da tek sayı veya her ikisinde de gelen sayının çift sayı olması gerekir.

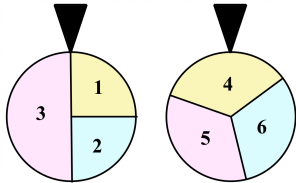
Her ikisinde de gelen sayının çift olma olasılığı : $\frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{9}$ olur.

Her ikisinde de gelen sayının tek olma olasılığı : $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{4}{9}$ olur.

Böylece, her ikisinde de gelen sayıların toplamının çift olma olasılığı

$$\frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

bulunur.

Test 17.21 AJHSME8-1994

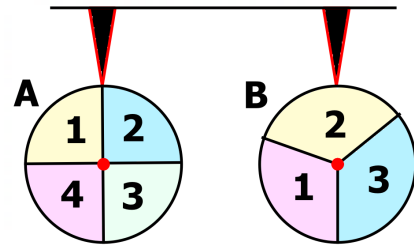
- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm : Toplamın çift olması için ikisinde de tek veya ikisinde de çift sayı gelmesi gerekir. Buna göre,

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$$

İkisi de çift İkisi de tek

bulunur.

Test 17.23 AMC8-2004

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm : Çarpımın tek olması için ikisinde de tek olması durumunda mümkündür. Tek olma olasılığı

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

İkisi de tek

olduğundan çift olma olasılığı

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

bulunur.

Test

17.24 AMC8-2004



- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm : Partide a tane evli çift ve b tane kadın olsun. Rastgele seçilen bir kadının bekar olma olasılığı $\frac{2}{5}$ ise,

$$\frac{b}{a+b} = \frac{2}{5} \Rightarrow 5b = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{2}{3}a$$

olur. Buna göre erkeklerin partideki tüm insanlara oranı

$$\frac{a}{2a+b} = \frac{a}{2a+\frac{2}{3}a} = \frac{3a}{8a} = \frac{3}{8}$$

bulunur.

Test

17.26 AMC8-2002



- A) $\frac{13}{16}$ B) $\frac{11}{16}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{2}{3}$

Çözüm :

3 durum olabilir.

1. **Durum :** 2 yazı - 2 tura için 6 durum vardır.

(2Y ve 2T harfi $\frac{4!}{2!2!} = 6$ farklı şekilde sıralanabilir.)

2. **Durum :** 3 tura- 1 yazı.

(1Y ve 3T harfi $\frac{4!}{1!3!} = 4$ farklı şekilde sıralanabilir.)

2. **Durum :** 4 tura- 0 yazı.

(3T harfi $\frac{4!}{4!} = 1$ farklı şekilde sıralanabilir.)

O halde, turanın yazıdan fazla geldiği durumların sayısı $6 + 4 + 1 = 11$ olur. Tüm durumların sayısı $2^4 = 16$ olduğundan istenen olasılık

$$\frac{11}{16}$$

bulunur.

Test

17.27



Test

17.25 AMC8-2013



- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm : Toplam $2^3 = 8$ olası durum vardır. En az 2 ardışık tura gelme durumları üç farklı şekilde olabilir :

TTT, TTY, YTT

Yani üç durum olabilir. Buna göre istenen olasılık

$$\frac{3}{8}$$

elde edilir.

- A) $\frac{4}{9}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{3}$

Çözüm : Torbadaki top sayısı :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

olarak bulunur. Tek sayı olan topların sayısı da :

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

olduğundan, istenen olasılık

$$\frac{25}{45} = \frac{5}{9}$$

bulunur.

Test 17.28 AMC8-2014

- A) 4'ünün tamamı erkek
 B) 4'ünün tamamı kız
 C) 2'si kız ve 2'si erkek
 D) 3'ü aynı cinsiyetten ve 1'i diğer cinsiyetten
 E) Tüm bu sonuçlar eşit derecede olası

Çözüm :

Her birinin olasılıklarını hesaplayalım.

- A) Tamamının erkek olma olasılığı $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ 'dır.
 B) Tamamının kız olma olasılığı $(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16}$ 'dır.
 C) 2'sinin kız ve 2'sinin erkek olma olasılığını hesaplayalım. Hangi iki bebeğin kız olduğu $(\frac{4}{2})$ farklı şekilde seçilebilir. Geri kalan 2 bebek erkek olur. Buna göre istenen olasılık $(\frac{4}{2}) \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8}$ olur.
 D) D için iki olası durum vardır, 3 kız ve 1 erkek veya 3 erkek ve 1 kız. İlk durumun olasılığını hesaplayalım. 4 bebekten erkek olanı $(\frac{4}{1})$ farklı şekilde seçebiliriz. 3 kız 1 erkek olma olasılığı $(\frac{4}{1}) \cdot (\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4}$ olur. Birinin kız olma olasılığı da aynıdır. $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ olur.
 Sonuç olarak olasılığı en fazla olan D seçeneğinde verilmiştir.

Test 17.29 AMC8-2019

- A) $\frac{6}{25}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{18}$ D) $\frac{3}{25}$ E) $\frac{7}{25}$

Çözüm : Şapka takan kişilerden $\frac{2}{5}$ 'i güneş gözlüğü takıyorsa, şağka ve güneş gözlüğü takan

$$\frac{2}{5} \cdot 35 = 14$$

kişi vardır. Yani, güneş gözlüklü 50 kişiden 14 tanesi şapka takmaktadır. Buna göre, güneş gözlüğü takan biri rastgele seçilirse şağka takma olasılığı

$$\frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

bulunur.

Test 17.30

- A) $\frac{63}{64}$ B) $\frac{15}{16}$ C) $\frac{29}{32}$ D) $\frac{31}{32}$ E) $\frac{61}{64}$

Çözüm : En az bir atışta hedefi vurma olasılığı hesaplamak için 1'den hiç bir atışta hedefi vuramama olasılığını çıkarmamız yeterlidir. Buna göre, 12'den vuramam olasılığı $\frac{1}{4}$ olduğundan istenen olasılık

$$1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{63}{64}$$

bulunur.

Test 17.31 AMC8-2011

- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{12}$ D) $\frac{7}{12}$ E) $\frac{1}{4}$

Çözüm : İki zar atıldığında $6 \cdot 6 = 36$ olası durum oluştur ve bunlardan 6 tanesi aynı ikiliden geri kalan 30 tanesi ise farklı ikiliden oluşur. O halde,

$$30 \div 2 = 15$$

tanesinde birinci gelen sayı, 15 tanesinde de ikinci gelen sayı büyüktür. Soruda, eşit olma durumları da istendiği için istenen olasılık

$$\frac{15 + 6}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

bulunur.

Test 17.32 AMC8-2007

- A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{4}{7}$

Çözüm : Toplam 8 kartın iki tanesi

$$\binom{8}{2} = 28$$

farklı şekilde seçilebilir. Dağıtılan iki kartın aynı iki harf olabileceği 4 durum vardır : $\{(A, A); (B, B); (C, C); (D, D)\}$. Dağıtılan iki kartın aynı renk olduğu $2\binom{4}{2} = 12$ durum vardır. (İki kırmızı kart $\binom{4}{2} = 6$ biçimde, iki yeşil kart $\binom{4}{2} = 6$ biçimde seçilir.)

Buna göre, bir kişinin kazanma olasılığı

$$\frac{4 + 12}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

bulunur.

Test 17.33 AMC8-2018

- A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{4}{7}$

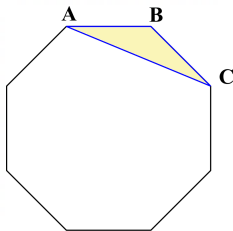
Çözüm :

Sekizgenin herhangi üç köşesi birleştirilerek

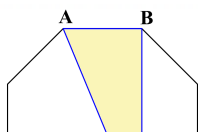
$$\binom{8}{3} = 56$$

üçgen elde edilebilir. Bu üçgenlerden kaçının en az bir kenarının sekizgenin kenarı olduğunu sayalım. İki durum olabilir.

i) Üçgenin iki kenarı sekizgenin kenarı olabilir. Bunun için köşelerin sekizgenin ardışık üç köşesi olması gerekir. Bu ise 8 durumda mümkündür.



ii) Üçgenin bir kenarı sekizgenin kenarı olabilir. Bu durumda ise sekizgenin ardışık iki noktası üçgenin iki köşesi ve bu ardışık noktaya komşu olmayan 4 noktadan biri de üçgenin üçüncü köşesi olabilir. Ardışık iki nokta 8 farklı şekilde, üçgenin son köşesi de $\binom{4}{1} = 4$ farklı şekilde seçilebilir. Yani, bu şekilde $4 \cdot 8 = 32$ üçgen vardır

**Test 17.34 AMC8-2013**

- A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm : Gösterilen jelibonların ikisinin de yeşil veya ikisinin de mavi olması durumunda istenen durum oluşur.

► İkisinin de yeşil jelibonu gösterme olasılıkları :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8},$$

► İkisinin de mavi jelibonu gösterme olasılıkları : $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{4},$

olduğundan istenen olasılık

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

elde edilir.

Test

17.35 AMC8-2014



- A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{5}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{5}{6}$

Çözüm :

1. **Yol.** Ünlülere A, B ve C diyelim. A ünlüsünün bebeklik fotoğrafını doğru seçme olasılığı

$$\frac{1}{3}$$

olur. Geriye iki ünlü ve 2 bebeklik fotoğrafı kaldı. B'nin bebeklik fotoğrafını doğru seçme olasılığı

$$\frac{1}{2}$$

olur. Geriye kalan tek bebeklik fotoğrafı da C'ye ait olur. O halde, istenen olasılık

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

bulunur.

2. **Yol.** $\ddot{U}_1 \rightarrow B_3, \ddot{U}_2 \rightarrow B_1, \ddot{U}_3 \rightarrow B_2$ eşleşmesinin doğru eşleşme olduğunu kabul edelim. $\ddot{U}_1$ 'e karşısına 3 resimden biri yazılabilir. $\ddot{U}_2$ 'nin karşısına kalan 2 resimden biri yazılabilir. Son resim de $\ddot{U}_3$ 'ün karşısına yazılabilir. Böylece 6 farklı şekilde olası eşleştirme vardır. Fakat doğru olan sadece biri. Yani istenen olasılık

$$\frac{1}{6}$$

bulunur.

Test

17.36 AMC8-2015



- A) $\frac{1}{24000}$ B) $\frac{1}{21000}$ C) $\frac{1}{18000}$ D) $\frac{1}{1800}$ E) $\frac{1}{20000}$

Çözüm : Toplam kaç durum olduğunu bulmamız gerekiyor.

İlk sembol için 5 sesli harf seçeneği var.

İkinci sembol için 21 sessiz harf, üçüncü sembol için diğer sessiz harften farklı olması gerektiği için 20 seçenek vardır.

Dördüncü ve son sembol için 10 rakam seçeneği var. O halde toplam durum sayısı

$$5 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 10 = 21000$$

bulunur. Bu nedenle, bir plakada "AMC8" yazma olasılığı

$$\frac{1}{21000}$$

elde edilir.

Test

17.37 AMC8-2007



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{5}{6}$

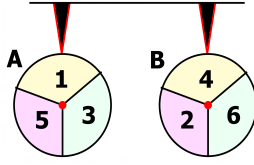
Çözüm : 1, 2, 3 veya 4 rakamlarından üçüyle oluşturulabilecek

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

üç basamaklı sayı vardır. Bu sayılardan 3'ün katı olabilecek olanların sayısını bulalım. Bunun için rakamları toplamının 3'ün katı olması gerekir, bu ise seçilen üç rakamın {1, 2, 3} veya {2, 3, 4} olması durumunda mümkündür. Her biriyle $3! = 6$ sayı oluşturulabilir. O halde istenen olasılık

$$\frac{6+6}{24} = \frac{1}{2}$$

bulunur.

Test 17.38 AMC8-2009

- A) $\frac{5}{7}$ B) $\frac{7}{9}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{4}{9}$

Çözüm : Tüm olası toplamaları hesaplırsak

+	1	3	5
2	3	5	7
4	5	7	9
6	7	9	11

toplam tablosu elde edilir. Bu toplamlardan sadece 9 olanlar, yani iki tanesi asal değildir, dolayısıyla 7 tanesi asaldır ve asal olma olasılığı

$$\frac{7}{9}$$

elde edilir.

Test 17.39 AMC8-2017

- A) $\frac{52}{225}$ B) $\frac{19}{75}$ C) $\frac{56}{225}$ D) $\frac{6}{25}$ E) $\frac{11}{45}$

Çözüm : Seçilebilecek

$$9999 - 1000 + 1 = 9000$$

sayı var. Şimdi bu kümede rakamları farklı kaç tane tek tam sayı olduğunu bulalım. Son rakam tek sayı olmalıdır. Yani 5 seçenek var. Soldan ilk rakam 0 ve birler basamağındaki rakam dışındaki 8 rakam olabilir. İkinci rakam 0 da olabilir. İlk rakam ve birler basamağındaki rakam dışında 8 rakam olabilir. Son olarka üçüncü rakam da 7 rakam olabilir. O halde, bu kümedeki rakamları farklı tek sayıların sayısı

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$$

olur. İstenen olasılık da

$$\frac{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5}{9000} = \frac{56}{225}$$

bulunur.

Test 17.40 AMC8-2016

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{5}{7}$

Çözüm : Çarpımın 0 olabilmesi sadece sayılardan birinin 0 olması durumunda mümkündür. 0'ı seçtikten sonra, ikinci sayıyı geri kalan 5 sayı arasından 5 farklı şekilde seçebiliriz. Bu kümeden herhangi iki sayıyı

$$\binom{6}{2} = 15$$

farklı şekilde seçebileceğimiz için çarpımın 0 olma olasılığı

$$\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

bulunur.

Test 17.41 AMC8-2017

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{7}{10}$

Çözüm : Toplam

$$\binom{5}{3} = 10$$

durum vardır. Seçilen üç kartın içindeki en büyük değerin 4 olması seçilen kartların arasında 5 olmaması ve 4 olması demektir. O halde, 4 dışındaki 2 kart 1, 2, 3 içinden seçilmelidir ve bunu seçme sayısı da

$$\binom{3}{2} = 3$$

olduğundan istenen olasılık

$$\frac{3}{10}$$

bulunur.

Test 17.42

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{3}{5}$

Çözüm : Tam kare sayfalar

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

sayfalarıdır. 100 sayfalık bir kitapta 50 yaprak vardır. Tam karelerin bulunduğu yapraktaki sayfalar

$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{9, 10\}, \{15, 16\}, \{25, 26\}$

$\{35, 36\}, \{49, 50\}, \{63, 64\}, \{81, 82\}, \{99, 100\}$

biçimindedir. Yırtılan bu kitap yaprağının ön ve arkasındaki sayfa numarasının tam kare olma olasılığı

$$\frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

olur.

Test 17.43

- A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{4}{25}$ C) $\frac{3}{25}$ D) $\frac{2}{25}$ E) $\frac{1}{25}$

Çözüm : Tam kare sayfalar

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100

sayfalarıdır. 100 sayfalık bir kitapta 50 yaprak vardır. Tam karelerin bulunduğu yapraktaki sayfalar

$\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{9, 10\}, \{15, 16\}, \{25, 26\}$

$\{35, 36\}, \{49, 50\}, \{63, 64\}, \{81, 82\}, \{99, 100\}$

biçimindedir. Yırtılan bu kitap yaprağının ön ve arkasındaki sayfa numaralarının toplamının 1 fazlasını bulalım.

$\{1, 2\} \rightarrow 4, \quad \{3, 4\} \rightarrow 8, \quad \{9, 10\} \rightarrow 20,$

$\{15, 16\} \rightarrow 32, \quad \{25, 26\} \rightarrow 52, \quad \{35, 36\} \rightarrow 72,$

$\{49, 50\} \rightarrow 100, \quad \{63, 64\} \rightarrow 128,$

$\{81, 82\} \rightarrow 164, \quad \{99, 100\} \rightarrow 200$

Böylece, sadece 4 ve 100 tam kare olduğundan, istenen

olasılık $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ bulunur.

Test 17.44

- A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{3}{10}$ C) $\frac{8}{15}$ D) $\frac{7}{15}$ E) $\frac{7}{10}$

Çözüm : Burada 10 sayı vardır. Herhangi ikisini

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!8!} = 45$$

farklı şekilde seçebiliriz. Tüm durumların sayısı 45 olacaktır. Pozitif çarpımın olması için ya ikisi de pozitif, ya ikisi de negatif seçilmesi gerekir. Negatif 6 sayıdan 2 tanesini

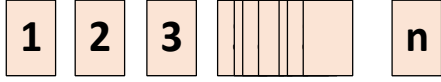
$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = 15$ farklı şekilde, pozitif 4 sayıdan ikisini

ise $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$ farklı şekilde seçebiliriz. Yani, pozitif çarpım olma durumlarının sayısı $15 + 6 = 21$ olur. O halde, istenen olasılık

$$\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

bulunur.

Test 17.45



- A) 12 B) 13 C) 11 D) 14 E) 15

Çözüm : 1, 2, 3, 4, 5, 6 sayılarını göz önüne alalım. Burada 3 tanesi asaldır ve çekilen kartın asal olma olasılığı

$$\frac{1}{2}$$

olduğundan $n = 6$ olabilir. Şimdi, bu 6 sayıya iki sayı daha ekleyelim.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$$

sayılarından da 4 tanesi asaldır ve ekilen kartın asal olma olasılığı yine

$$\frac{1}{2}$$

olur. $n = 8$ 'de olabilir. Bundan sonra, asal olmayan sayılar daima asal sayılardan daha fazla olacaktır. Bunu kanıtlayabiliriz. 2 ve 3 içermeyen herhangi ardışık 6 sayıdan en fazla 2 tanesi asal olabilir. Çünkü, ardışık 6 sayı :

$$6k, 6k + 1, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4, 6k + 5$$

formlarında olacaktır.

$$6k = 2 \cdot 3k,$$

$$6k + 2 = 2(3k + 1),$$

$$6k + 3 = 3(2k + 1),$$

$$6k + 4 = 2(3k + 2)$$

sayıları asal olamaz. Yani, en fazla 2 tanesi asal olabilir. Buna göre, 8'den sonra eklenen sayılar asal sayı çekme olasılığını

$$\frac{1}{2}$$

değerinin altına düşürecek. Örneğin,

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11$$

için olasılık :

$$\frac{5}{11}$$

olacaktır. Sonuç olarak, n sayısı 6 veya 8 olabilir.

Test 17.46



- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

Çözüm : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ kümesinin elamanları kullanılarak rakamları birbirinden farklı

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

sayı yazılabilir. Bunlardan kaç tanesinin çift olduğunu bulalım. Çift olabilmesi için son rakamı 2 veya 4 olmalıdır. Yani birler basamağı 2 farklı rakam olabilir. Buna göre, çift olanların sayısı :

$$3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

bulunur. Çift olanlardan kaç tanesinin yüzler basamağının 3 olduğunu bulalım.

$$1 \cdot 3 \cdot 2 = 6$$

tanesi son rakamı çift ve yüzler basamağı 3 olan üç basamaklı sayıdır. Hatta bunları yazarak görebilirsiniz.

$$312, 314, 324, 242, 352, 354$$

Böylece, torbadan rastgele seçilen bir karttaki sayının çift olduğu biliniyorsa, yüzler basamağındaki rakamın 3 olma olasılığı

$$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Test 17.47

- A) $\frac{7}{18}$ B) $\frac{17}{36}$ C) $\frac{19}{36}$ D) $\frac{5}{18}$ E) $\frac{1}{2}$

Çözüm : İki zar atıldığında $6 \cdot 6 = 36$ sonuç elde edilir. Yani tüm durumların sayısı 36'dır. Zarlardan birinin 6 gelme durumuna A diyelim. Bu durumlar $(1, 6); (2, 6); (3, 6); (4, 6); (5, 6); (6, 6); (6, 1); (6, 2); (6, 3); (6, 4); (6, 5)$ olmak üzere, 11 tanedir. O halde, A durumunun olasılığı $P(A) = \frac{11}{36}$ bulunur. Diğer yandan zarların üst yüzlerine gelen sayıların toplamının 8'den büyük olması durumuna da B dersek, B durumları $(3, 6); (4, 6); (5, 6); (6, 6); (6, 3); (6, 4); (6, 5); (5, 4); (4, 5); (5, 5)$ olmak üzere, 10 tanedir. Buradan, B durumunun olasılığı da, $P(B) = \frac{10}{36}$ olur. Hem A hem de B'nin ortak olduğu durum sayısının 7 olduğu görülüyor.

$(3, 6); (4, 6); (5, 6); (6, 6); (6, 3); (6, 4); (6, 5)$

Bizden, zarlardan herhangi birinin 6 gelmesi **veya** zarların üstündeki sayıları toplamının 8'den büyük olması olasılığı istenmiş. Yani, $P(A \cup B)$ istenmiş. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ eşitliğini kullanacağız. Buradan,

$$P(A \cup B) = \frac{11}{36} + \frac{10}{36} - \frac{7}{36} = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

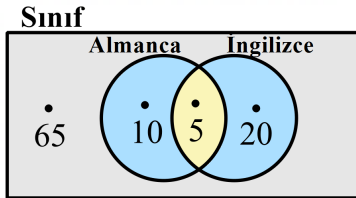
elde edilir.

Test 17.48

- A) $\frac{7}{15}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{4}{15}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{15}$

Çözüm :

Sınıfın mevcudunu 100 kişi alabiliriz. Bu durumda, kümeler aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Seçilen öğrencinin İngilizce konuşmadığı biliniyormuş. Şekilden, İngilizce konuşamayan

$$65 + 10 = 75$$

öğrenci olduğu bulunur. Bu öğrencinin Almanca bilme olasılığı da :

$$\frac{10}{75} = \frac{2}{15}$$

elde edilir.

Test 17.49

- A) $\frac{9}{11}$ B) $\frac{7}{11}$ C) $\frac{5}{11}$ D) $\frac{8}{11}$ E) $\frac{6}{11}$

Çözüm : 11 erkek öğrenci var. 5 tanesi gözlüklü istenen olasılık

$$\frac{5}{11}$$

bulunur.