Prof. Dr. Refail Alizade
Murat Şahin
Yunus Al
Selçuk Sağbaş
Ali Can Güllü

Ortaokul Matematik Olimpiyatlarına Hazırlık Denemeleri (Çözümler)

Altın Nokta Yayınevi

İçindekiler

Önsöz

Uzun yıllardır yapılan matematik yarışmaları hem matematiğe meraklı öğrencileri motive etmekte hem de matematiğin gelişimine büyük katkı sağlamaktadır. Üçüncü dereceden denklemlerin çözümü için üretilen Cardano formülünün de bu yarışmalarda ortaya çıktığı bilinmektedir. Günümüzde birçok ülke kendi ulusal matematik olimpiyatını yaparken aynı zamanda uluslararası organizasyonların sayısı da artış göstermektedir. Uluslararası olimpiyatların günümüz benzeri ilk örneği 1894'te Macaristan'da yapılmış olup daha sonra değişik ülkelerde yapılan yarışmalar geliştirilerek ilki 1959'da Romanya'da yapılan ve hala devam etmekte olan Uluslararası Matematik Olimpiyatı'na dönüşmüştür. Şu anda tüm ülkeler tarafından tanınan bu yarışma Uluslararası Matematik Olimpiyatı (International Mathematical Olympiads) kısaca IMO'dur. Bu yarışmanın Türkiye ayağı da TÜBİTAK tarafından yapılan Ulusal Matematik Olimpiyatı (UMO)'dır.

TÜBİTAK Matematik Olimpiyatları iki aşamada yapılmaktadır. Birinci aşama çoktan seçmeli olup nisan, mayıs veya haziran ayında yapılır. Bu sınavda başarılı olan yaklaşık 60 lise ve 50 ortaokul öğrencisi ağustos sonu veya eylül başında yapılan yaz kampına katılır. Bu kamplarda alanında uzman üniversite öğretim üyelerinden dersler alarak kasım veya aralık ayında yapılan ikinci aşama sınavına hazırlanan öğrenciler madalya için mücadele verirler. Burada başarılı öğrencilere 4 altın, 8 gümüş ve 12 bronz madalya verilir. Madalya kazanan öğrenciler mühendislik ve matematik dallarında üniversite giriş sınavında ek puan, para ödülü ve yüksek öğrenimleri boyunca TÜBİTAK'tan burs kazanırlar. Madalya alan öğrenciler kış kampına katılma hakkı kazanırlar. Kış kampındaki her öğrenci milli takımda olmak için ciddi birer adaydır. Kış kampı ve devamındaki süreçte, nisan ayında yapılan takım seçme sınavı sonucu belirlenen milli takımın 6 asil ve 3 yedek üyesi mayıs, haziran ve temmuz aylarında yapılan takım kamplarında uzun bir eğitim aldıktan sonra temmuz ayının ortalarında yapılan ve şu anda 111 ülkenin katıldığı IMO da ülkemizi temsilen katılır. Bu yarışmada katılımcıların yarısına yakınına madalya dağıtılır. Ülkemize madalya ile dönen öğrenciler maddi ödüller ve bursların yanı sıra matematik ve mühendislik dallarında devlet üniversitelerine sınavsız alınma hakkı kazanırlar. Sonunda bir madalya alamasa da bir matematik olimpiyatçısının birçok kazanımı olacaktır. Matematiksel düşünme ve problem çözmede gelişen öğrenciler diğer branşları anlama ve başarma noktasında da avantajlı olacaktır. Matematikte yetenekli ve hevesli öğrenciler için matematik olimpiyatlarının en doğru adreslerden biri olduğu da unutulmamalıdır.

Bu kitapta 15 tane TÜBİTAK Ortaokul Matematik Olimpiyatları birinci aşama deneme sınavı yer almaktadır. Sınavlar kolaydan zora doğru, her sınavın soruları da kendi içinde kolaydan zora doğru sıralanmıştır. Gerçek sınavda olduğu gibi her sayfada sorular Geometri, Sayılar Teorisi, Analiz-Cebir ve Sonlu Matematik olarak sıralanmıştır. Tavsiyemiz önce denemelerin sınavda olduğu gibi 3 saat içinde yapılması, yanlış yapılan ve boş bırakılan sorularla yeniden uğraşılması ve daha sonra yapılamayan soruların çözümlerinin incelenmesidir. Bunu yaparken tüm soruların çözümlerini incelemek de faydalı olacaktır. Farklı çözüm yöntemleri görmek öğrencilerimizin gelişimine büyük katkı sağlayacaktır. Kitabın tamamının PDF çözümlerine `www.altinkarne.com` adresi üzerinden ulaşabilirsiniz. Kitabımızın ülkemiz adına yararlı olması dileklerimizle.

Bu kitabın hazırlanmasında emeği geçen Prof. Dr. Mustafa Özdemir'e, Dr. Cemal Çiçek'e, Murat Yoğurtçu'ya, Altın Nokta Yayınevi genel yayın yönetmeni Halil İbrahim Akçetin'e ve kitabın dizgisini LaTeX'le yapan Zafer Acar'a teşekkür ederiz.

Deneme 1

1. $\overset{\triangle}{ABK} = \overset{\triangle}{AB'K}$ olduğundan $|AB| = |AB'| = |B'C|$ olur. $m(\widehat{KAB'}) = m(\widehat{BAK}) = 40°$, $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{AB'K}) = 50°$, $|AB'| = |B'C|$ olduğundan $m(\widehat{ACB}) = 25°$'dir.

Cevap: b

2. $x \in \mathbb{N}$ ve $\frac{x+10}{x-10} \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 + \frac{20}{x-10} \in \mathbb{N} \Rightarrow x - 10 = 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20 \Rightarrow 6$ tane

Cevap: c

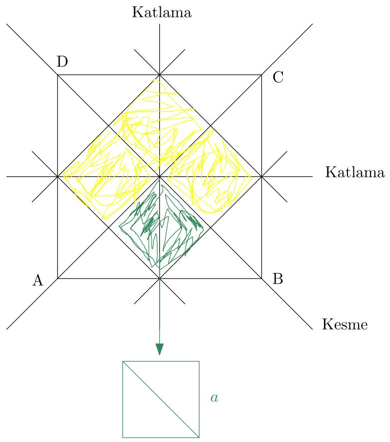
3. Yazı olanların sayısı x ve tura olanların sayısı $100 - x$ olsun. Yazılardan a tane ve turalardan b tane ters çevrilmiş olsun. Son durumda $x - a + b$ tane yazı ve $100 - x - b + a$ tane tura vardır. $100 - x + x - a + b = 104 \Rightarrow b - a = 4$ bulunur. $a + b = 20$ olduğu bilindiğinden $a = 12$ ve $b = 8$ olur. Ters çevrilmiş paralardan 8 tanesi yazıdır.

Cevap: b

4. 10 tane ikişerli olarak birleştirildiğinde 5 doğru elde edilir. Bu işlemden sonra artık soruyu 5 doğru düzlemi en fazla kaç bölgeye ayırır şeklinde sorabiliriz. Adım adım ilerlersek 1 doğru düzlemi iki bölgeye, 2 doğru düzlemi 4 bölgeye, 3 doğru düzlemi 7 bölgeye ayırır. Dikkat edilirse her çizilen doğru için bölge sayısı o doğrunun kestiği doğru sayısından bir fazla olacak şekilde artmaktadır. Buna göre, 4 doğru düzlemi 11 bölgeye ve 5 doğru düzlemi 16 bölgeye ayırır.

Cevap: d

5.



Oluşan 4 tane eş kareden biri

$a^2 = 18 \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$. Köşegen uzunluğu 6, başlangıçtaki karenin bir kenarı 12, çevre 48 cm olur.

Cevap: d

6. $a < b < c$ olsun.

$$\begin{aligned}
&1.\text{ sayı} = abc \longrightarrow 468+\\
&2.\text{ sayı} = acb \longrightarrow 486+\\
&3.\text{ sayı} = bac \longrightarrow 648+\\
&4.\text{ sayı} = bca \longrightarrow 684-\\
&5.\text{ sayı} = cab \longrightarrow 846+\\
&6.\text{ sayı} = cba \longrightarrow 864-
\end{aligned}$$

Bu durumda 4 ifade doğru olur. Rakamlardan en az bir tanesi tek sayı ise 5 ifadenin doğru olması koşullar gereği mümkün değildir.

Cevap: c

7. $B = 2021$ ise $2020 = B - 1$, $2019 = B - 2$, $4036 = 2B - 6$ ve $2017 = B - 4$ olur. Bu eşitlikler ilk denklemde yerine yazılarak ifade düzenlenirse

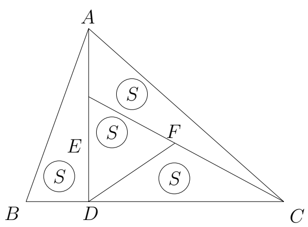
$$\begin{aligned}
&A = B^4 - (B-1)\cdot B^3 - (B-2)\cdot B^2 - (2B-6)\cdot B - (B-4)\\
&A = B^4 - B^4 + B^3 - B^3 + 2B^2 - 2B^2 + 6B - B + 4\\
&A = 5B + 4 \Rightarrow \frac{A-4}{B} = 5 \text{ elde edilir.}
\end{aligned}$$

Cevap: e

8. $2, 3, 5, 7$ rakamları kullanılarak $22, 23, 25, \ldots, 77$ olmak üzere 16 tane iki basamaklı sayı yazılabilir. Bu sayılar 3 ile bölümlerinden kalanlarına göre 3 farklı gruba ayrılabilir. $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $3k$ şartını sağlayanlar 5 tane, $3k+1$ şartını sağlayanlar 6 tane, $3k+2$ şartını sağlayanlar 5 tanedir. İstenen durumun sağlanması için $3k$ şartını sağlayan kartlardan 2 tane veya $3k+1$ ve $3k+2$ şartını sağlayan kartlardan birer tane seçilmelidir. İlk durumda $5 \cdot 4 = 20$, ikinci durumda $6 \cdot 5 + 5 \cdot 6 = 60$ farklı durum vardır. Tüm durumların sayısı ise $16 \cdot 15 = 240$ olur. İstenen olasılık $\frac{20+60}{240} = \frac{1}{3}$ olarak bulunur.

Cevap: b

9.



Yükseklikleri eşit üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olduğundan $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{A(\overset{\triangle}{ABD})}{A(\overset{\triangle}{ADC})} = \frac{1}{3}$ olur. Benzer şekilde $\frac{|EF|}{|DC|} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{|ED|}{|AE|} = 2$ olur. Bu eşitlikler istenen ifadede yerlerine yazılırsa $2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3$ bulunur.

Cevap: c

10. Tam kare sayıların tek sayıda pozitif tam sayı böleni vardır. $\left(20^{10}\right)^2 \longrightarrow (4 \cdot 5)^{10} = 2^{20} \cdot 5^{10} \longrightarrow$ $21 \cdot 11 = 231$ tane tam kare bölen vardır.

Cevap: d

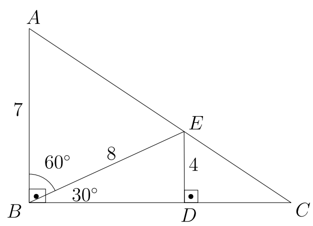
11. Sırasıyla pazartesiden itibaren cumaya kadar tuttuğu balık sayıları a_1, a_2, a_3, a_4 ve a_5 olsun. $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5$ ve $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 100$. $a_5 = 0$ alınırsa $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 100$ ve en büyük sayının alabileceği en küçük değeri bulmak için eşitlik durumu alınırsa $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 25$ olur. $a_1 + a_3 + a_5 = 50$ bulunur.

Cevap: b

12. Öncelikle bazı sayılar için deneyelim. 1'den 10'a 3 kere 3 ekleyerek ulaşılabilir. 2'ye 3 eklenerek 5'e ve 5'e de 5 ile bölünerek 1'e ve dolayısıyla 10'a ulaşılabilir. 3'e 3 ekleyerek 15'e ulaşılır o da 5 ile bölünürse 3'e tekrar ulaşılır, bu da bir döngü oluşturur. Buradan anlaşıldığı gibi sadece 3'ün katlarında 10'a ulaşamayız. İki basamaklı sayılarda da aynı sistem devam eder. Bu durumda 12, 15, ..., 99 sayıları için 10'a ulaşılamaz. Cevap 30 sayı olur.

Cevap: c

13.



E'den BC'ye inilen dikme ayağı D olsun. $|ED| = \frac{|BE|}{2} = 4$ olur. $[ED] \parallel [AB]$ olduğundan benzerlik kullanılarak $\frac{|ED|}{|AB|} = \frac{4}{7}$ ve $\frac{|CE|}{|AE|} = \frac{4}{3}$ bulunur.

Cevap: c

14. 4 ile bölünebilmesi için son iki basamak için 3 durum vardır (0, 4, 8).
$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1 = 2700$ tane sayı 4'ün katıdır. 36'nın katı olması için 9'a da bölünebilmesi gerekir. Her dokuz sayıdan sadece 1 tanesi 9'a bölüneceğinden koşulları sağlayan $2700/9 = 300$ tane sayı yazılabilir.

Cevap: a

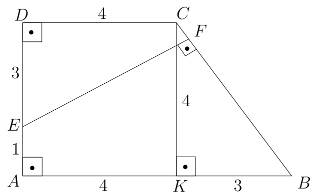
15. Ali'nin 13. kabinden sonra 12. kabinle karşılaşma süresi göz önüne alınırsa iki kabin arasındaki mesafenin 30 sn olduğu görülür. 42. kabin ile 12. kabin arasında $43, 44, \ldots, 99, 1, 2, \ldots, 11$ numaralı kabinler vardır. Bu da toplamda 68 kabin yapar. 42. kabinle zirve arasında $68 \div 2 = 34$ kabin ve 15 sn vardır. Bu durumda Ali 12 nolu kabinle karşılaştıktan $34 \cdot 30 + 15 = 1035$ saniye sonra zirveye varır.

Cevap: c

16. İlk kavanozda x tane ve son kavanozda $x+y$ tane böcek koymuş olsun. Verilen şartı kullanırsak $x \geq \frac{x+y}{2}$ ve $x \geq y$ elde edilir. $y \geq 9$ olduğundan (10 kavanoz var ve her birinde öncekinden fazla böcek var) $x \geq 9$ olmalıdır. $x \geq 11$ alınırsa kavanozlardaki böcek sayılarının toplamı 150'yi geçer. $x = 9$ için kavanozlardaki böcek sayıları $9, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20$ olur. $9 \geq \frac{20}{2}$ verilen şartı sağlamadığından $x = 10$ için böcek sayıları $10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20$ bulunur. 6. kavanozdaki böcek sayısı 16 bulunur.

Cevap: d

17.



$ABCD$ bir dik yamuktur. E'den BC'ye inilen dikme ayağı F olsun. İstenen $|EF|$'dir. C'den AB'ye inilen dikme ayağı K olmak üzere $|KC| = 4$, $|KB| = |AB| - |AK| = 7 - 4 = 3$'tür. CKB dik üçgeninde Pisagor teoreminden $|BC| = 5$ olur. $A(ABCD) = A(EDC) + A(CEB) + A(EAB) \Rightarrow \frac{(7+4)\cdot 4}{2} = \frac{3\cdot 4}{2} + \frac{|EF|\cdot 5}{2} + \frac{1\cdot 7}{2} \Rightarrow |EF| = 5$ bulunur.

Cevap: d

18. $xy + x - 2y = 12 \Rightarrow x(y+1) - 2(y+1) = 10 \Rightarrow (x-2)\cdot(y+1) = 10$ bulunur.

$x-2$	$y+1$	x	y	$x \cdot y$
10	1	12	0	0
-10	-1	-8	-2	16
5	2	7	1	7
-5	-2	-3	-3	9
2	5	4	4	16
-2	-5	0	-6	0
1	10	3	9	27
-1	-10	1	-11	-11

Dolayısıyla $x \cdot y = 0, 16, 7, 9, 27$ ve -11 değerlerini alabilir. 6 durum vardır.

Cevap: c

19. İfade aşağıdaki şekildeki gibi düzenlenerek çarpanlarına ayrılırsa

$$\frac{4^2 - 2^2}{2^2 - 1^2} \cdot \frac{6^2 - 4^2}{3^2 - 2^2} \cdots \frac{22^2 - 20^2}{11^2 - 10^2}$$
$$\frac{2\cdot 6}{1\cdot 3} \cdot \frac{2\cdot 10}{1\cdot 5} \cdots \frac{2\cdot 42}{1\cdot 21}$$

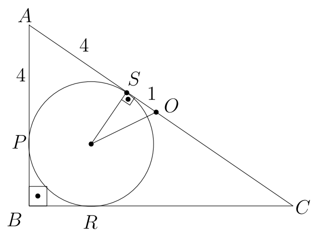
$\underbrace{4\cdot 4\cdot 4 \cdots 4}_{\text{10 tane}} = 4^{10} = 2^{20}$ elde edilir.

Cevap: b

20. Başlangıçta Anıl, Bora ve Can'daki pırlantaların toplam ağırlığı sırasıyla a, b ve c karat sayıları ise sırasıyla 12, 12 ve x tane olsun. Başlangıçta ortalama ağırlıkları $\frac{a}{12}$, $\frac{b}{12}$ ve $\frac{c}{x}$ olur. Çalınan pırlantaların ağırlıkları sırasıyla a_1, b_1 ve c_1 olsun. Buna göre denklemleri ifade edersek $\frac{a-a_1+b}{12} = \frac{a}{12} - 1$, $\frac{b-b_1+c_1}{12} = \frac{b}{12} - 2$, $\frac{c-c_1+a_1}{x} = \frac{c}{x} + 4$ elde ederiz. Bu denklemleri düzenlersek; $a_1 - b_1 = 12, b_1 - c_1 = 24$ ve $a_1 - c_1 = 4x$ olur. İlk iki denklemden $a_1 - c_1 = 36 = 4x$ ve $x = 9$ bulunur.

Cevap: a

21.



Kenarlarına eşit uzaklıktaki nokta iç teğet çemberin merkezi ve köşelere eşit uzaklıktaki nokta çevrel çemberin merkezidir. Üçgen Pisagor teoremini sağladığı için dik üçgendir. Hipotenüsün orta noktası çevrel çemberin merkezidir. $|AB| = 6$, $|BC| = 8$ ve $|AC| = 10$ olsun. $|AO| = |OC| = 5$, $|AP| = |AS| = u - |BC| = 12 - 8 = 4$. $|OS| = |AO| - |AS| = 5 - 4 = 1$, $A(\overset{\triangle}{ABC}) = u \cdot r$ kullanılırsa $\frac{6 \cdot 8}{2} = 12r$ ve $|IS| = r = 2$ olur. IOS dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $|IO| = \sqrt{5}$ bulunur.

Cevap: b

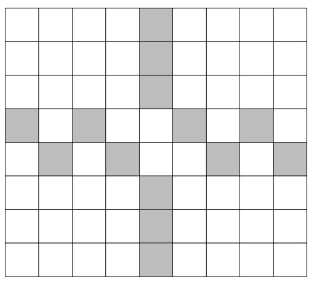
22. $2020 = 101 \cdot 20$ olduğundan $20^{20} \equiv 0 \pmod{20}$'dir. Buna göre, $20^{20} = \left(20^2\right)^{10} = 400^{10} \equiv (-4)^{10} \equiv \left(2^{10}\right)^2 \equiv (1024)^2 \equiv 14^2 \equiv 196 \equiv 95 \pmod{101}$. O zaman aranan kalan $101k + 95, k \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 101k + 95 \equiv 0 \pmod{20} \Rightarrow k + 15 \equiv 0 \pmod{20} \Rightarrow k = 5$ olmalı. Kalan $505 + 95 = 600$ bulunur.

Cevap: e

23. $a = b$ ve $c = 2a$ alınırsa $\frac{b}{a} = 1$, $\frac{c}{b} = 2$ ve $\frac{a}{c} = \frac{1}{2}$ olur ve istenen toplam $1 + 2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ bulunur.

Cevap: c

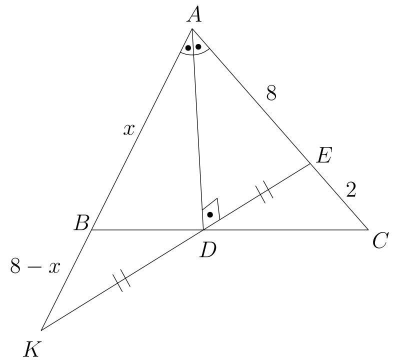
24.



Yukarıdaki 8×9 boyutlu tablodaki gibi işaretleme yapılırsa istenen durum sağlanmış olur. En az 14 tane işaretlenmeli.

Cevap: c

25.



$AB \cap DE = \{K\}$ olsun. $\overset{\triangle}{KAE}$'ni ikizkenar üçgendir. $|AK| = |AE| = 8$ ve $|KD| = |DE|$ olur. $|AB| = x$ ve $|KB| = 8 - x$ diyelim. C noktasından başlayarak Menaleus teoremi uygulayalım. $\frac{2}{10} \cdot \frac{x}{8-x} \cdot 1 = 1 \Rightarrow x = \frac{20}{3}$ bulunur.

Cevap: c

26. $7^m > 0$ olduğundan $n \geq 4$ olmalı ve $2^n - 7^m = 9$ denklemini (mod 3)'te inceleyelim. $2^n \equiv 1 \pmod 3$ olduğundan $n = 2k, k \in \mathbb{Z}^+$ olmalıdır. $2^{2k} - 9 = 7^n \Rightarrow \left(2^k - 3\right)\left(2^k + 3\right) = 7^n$ olduğundan $2^k - 3$ ve $2^k + 3$ çarpanları 7'nin kuvvetleri olmalı. $k \geq 3$ için bu çarpanları (mod 8)'de incelediğimizde çarpanların 7'nin kuvveti olamayacağı görülür. O zaman $k = 0, 1$ ve 2 değerleri için çözüm arandığında sadece $k = 2$ için çözüm gelir. $n = 4$ ve $m = 1$ bulunur. $(n, m) = (4, 1)$ şeklinde bir tane çözüm vardır.

Cevap: b

27. Verilen ifadeleri taraf tarafa çıkaralım.

$$\begin{array}{r} a^{11} + a^7 + a^3 = 1 \\ -\quad a^4 + a^3 = a^n + 1 \\ \hline a^{11} + a^7 - a^4 = -a^n \\ a^{11} + a^7 + a^n = a^4 \\ a^7 + a^3 + a^{n-4} = 1 \end{array}$$

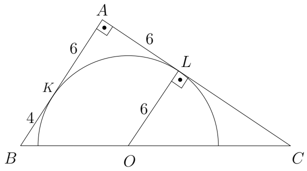
Soruda verilen ilk eşitlik göz önüne alınırsa $a^{n-4} = a^{11}$ olduğundan $n - 4 = 11 \Rightarrow n = 15$ bulunur.

Cevap: e

28. Bu 8 kişiye $a_1, a_2, \ldots, a_8$ diyelim. Sadece a_1'i düşünecek olursak en çok 3 nöbet tutabilir. Bunlar $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_4, a_5), (a_1, a_6, a_7)$ tutabilir. Toplamda 8 kişi olduğundan $8 \cdot 3 = 24$ nöbet grubu olur fakat her nöbeti 3 kişi için saydığımızdan $24 : 3 = 8$ gün nöbet tutabilirler. Örnek durum $(a_1, a_2, a_3), (a_1, a_4, a_5), (a_1, a_6, a_7), (a_8, a_2, a_4), (a_8, a_5, a_6), (a_8, a_3, a_7), (a_2, a_5, a_7), (a_3, a_4, a_6)$ olabilir.

Cevap: c

29.



$|AK| = |AL| = 6$ olur. $OL \perp AC$'dir. $OL \parallel AB$ olduğundan Thales teoremi kullanılırsa $|LC| = x$ denilirse $\frac{x}{x+6} = \frac{6}{10}$ olduğundan $x = 9$ ve $|AC| = 6 + 9 = 15$ bulunur.

Cevap: b

30. $p^5 - 16p^2 + 8pq - q^2 = 2q^2 \Rightarrow p^5 - 16p^2 + 8pq = 3q^2 \Rightarrow$
$p\left(p^4 - 16p + 8q\right) = 3 \cdot q^2 \Rightarrow p = q$ veya $p = 3$ olmalı.
$p = q \Rightarrow p^4 - 16p + 8p = 3p \Rightarrow p^4 = 11p \Rightarrow p^3 = 11$ olduğundan çözüm gelmez.
$p = 3 \Rightarrow 3^4 - 16 \cdot 3 + 8 \cdot 9 = q^2 \Rightarrow q^2 - 8q - 33 = 0 \Rightarrow (q - 11)(q + 3) = 0$ olduğundan $q = 11$ bulunur.
O zaman sadece $(p, q) = (3, 11)$ ikilisi çözümdür.

Cevap: b

31. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = F_n$ olsun. $\frac{a_n}{a_{n-1}} = F_{n-1}$ olur ve $F_n = F_{n-1}$ olduğundan F_n sabit olur. $F_n = c$ olsun. $a_{n+1} = c \cdot a_n$, $a_n = a_{n-1} \cdot c$ olduğundan $a_2 + a_{2014} = c \cdot a_1 + c^{2013} \cdot a_1$ ve $a_8 + a_{2020} = c^7 \cdot a_1 + c^{2019} \cdot a_1$ ifadeleri oranlanırsa $\frac{c + c^{2013}}{c^7 + c^{2019}} = \frac{1}{c^6}$ ve $\frac{1}{c} = \frac{a_1}{a_2}$ olduğundan $\frac{1}{c^6} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^6 = \frac{8}{9}$ bulunur.

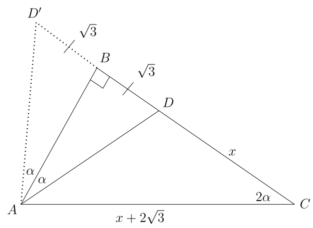
Cevap: a

32. Turnuvaya katılan herkes $n + 1$ maç yapmıştır. Bu da toplamda $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ maç yapılmış demektir. Her maç 1 puan dağıtıldığından toplam dağıtılan puan yapılan maç sayısı kadardır. Her kız eşit ve x puan almış olsun. Bu durumda toplam puan $n \cdot x + 8 = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ olur. Denklem düzenlenirse, $n \cdot (2x) + 16 = n^2 + 3n + 2$ ve $2x = \frac{n^2+3n-14}{n}$. $2x = n + 3 - \frac{14}{n} (2x \in \mathbb{Z})$ olduğundan $n = 7$ ve $n = 14$ değerini alabilir. Toplam $7 + 14 = 21$ bulunur.

Cevap: d

Deneme 2

1.



ABD üçgeninin AB'ye göre yansıması ABD' üçgeni olsun. $\overset{\triangle}{ABD}=\overset{\triangle}{ABD'}$ olur. $m(\widehat{DAB})=m(\widehat{BAD})=\alpha$ ve $m(\widehat{ACB})=2\alpha$ olsun. $m(\widehat{AD'B})=m(\widehat{D'AC})=90-\alpha$ olduğundan $|CD'|=|AC|$'dir. $|AC|-|DC|=x+2\sqrt{3}-x=2\sqrt{3}$ bulunur.

Cevap: c

2.

$$\begin{array}{cccccl} 5x & 5y & 5z & 5t & 5k & \Rightarrow \text{hepsi 5'in katı} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 20x & 20y & 20z & 20t & 5k & \Rightarrow \text{4 tanesi 4 ve 5'in katı} \\ 20x & 20y & 60z & 60t & 15k & \Rightarrow \text{3 tanesi 3 ve 5'in katı} \\ 20 & 40 & 60 & 120 & 15 & \end{array}$$

İstenen okul numarası 120 bulunur.

Cevap: b

3. Verilen ifadeyi şu şekilde düzenleyelim.

$$\frac{x-a-b}{c}-1+\frac{x-b-c}{a}-1+\frac{x-c-a}{b}-1=0$$
$$(x-a-b-c)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=0$$

bulunur. a,b ve c pozitif sayılar olduğundan $x-a-b-c=0$ ve $x=a+b+c$ bulunur.

Cevap: c

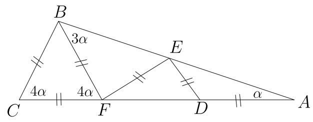
4. İlk yüz sayma sayının yazımında 0 (sıfır) hariç her rakam tam olarak 20 defa kullanılmıştır ve her rakam 19 sayıda bulunur (11, 22, ..., 99'dan dolayı).

1. durumdan dolayı $1, 10, 11, 12, \ldots, 19, 21, 31, \ldots, 81, 91$ silinmemiştir.

2. durumdan dolayı $2, 12, 20, 21, 22, \ldots, 29, 32, \ldots, 92$ sayılarından 1 tanesi silinmiştir (21 silinmez). $20+19-2=37$ (12 ve 21 iki defa sayıldı). Ayrıca 30 tanede içinde 1 ve 2 olmayan sayı kaldığından kalan sayı adedi $37+30=67$ ve silinen sayı adedi $100-67=33$ bulunur.

Cevap: c

5.



ABC üçgeninde verilen bilgilere uygun çizim yapılırsa $|AD| = |DE| = |FE| = |BF| = |BC| = |CF|$ olduğu görülür. Açı takibi yapılırsa $m(\widehat{A}) = \alpha$, $m(\widehat{FBA}) = 3\alpha$ ve $m(\widehat{BCF}) = m(\widehat{BFC}) = 4\alpha$ bulunur. $\overset{\triangle}{BCF}$'ni $4\alpha = 60 \Rightarrow m(\widehat{ABF}) = 3\alpha = 45$'tir.

Cevap: e

6. $n = 40$ için $40^2 + 40 + 41 = 40(40+1) + 41 = 41 \cdot 40 + 41 = 41 \cdot (40+1) = 41^2$.
(20 için 461 asal, 23 için 593 asal, 29 için 911 asal, 42 için 1847)

Cevap: d

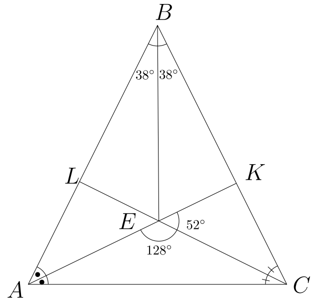
7. a ve b'nin asal sayı olduğunu biliyoruz. $2, 3, 5, 7$ sayılarından a ve b sayıları seçmemiz isteniyor fakat bu sayıların 4 fazlaları da asal sayı olmalı. $(a, b) = (3, 7)$ veya $(a, b) = (7, 3)$ olabilir. $(a, b) = (3, 7)$ olursa baba $ab = 37$ yaşında olur. 4 yıl sonra $(a+4, b+4) = (7, 11)$ asal durumu sağlanır baba da $37 + 4 = 41$ yaşında olur. 2022 yılındaki yaşları toplamı $5 + 9 + 39 = 53$ bulunur.

Cevap: b

8. Tahtadaki sayılar $2, 3, 4, \ldots, 39, 40$'dır. Önce 1 ₺'ye 2 sayısını siliyoruz. Böylece 2'nin katlarını yani tüm çift sayıları silebiliyoruz. Silinmiş her sayının bölenlerini de siliyoruz. Yani 30 sayısını silince 3, 5, 15 gibi tek sayılar da siliniyor. 3 ve 5 silinince bu sayıların katları olan 21, 25, 27, 35 ve 39 sayıları da siliniyor. Geriye 23, 29, 31, 37 sayıları kalıyor. Bunların her birini silmek için 1 ₺ kullanırsak toplamda 5 ₺'ye bütün sayıları silmiş oluruz.

Cevap: b

9.



E noktası ABC üçgeninin iç açıortaylarının kesim noktası yani iç teğet çemberinin merkezidir. $[EB]$ açıortaydır. $m(\widehat{EBK}) = \frac{76}{2} = 38$'dir. $m(\widehat{AEC}) = 90° + \frac{76°}{2} = 128°$ ve $m(\widehat{KEC}) = 180 - 128 = 52°$. İstenen toplam $38 + 52 = 90$ bulunur.

Cevap: d

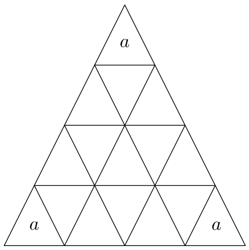
10. 11 ile bölümünden kalan 7 ise 55 ile bölümünden kalan $7, 18, 29$, 40 ve 51 değerlerinden biri olabilir. 5 ile bölündüğünde 3 kalanını verdiğinden k değeri 18 bulunur. Aranan sayı $55 \cdot 2 + 18 = 128$ bulunur. 128'in 18 ile bölümünden kalan 2'dir.

Cevap: c

11. Verilen süreler için ekok hesaplayalım. $\text{Ekok}(20, 32, 80) = 160$ bulunur. Cep telefonunun bataryasının gücü 160 birim olsun. 1 saatte konuşma için $160/20 = 8$, internet için $160/32 = 5$, bekleme için $160/80 = 2$ birim enerji harcar. Yarı dolu şarj 80 birimdir. Her bir durum t saat sürdüyse $8t + 5t + 2t = 80 \Rightarrow t = \frac{16}{3}$ olur. Yolculuk $3t$ saat sürdüğünden trende geçen toplam süre $\frac{16}{3} \cdot 3 = 16$ bulunur.

Cevap: d

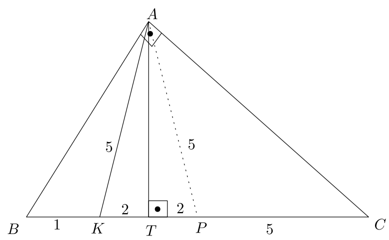
12.



Köşelerdeki üçgenlerde yazan sayılar asal olmalı. a asal sayı olsun. Diğer üçgenlerde yazan sayıları ≥ 1 kabul edelim. 7 üçgenli bir satırın toplamı $5 + 2a \geq 9$ olmalı. Yani en küçük 11 olabilir. Buradan $a = 3$ bulunur. $a = 3$ için her satırdaki sayıların toplamının asal olduğu görülür. Tüm toplam 22 bulunur.

Cevap: b

13.



BC kenarının orta noktası P olsun. $|BP| = |PC| = |AP|$ olur (Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay). $|KP| = 4$ ve $|AK| = |AP| = 5$ olur. KAP ikizkenar üçgeninde A'dan çizilen dikme ayağı T olmak üzere $|KT| = |TP| = 2$ olur. Sırasıyla ATK ve ATB dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa $|AT| = \sqrt{21}$ ve $|AB| = \sqrt{30}$ bulunur.

Cevap: c

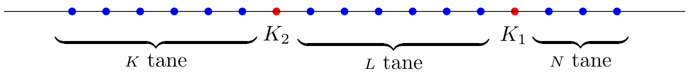
14. 5'in kuvvetleri incelendiğinde $5^9 \equiv 1 \pmod{19}$ bulunur. Buradan hareketle $2020^5 + 5^{2020} \equiv 6^5 + 5^{9 \cdot 424} \cdot 5^4 \equiv 5 + 17 \equiv 3(\text{mod} 18)$ bulunur.

Cevap: d

15. Şirketin ihtiyacı olan araç sayısı x olsun. Herhangi bir gün 12 araç trafikte olacağına göre $x-12$ araç yasaklı durumdadır. Toplam yasak sayısı $7(x-12)=3x$ (Her bir araç için 3 gün yasak var). Denklem düzenlenirse $x=21$ bulunur.

Cevap: c

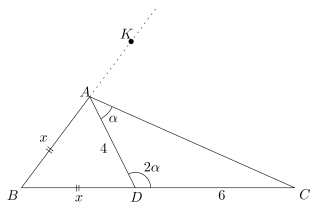
16. Doğru üzerindeki kırmızı noktalar K_1 ve K_2 olsun.



K_1'i içeren tanıma uyan $N\cdot(K+L)$ tane, K_2'yi içeren tanıma uyan $K\cdot(L+N)$ tane doğru parçası vardır. Bunlardan biri 56 diğeri ise 50 adettir. $N\cdot(K+L)=56$ ve $K\cdot(L+N)=50$ alalım. Denklemler tam sayılarda çözülürse $N=7$, $L=3$ ve $K=5$ bulunur. $n=7+3+5=15$ olur.

Cevap: e

17.



$[BA$ üzerinde bir K noktasının alınarak $m(\widehat{DAC})=m(\widehat{CAK})$ olduğu görülür. $[AC]$, ABD üçgeninde dış açıortaydır. $|AB|=|BD|=x$ olsun. $\frac{x}{x+6}=\frac{4}{6}$ (Dış açıortay teoremi) olduğundan $x=12$ bulunur. Çevre$(ABD)=28$'dir.

Cevap: b

18. $360=2^3\cdot3^2\cdot5$ olduğundan $a\le b\le c$ sıralamasını göz ardı edersek 5 çarpanı a, b ve c'den sadece birinde bulunur. $a=5$ için $b+c=20$ ve $b\cdot c=72$ koşullarını sağlayan b ve c pozitif tam sayıları bulunmaz. $a=10$ için $b+c=15$ ve $b\cdot c=36$ koşullarını sağlayan 3 ve 12 sayıları bulunur. (a,b,c) için $(3,10,12)$ üçlüsü elde edilir. $a=15$ için $b+c=10$ ve $b\cdot c=24$ koşullarını sağlayan 4 ve 6 sayıları bulunur. (a,b,c) için $(4,6,15)$ üçlüsü elde edilir. Son olarak $a=20$ için $b+c=5$ ve $b\cdot c=18$ koşullarını sağlayan b ve c pozitif tam sayıları bulunmaz. Bu durumda çözüm sayısı 2 bulunur.

Cevap: c

19. $n=1$ için $a_2=a_1+1$, $n=2$ için $a_3=a_2+2$, $\ldots$, $n=n-1$ için $a_n=a_{n-1}+(n-1)$ eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa $a_n=a_1+1+2+\cdots+(n-1)=1+\frac{n\cdot(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$ bulunur.

$$S_{20}=\sum_{n=1}^{20}\frac{n^2-n+2}{2}=\frac{1}{2}\left[\left(1^2+2^2+\cdots+20^2\right)-(1+2+\cdots+20)+(2+2+\cdots+2)\right]$$

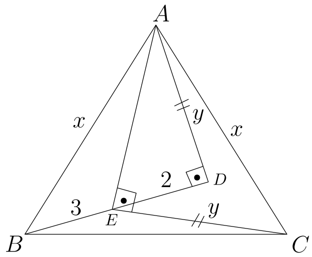
$$S_{20}=\frac{1}{2}\left[\frac{20\cdot21\cdot41}{6}+\frac{20\cdot21}{2}+40\right]=1350 \text{ bulunur.}$$

Cevap: b

20. Elde ettiğimiz sayıda $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ rakamları birer kez kullanılmalıdır. Bu 10 rakam 2 basamaklı 5 sayı oluşturmamız için yeterlidir. Her 5'li grup küçükten büyüğe tek şekilde sıralanır. Sayıların 3'e bölünmesi demek rakamları toplamının 3 ile bölünmesi demektir. Rakamları 3 ile bölünme durumuna göre 3 farklı kümeye ayıralım. $\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$ her rakamın eşleştiği üç rakam var. $\frac{(6\cdot3)\cdot(4\cdot2)\cdot(2\cdot1)}{3!} = 48$. $\{0, 3, 6, 9\}$ rakamları kullanılarak $(30, 69)$, $(30, 96)$, $(60, 39)$, $(60, 93)$, $(90, 36)$, $(90, 63)$ olmak üzere 6 durum var. $6 \cdot 48 = 288$ sayı vardır.

Cevap: a

21.



$|BC| = |AC| = |AB| = x$ ve $|AD| = |EC| = y$ olsun. $\overset{\triangle}{ADB}$, $\overset{\triangle}{ADE}$ ve $\overset{\triangle}{AEC}$'ninde Pisagor teoremi kullanılırsa $x^2 = 5^2 + y^2$, $|AE|^2 = 2^2 + y^2$ ve $|AE|^2 + y^2 = x^2$ eşitlikleri elde edilir. Denklemler düzenlenirse $|BC| = x = \sqrt{46}$ bulunur.

Cevap: c

22. $m = 2n + 1$ diyelim. Buradan ifadeyi düzenlersek $m - 4 - \frac{1}{m}$ elde edilir. Buradan $m = \pm 1$ değerleri bulunur. Dolayısıyla n tam sayısı 2 farklı değer alır.

Cevap: b

23. $4^x - 2^{x+2} + 1 = 0$ ifadesi düzenlenirse $2^x + \frac{1}{2^x} = 4$ olur. Bulunan ifadenin arka arkaya 2 defa karesi alınırsa $4^x + \frac{1}{4^x} = 14$ ve $16^x + \frac{1}{16^x} = 194$ bulunur.

Cevap: a

24. Cevap şıklarında bininci sayının 8 ile başladığı anlaşılıyor. O zaman $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ rakamlarıyla kaç farklı sayı yazabileceğimizi hesaplayalım.

$$\binom{8}{1}\binom{4}{0} + \binom{8}{2}\binom{4}{1} + \binom{8}{3}\binom{4}{2} + \binom{8}{4}\binom{4}{3} + \binom{8}{5}\binom{4}{4} - 1 = 791$$

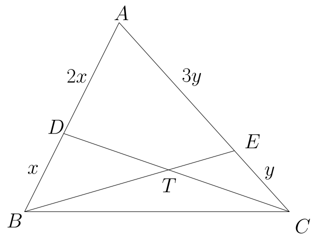
Şimdi 8 ile başlayan içinde en fazla 6 rakam bulunan sayıların adedini hesaplayalım.

$$\binom{7}{1}\binom{3}{0} + \binom{7}{2}\binom{3}{1} + \binom{7}{3}\binom{3}{2} + \binom{7}{4}\binom{3}{3} = 210$$

$791210 = 1001$. Demek ki 1001. sayı 86666 olur. 1000. sayı 86665'tir.

Cevap: d

25.



ADC üçgeninde BE kesenine göre Menaleus teoremi uygulanırsa $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{|CT|}{|TD|} = 1$ ve $\frac{|CT|}{|TD|} = 1$ bulunur.

Cevap: a

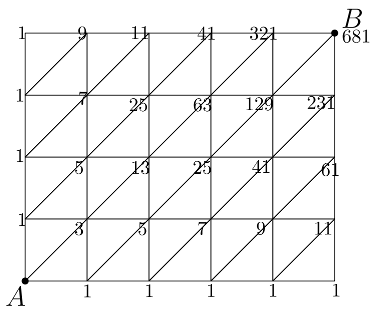
26. $3 \cdot B = \mathrm{C}$ olduğundan $3\left(2 \cdot 10^5 + A\right) = 10 \cdot A + 2$ denklemi elde edilir. Buradan $A = 85714$ bulunur. A'nın rakamları toplamı 25'tir.

Cevap: e

27. x'e ait olan aralık kullanılarak birinci çarpan şu şekilde elde edilir. $4 < x < 3 \Rightarrow -6 < x - 2 < 1 \Rightarrow 0 \leq (x-2)^2 < 36$ elde edilir. $0 \leq x^2 - 4x + 4 < 36 \Rightarrow -2 \leq x^2 + 4x + 2 < 34$ olur. y'ye ait olan aralık kullanılarak $-3 < y < 2 \Rightarrow -2 < y + 1 < 3 \Rightarrow 0 \leq (y+1)^2 < 9 \Rightarrow 0 \leq y^2 + 2y + 1 < 9 \Rightarrow 1 \leq y^2 + 2y + 2 < 10$ elde edilir. Buradan ifadelerin çarpımının -20'den büyük olması gerektiği görülür. Çarpımın en küçük değeri -19 olur.

Cevap: a

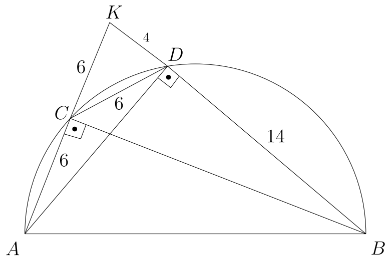
28.



A'dan B'ye 681 farklı yolla gidilebilir. Fakat bu yolların $\frac{9!}{4! \cdot 5!} = 126$ tanesinde çapraz yollar hiç kullanılmaz. $681 - 126 = 555$ tanesinde en az bir kez çapraz yol kullanılır.

Cevap: c

29.



$AC \cap BD = \{K\}$ olsun. $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BCA}) = 90°$ (Çapı gören çevre açılar). $[DC]$, KDA üçgeninde hipotenüse ait kenarortay olur. $|AC| = |CD| = |KC| = 6$ olur. K noktasından çembere göre kuvvet alınırsa $6 \cdot 12 = |KD| \cdot (|KD| + 14) \Rightarrow |KD| = 4$ bulunur. $[BC] \perp [AK]$ ve $|AC| = |CK|$ olduğundan ABK ikizkenar üçgenidir. $|KB| = |AB| = 18$ olur. $r = \frac{|AB|}{2} = 9$ bulunur.

Cevap: d

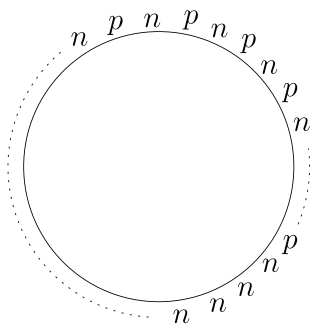
30. $495 = 5 \cdot 9 \cdot 11$ olduğundan aranan sayının rakamları 5 olmalıdır. 11 ile bölünebilmesi için basamak sayısı çift olmalı, 9 ile bölünebilmesi için basamak sayısı 9'un katı olmalı. Bu yüzden aranan sayı en az 18 basamaklı olmalıdır.

Cevap: d

31. İlk gün x kadar un kalmış olsun. $x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{20}{21} = 10 \Rightarrow x = 210$ kg. $210 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} < 210 - 170$. $\frac{210}{n+1} < 40$ olduğundan $\frac{17}{4} < n$ ve n'nin en küçük tam sayı değeri 5 bulunur.

Cevap: c

32. $a \leq 50$ ve a tane pozitif, $100 - a$ tane negatif sayı olsun. Negatif sayı elde etmek için negatif sayılarla pozitif sayılar yan yana gelmelidir.

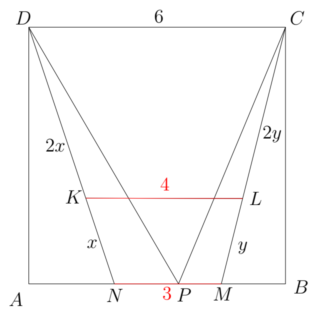


a tane pozitif sayı vardı. İki yanındaki sayılarla çarpıldığında 20 tane negatif sayı elde edilir. $2a \geq 100 - a \Rightarrow a \geq 34$ bulunur.

Cevap: d

Deneme 3

1. DK ve CL'nin AB'yi kestiği noktalar sırasıyla N ve M olsun. $AN = NP$ ve $PM = MB$ olduğundan $|NM| = 3$ olur. $DCMN$ yamuğunda $KL \parallel DC$ olduğundan Thales teoremii kullanılarak $|KL| = 4$ bulunur.



Cevap: b

2. Emre'nin yaşı x olsun. 1. madde göz önüne alınırsa $x \geq 12$ olduğu görülür. 3. madde göz önüne alınırsa $x \leq 12$ olduğu görülür. Arkadaşı Emre'nin yaşını bir tahminde bulabilir.

Cevap: a

3. Ahmet toplamda $10+20+30+40 = 100$ çözmüştür. Toplam doğru cevap sayısı $\frac{10 \cdot 80}{100} + \frac{20 \cdot 80}{100} + \frac{30 \cdot 60}{100} + \frac{40 \cdot 50}{100} = 60$ tanedir.

Ahmet soruların $\frac{60}{100}$'ünü yani %60'ını doğru cevaplamıştır.

Cevap: e

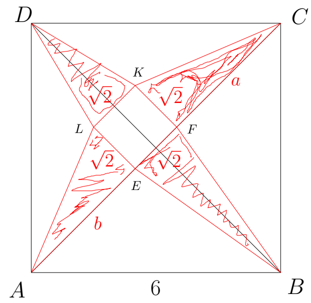
4.

$$\begin{array}{ll} n = 2 \text{ için} & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 2 \\ n = 3 \text{ için} & 2 + \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 3 \\ n = 4 \text{ için} & 3 + \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 4 \end{array}$$

$n = m-1$ için sonuç $m-1$ olsun. $n = m$ için $m - 1 + \frac{1}{m} + (m-1) \cdot \frac{1}{m} = m$. Dolayısıyla tümevarımla cevap n olur.

Cevap: b

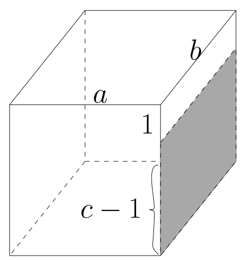
5.



Büyük kare $ABCD$ ve küçük kare $KFEL$ olsun. $|KF| = \sqrt{2}$ olur. AEL ve KFC üçgenlerinin yükseklikleri toplamı $6\sqrt{2} - \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ bulunur. $A(AEL) + A(KFC) = \frac{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 5$ olur. Diğer iki üçgenin alanları toplamı da simetrik işlemlerden 5 bulunur. Toplam alan 10 olur.

Cevap: b

6.



Dikdörtgenler prizması şeklindeki kutunun ayrıtları a, b ve c olsun. $a \cdot b = 77$, $(c-1)\cdot b = 55$ denklemleri tam sayılarda çözülürse $b = 11$, $a = 7$ ve $c = 6$ bulunur. Kutuda $10 \cdot 6 \cdot 5 = 300$ şeker kalmıştır.

Cevap: d

7. Nihal ilk gün $240 \cdot \frac{25}{100} = 60$ sayfa okuyor. 2. gün okuduğu sayfaların numaraları toplamı

$$61 + 62 + \cdots + n = 9495$$
$$n \cdot \frac{(n+1)}{2} - \frac{60 \cdot 61}{2} = 9495$$

denklemleri çözülürse $n = 150$ bulunur. Kitabın %75'i 180 sayfa olduğundan $180 - 150 = 30$ sayfa daha okumalıdır.

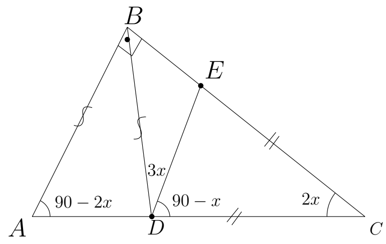
Cevap: d

8. n'nin 2'den fazla olduğunu gösterelim. 1. sayı x rengine boyansın, dolayısıyla 4. sayı y rengine boyansın. 1. ile 7. arasında 5 sayı 4. ile 7. sayı arasında 2 sayı bulunduğundan 7. sayı z rengine boyanır. Üç rengin boyama için yeterli olduğunu gösteren örnek aşağıdaki gibidir.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
x	x	x	y	y	y	z	z	z	x	x	x	...

Cevap: b

9.



$m(\widehat{DCE}) = 2x$ alınırsa, $m(\widehat{BAC}) = 90 - 2x$ ve $|EC| = |DC|$ olduğundan $m(\widehat{EDC}) = 90 - x$, $|AB| = |BD|$ olduğundan $m(\widehat{BDA}) = 90 - 2x$ olur. A, D ve C noktaları doğrusal olduğundan $m(\widehat{BDE}) = 3x$ olur. İstenen oran $\frac{m(\widehat{EDC})}{m(\widehat{BDE})} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$ bulunur.

Cevap: b

10. n sayısından küçük n ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların adedi Euler φ fonksiyonu yardımıyla hesaplanır. Euler φ fonksiyonu çarpımsal bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} \varphi(2020) &= \varphi(4) \cdot Q(5) \cdot \varphi(101) \\ &= 2 \cdot 4 \cdot 100 \\ &= 800 \end{aligned}$$

$$A = 400 \cdot 2020$$

$$A \equiv 4 \cdot 4 \equiv 16 \equiv 7 \pmod 9 \text{ bulunur.}$$

Cevap: b

11. $n = 2020$ olsun.

$$x = (n+1)^3 - (n-1)^3$$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \left[n^2 - 3n^2 + 3n - 1\right]$$

$$x = 6n^2 + 2$$

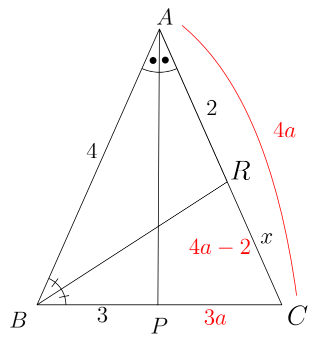
$$\sqrt{\frac{6n^2 + 2 - 2}{24}} = \sqrt{\frac{6n^2}{24}} = \frac{n}{2} = \frac{2020}{2} = 1010$$

Cevap: c

12. Ali ve Selçuk beyaz renk bilye aldığı durum sayısı $\binom{8}{2} = \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$, Ali ve Selçuk mavi renk bilye aldığı durum sayısı $\binom{8}{2} = 28$, Ali ve Selçuk kırmızı renk bilye aldığı durum sayısı $\binom{8}{2}\binom{6}{2} = 28 \cdot 15 = 420$'dir. Toplam durum sayısı $420 + 28 + 28 = 476$ bulunur.

Cevap: b

13.



AP açıortay olduğundan $\frac{AB}{BP} = \frac{AC}{PC} = \frac{4}{3}$'tür. $|PC| = 3a$ ve $|AC| = 4a$ olsun. BR açıortay olduğundn $\frac{AB}{AR} = \frac{BC}{CR}$ dir. $\frac{24}{12} = \frac{3+3a}{4a-2}, 8a - 4 = 3 + 3a, 5a = 7, a = \frac{7}{5}$ olur. $|CR| = 4 \cdot \frac{7}{5} - \frac{10}{5} = \frac{18}{5}$ bulunur.

Cevap: d

14. $\dfrac{2^{2020} \cdot 5^{2020}}{2^a \cdot 5^b}$ ve $\dfrac{5^a \cdot 5^b}{2^{2000} \cdot 5^{2000}}$ şartlarını sağlayan sayılar isteniyor.

$$a = 2000, 2001, \ldots, 2020$$
$$b = 2000, 2001, \ldots, 2020$$

olur. İstenen şartı sağlayan $21 \cdot 21 = 441$ tane sayı ((a, b) ikilisi) vardır.

Cevap: d

15. Verilen ifadeyi aşağıdaki gibi düzenlersek,

$$\frac{100}{99} \cdot \left(1 + \frac{98}{97}\left(1 + \frac{96}{95}\left(\cdots \frac{6}{5}\left(1 + \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2}{1}\right)\right)\cdots\right)\right)\right)$$

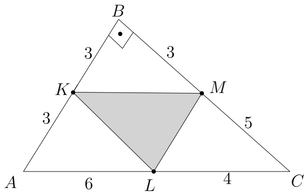
İçteki parantezden işlemler yapılmaya başlanırsa her bir parantez içindeki parantezin dışındaki sayının sadeleştiğini görmek zor değildir. İşlemler bu şekilde devam ettirilirse sonuç 100 bulunur.

Cevap: b

16. Sayılarımız $a_1, a_2, a_{31}, \ldots, a_{2021}$ olsun. $a_2 \mid a_3$ ve $a_1 + a_2 \mid a_3$ ise $a_1 \mid a_3$ olur. $a_3 \mid a_4$ ve $a_2 + a_3 \mid a_4$ olduğundan $a_2 \mid a_4$ ve $a_1 \mid a_4$ olur. Bu da $a_1, a_2, a_3 \mid a_4$ demektir. Bulunan sonuçlar genellenirse $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2020} \mid a_{2021}$ elde edilir. $a_1 = 0!, a_2 = 1!, a_3 = 2!, \ldots$ alınırsa $a_{2021} = 2020!$ bulunur.

Cevap: d

17.



$A(ABC) = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$ olur. $A(KLM) = S$ olsun. $\frac{A(KLM)}{A(ABC)=24} = \frac{3 \cdot 6 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{21}{80} = \frac{S}{24}$. Buradan $S = \frac{63}{10}$ bulunur.

Cevap: b

18. Verilen ifade düzenlenirse $(a-b)\left(a^2+3ab+b^2\right) = 2020$ elde edilir. $a - b = n$ ve $a \cdot b = k$ alınırsa $n(n^2+5k) = 2020$ olur. $5 \nmid n$ olursa $5 \nmid n^2 + 5k$ olur. O halde $5 \mid n$ ve $5 \mid n^2 + 5k$ olur. Bu durumda $25 \mid n(n^2+5k)$ olmalıdır fakat $25 \nmid 2020$ olduğundan denklemi sağlayan (a, b) tam sayı ikilileri yoktur.

Cevap: a

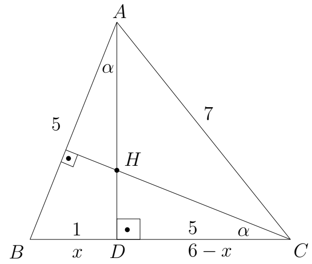
19. Oyuncak timsahın hızı: $V_0 = 0$, timsahın hızı: V_t, nehrin hızı: V_n olsun. Palmiye ve papirüs arasındaki mesafe x olsun. $25 \cdot V_n = x$ ve $(V_t - V_n) \cdot 25 = x$ denklemleri çözülürse $V_t = 2V_n$ bulunur. V_n hızıyla 25 dakikada alınan mesafe $2V_n + V_n = 3V_n$ hızla 25/3 dakikada alınır.

Cevap: d

20. Sayılarımız $a_1, a_2, \cdots, a_n$ olsun. $a_1+a_2+\cdots+a_{11} = 100$ kabul edelim. Eğer $a_2+a_3+\cdots+a_{11}+a_{12} = 100$ olursa $a_1 = a_{12}$ olur fakat sayılar farklı diyordu o zaman $a_2 + a_3 + \cdots + a_{12} = 101$ olmalıdır. Bu iki denklemden $a_{12} = a_1 + 1$ olur. Aynı şekilde devam edilirse $a_{13} = a_2 - 1$ olur. $1 \leq n \leq 11$ için $a_{n+11} = a_n - (-1)^n$ bulunur. İşlemlere devam edilirse $a_{23} = a_{12} - 1$ olur fakat $a_{12} = a_1 + 1$ son bulunan ifadede yerine yazılırsa $a_{23} = a_1$ olur. O halde başka sayı yazılamaz ve farklı a_n'lerin sayısı en fazla 22 bulunur. İlk 11 sayının toplamı 101 kabul edilerek de aynı sonuca ulaşılır.

Cevap: a

21.



$$25 - x^2 = 49 - (6-x)^2$$
$$25 - x^2 = 49 - \big(36 + x^2 - 12x\big)$$
$$25 - x^2 = 13 - x^2 + 12x$$
$$x = 1$$

$AH \cap BC = D$ olsun. $|BD| = x$ ve $|DC| = 6 - x$ olur. ADB ve ADC dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa $|AD| = \sqrt{25-1} = 2\sqrt{6}$ bulunur. CH çizilirse $CH \perp AB$ olduğundan, $\overset{\triangle}{ADB} \sim \overset{\triangle}{CDH}$ olur. Bu benzerlik kullanılarak $\frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{|HD|}{5}$, $|HD| = \frac{5}{2\sqrt{6}}$, $|AH| = 2\sqrt{6} - \frac{5}{2\sqrt{6}} = \frac{19}{2\sqrt{6}}$ bulunur.

Cevap: c

22.

$$2020 \equiv 22(\text{mod} 37)$$
$$2020^6 \equiv 27(\text{mod} 37) \text{ ve } 6^2 \equiv -1(\text{mod} 37)$$
$$6^{2020} \equiv 1(\text{mod} 37) \text{ bulunur.}$$

Sonuç $27 + 1 = 28$ bulunur.

Cevap: d

23. Verilen eşitlik kullanılarak $a^2 - b^2 = c - b, b^2 - c^2 = a - c, c^2 - a^2 = b - a$ bulunur. Bu eşitlikler ifadede yerine yazılırsa $a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) = ac - ab + ba - bc + cb - ca = 0$ bulunur.

Cevap: a

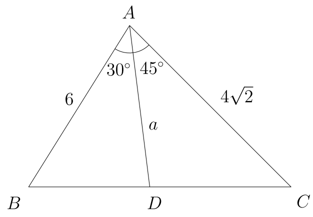
24. Kart yerlerini numaralandıralım. $\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \ldots\ \overline{99}\ \overline{100}$
En az para harcamak için mümkün olduğunca çok bedava yer değiştirme kullanmalıyız. Bir sayı bedavaya (mod 4)'te denk olduğu her yere gidebilir. Yerleri (mod 4)'e göre yazarsak;

$$\overline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \overline{0}\ \overline{1}\ \overline{2}\ \ldots\ \overline{3}\ \overline{0}$$

1'lerin 0'lara, 2'lerin 3'lere, 3'lerin 2'lere, 0'ların 1'lere gitmesi gerektiğini görürüz. Her gruptaki (0, 1, 2, 3) sayıları kendi aralarında bedavaya istediğimiz kadar değiştirebiliriz. Bu durumda soru ''Bu gruplar arasında kaç değişim yapmamız gerekir?'' halini alır. 1 ile 0 değiştirmek, 2 ile 3 değiştirmek, değiştirilen bütün sayıları ait olduğu gruba koyar ve her değişmede 2 sayı doğru gruba gelir. $100/2 = 50$ değişimde her sayı ait olduğu gruba gelir. Diğer değişimler gruplar içinde bedavaya yapılabilir.

Cevap: d

25.



Yükseklikleri eşit üçgenlerin tabanları oranı alanaları oranına eşit olduğundan $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{A(ABD)}{A(ADC)}$'dir. Bu oran sinüslü alan formülü kullanılarak $\dfrac{\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot a \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$ bulunur.

Cevap: e

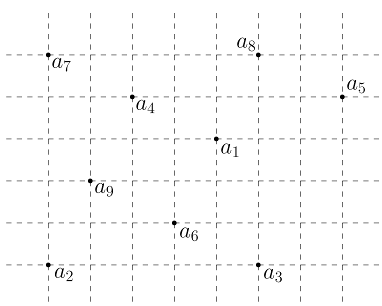
26. A sayısının (mod 99)'daki değeri için (mod 9) ve (mod 11)'deki değerlerini inceleyelim. $A \equiv 6 \pmod 9$ ve $A \equiv 0 \pmod{11}$ bulunur. $A \equiv 33 \pmod{99}$ bulunur.

Cevap: c

27. $f_1(x_1) = 0$'dır. Yani $x_1^2 + bx_1 + c_1 = 0$ olur. $f_2(x_1) = x_1^2 + bx_1 + c_2$ ve buradan $x_1^2 + bx_1 = -c_1$ yerine yazılırsa $f_2(x_1) = c_2 - c_1$ olur. Aynı şekilde $f_3(x_2) = c_3 - c_2$'dir. Bu ifadeler art arda yazılarak taraf tarafa toplanırsa istenen toplam 0 (sıfır) bulunur. Yani toplam tek değer alır.

Cevap: b

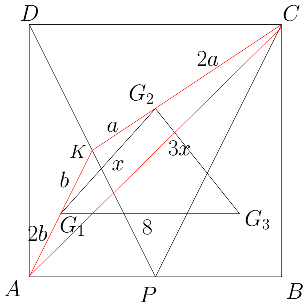
28.



Soruda verilen şekle a_5 noktasını ilave edelim. Çekirgenin izlemesi gereken yol $a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6 - a_7 - a_8 - a_9$ şeklindedir. 8 zıplamada bütün noktaları dolaşabilir.

Cevap: a

29.



$CG_2 \cap AG_1 = K \in PD$ olur. $2|KG_1| = |AG_1|$ ve $2|KG_2| = |CG_2|$ olduğundan $G_1G_2 \parallel AC$ ve $\frac{|G_1G_2|}{|AC|} = \frac{1}{3}$ bulunur. $|G_1G_2| = x$ ve $|AC| = 3x$ alınırsa $|AC| = 12\sqrt{2} = 3x, x = 4\sqrt{2}$ ve simetrik işlemlerle $|G_1G_2| = |G_2G_3| = 4\sqrt{2}$ olur. 1. sorudaki işlemler yapılarak Thales teoremi yardımıyla $|G_1G_2| = 8$ olur. Kenar uzunlukları $4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$ ve 8 olan üçgen Pisagor teoremini sağladığından ikizkenar dik üçgendir. $A(G_1G_2G_3) = \frac{4\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}}{2} = 16$ bulunur.

Cevap: a

30. Denklem düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= xy + x + y \\
x^2 - xy - x - y + y^2 &= 0 \\
x^2 - x(y+1) + y^2 - y &= 0 \\
x &= \frac{y + 1 \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (y^2 - y)}}{2} \\
(y+1)^2 - 4\left(y^2 - y\right) &\geq 0 \\
-3y^2 + 6y + 1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

olmalı. $y = 0, y = 1, y = 2$ için eşitsizlik sağlanır. Bu değerler denklemde yazılırsa $(0,0)(1,0)(0,1)(2,1)(1,2)(2,2)$ olmak üzere 6 tane ikili vardır.

Cevap: d

31. Yuvaları $a_i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ile gösterelim.

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 &= a_3 \\
a_2 + a_3 &= a_4 \\
a_3 + a_4 &= a_5 \\
a_4 + a_5 &= a_6
\end{aligned}
$$

ve $a_5 = 10$ bulunur. Buradan $3a_2 + 2a_1 = 10$ olur. Eğer tüm a_i'leri toplayıp a_1 ve a_2 türünden yazarsak $12a_2 + 8a_1$ elde edilir. Bu da $10 \cdot 4 = 40$'a eşittir.

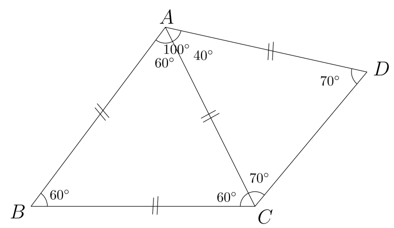
Cevap: d

32. Verilen işlemlere göre, her harfin sayısı iki artıyor veya iki azalıyor. O halde cevap tek sayı olamaz. İlk işlemde A'ların sayısı 2 artar ve 2 azalır. İkinci işlemde de B'lerin sayısı 2 artar veya 2 azalır. En başta $2n+1$ A ve $2n+1$ B alınırsa geriye birer A ve B bırakılabilir. $2n$ tane B ve $2n$ tane A alınırsa, 2 tane B ve 2 tane A bırakılabilir. 2 tane B ile yapılan işlemde 2 tane A azaltılabilir. O halde 2 tane B kalır.

Cevap: b

Deneme 4

1. $[AC]$ çizilirse ABC üçgeni eşkenar ve $|AC| = |AD|$ olduğundan CAD üçgeni ikizkenar üçgen olur. $m(\widehat{D}) = 70°$ bulunur.

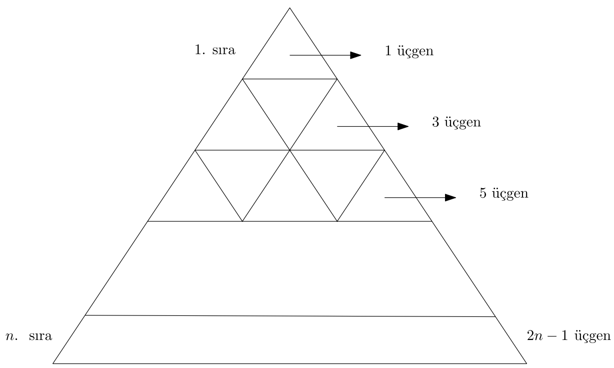


Cevap: c

2. $\text{obeb}(2000, 2020) = 20 = 2^2 \cdot 5^1$
p.b.s$= (2+1)(1+1) = 6$ farklı şekilde karelere ayrılabilir.

Cevap: b

3.



$1 + 3 + 5 + \cdots + 19 = 10^2 = 100$ tane eşkenar üçgene parçalanabilir.

Cevap: e

4. Her bir kenar üzerindeki sayıların toplamı n olsun. 4 kenar olduğundan toplam $4n$ olur. Köşelere iki kere toplanacağı için en büyük sayıları $\{36, 35, 34, 33\}$ içerideki 4×4'lük kareye en küçük sayıları yazalım.

$$4n = (1 + 2 + \cdots + 36) - (1 + 2 + \cdots + 16) + 33 + 34 + 35 + 36$$

$n = 167$ bulunur.

Cevap: b

5. $15 \cdot 11 = 165$. Şekil merkeze göre simetrik olduğundan en küçük kareden başlayarak kenar uzunlukları 1, 3, 4, 5, 6 şeklinde alınabilir.

Cevap: b

6. $b = 0$ için $a^0 - 0^a = 1 \Rightarrow 1 = 1$ olur. $(a \neq 0)$ olmak üzere her $(a, 0)$ denklemin bir çözümüdür.

Cevap: e

7. Bir vagonunun kapasitesine x diyelim.

	1. Vagon	2. Vagon	3. Vagon
Dolu	7	8	10
Boş	$x - 7$	$x - 8$	$x - 10$

$(x - 7 + x - 8 + x - 10) \cdot \frac{72}{100} = x - 7 + x - 8 + 1$ (Boş koltuk sayısı fazla olan vagonlar dolduruldu)

$$(3x - 25) \cdot \frac{72}{100} = 2x - 14$$

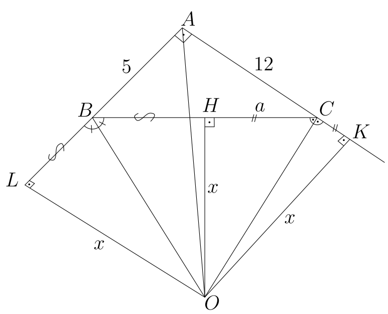
$x = 25$ bulunur.

Cevap: c

8. İlk olarak sağ üst kareyi 3 farklı şekilde renklendiririz. Kalan iki rengi de köşenin komşularına 2 şekilde verebiliriz. Bu seçimden sonra tablo tek şekilde boyanabilir. Böylece boyama işleminin $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ yolla yapılabildiği görülür.

Cevap: a

9.



$5^2 + 12^2 = |BC|^2 \Rightarrow |BC| = 13$
O noktası ABC üçgeninin dış teğet çemberinin merkezidir. $|HC| = |CK| = a$, $|BH| = |BL| = 13 - a$,
$\overset{\triangle}{ALO} = \overset{\triangle}{AKO}$ (Ayrıca ikizkenar dik üçgenler)

$$12 + a = 5 + 13 - a$$
$$2a = 6$$
$$a = 3$$

$|AL| = |LO| = |OH| = 12 + 3 = 15$ bulunur.

Cevap: c

10. $n=1$ için $1^4+(1+1)^4=17$ asaldır.
$n=2$ için $2^4+(2+1)^4=16+81=97$ asaldır.
$n=3$ için $3^4+(3+1)^4=81+256=337$ asaldır.
$n=4$ için $4^4+(4+1)^4=256+625=881$ asaldır.
$n=5$ için $5^4+(5+1)^4=625+1296=1921=17\cdot 113$ asal değildir. Cevap $1\cdot 9\cdot 2\cdot 1=18$ bulunur.

Cevap: b

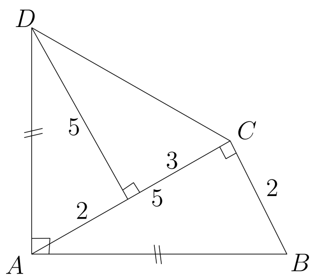
11. $\frac{25}{3}<x<10$ aralığında yazan sayıları içine alan 2 tane eşitsizlik yazılmıştır. İstenen sayı $x=9$ olur. $9^3=729$ olur. Cevap $7+2+9=18$'dir.

Cevap: c

12. %5'inin tam sayı olması için takım sayısının 20'nin katı olması gerekir. Fakat 2 takım tüm maçları kaybetmiş olamaz.

Cevap: d

13.



D noktasından AC'ye inilen dikme ayağı K olsun. $\overset{\triangle}{AKD}=\overset{\triangle}{BCA}$ olur. $|Bc|=|AK|=2$, $|AC|=|DK|=5$. $\overset{\triangle}{DKC}$'ninde Pisagor teoreminden $5^2+3^2=|DC|^2 \Rightarrow |DC|=\sqrt{34}$.

Cevap: d

14.

n	$n^{\frac{1}{n-7}}$
8	8
9	3
10	$10^{1/3}$
11	$11^{1/4}$
12	$12^{1/5}$
13	$13^{1/6}$

$11^{1/4}\overset{?}{<}2 \Rightarrow 11<2^4 \Rightarrow 11<16(2^4=16, 2^5=32,\dots)$ olduğundan $n\geq 11$ için $1<n^{\frac{1}{n-7}}<2$ olur. Bu durumda sadece 2 çözüm vardır.

Cevap: c

15. $x = 1$'in çözüm olduğu görülüyor. $x < 1$ için eşitliğin sol tarafına AGO uygulanırsa $x^{2020} + x^{-2020} \geq 2$ olur. Fakat eşitliğin sağ tarafı $1 + x^{2021} < 2$ olduğundan Ç.K $= \emptyset$'dir.

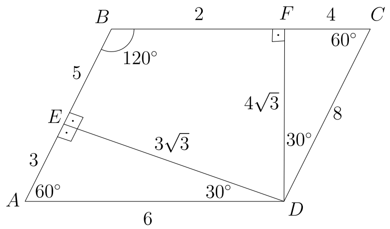
$x > 1$ için $x^{2020} < x^{2021}$ ve $x^{-2020} < 1$ olur. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplanırsa $x^{2020} + x^{-2020} < x^{2021} + 1$ elde edilir. Ç.K $= \emptyset$ olur. Buradan tek çözümün $x = 1$ olduğu görülür.

Cevap: b

16. Bir tek tam sayının tüm bölenleri tek sayıdır. Tek tam kare sayının toplamı tek sayı olduğundan, aranan sayılar tek tam pozitif böleni olmalıdır. Dolayısıyla bu sayılar tam karedir. Ayrıca bölen sayısı 3'ten fazla olduğundan bu sayılar asal olmayan sayıların karesidir. Bu durumda koşulları sağlayan sadece 25^2 ve 27^2 kalır. 25^2'nin bölenleri olan $1, 5, 5^2, 5^3$ ve 5^4 sayılarının birler basamaklarındaki rakamların toplamı 21'dir. 27^2'nin bölenleri olan $1, 3, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$ ve 3^6 sayılarının birler basamağında bulunan rakamların toplamı 33 olduğundan koşulları sağlayan sayı sadece 729'dur.

Cevap: b

17.



$\overset{\triangle}{ADE}$ ve $\overset{\triangle}{DFC}$ $30°, 60°, 90°$ üçgenleridir. $|AD| = 2|AE| = 6$ ve $|DC| = 2|FC| = 8$ olur. $|EB| + |BF| = 7$ bulunur.

Cevap: d

18. $m^4 = 7\left(n^2 - n + 1\right) \Rightarrow \min\left(n^2 - n + 1\right) = 7^3$ olmalıdır. $n^2 - n + 1 = 343 \Rightarrow n^2 - n - 342 = 0 \Rightarrow (n - 19)(n + 18) = 0 \Rightarrow n = 19$ olur. Buradan $m = 7$ bulunur. $m + n = 19 + 7 = 26$ olur.

Cevap: e

19. Azer'in i. atıştaki puanı a_i ve Baycan'ın i. atıştaki puanı b_i olsun. $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ ve $a_3 + a_4 + a_5 = 3(b_3 + b_4 + b_5)$, $b_3 + b_4 + b_5 \geq 2 + 3 + 4 = 9$ ve $a_3 + a_4 + a_5 \leq 10 + 9 + 9 = 28$ ve $a_3 + a_4 + a_5$ toplamı 3 ile bölünmelidir. Buradan $(b_3, b_4, b_5) = (2, 3, 4)$ ve $(a_3, a_4, a_5) = (10, 9, 8)$ bulunur. O halde istenen $a_5 + b_5 = 10 + 2 = 12$ olur.

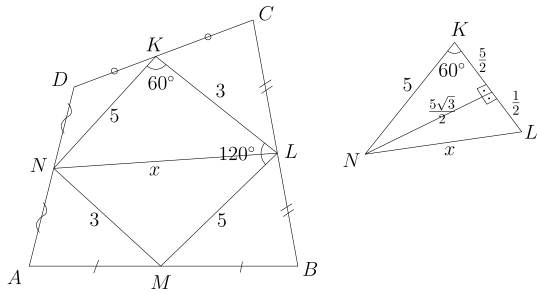
Cevap: c

20. Altıdan fazla doğru önerme olamaz. Çünkü doğru olan iki önerme yan yana olursa bu iki kartta aynı cümle yazılı olmalıdır. Dolayısıyla doğru önerme ile başlayıp doğru önerme ile sonlanırsa en fazla 6 önerme doğru olabilir. Örnek durum:

0	10	1	9	2	8	3	7	4	6	5
D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D	Y	D

Cevap: c

21.



$KLMN$ paralelkenardır. $x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \sqrt{19}$

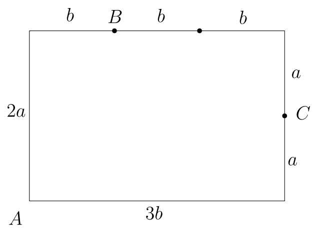
Cevap: b

22.

$$6^{2019} = \left(6^2\right)^{1009} \cdot 6 \equiv -6(\text{mod}37)$$
$$6^{2020} = 6^{2019} \cdot 6 \equiv -36 \equiv 1(\text{mod}37)$$
$$6^{2021} = 6^{2020} \cdot 6 \equiv 1 \cdot 6 \equiv 6(\text{mod}37)$$
$$6 + 1 - 6 \equiv 1(\text{mod}37)$$

Cevap: b

23.



Hızları oranı aldıkları yolların oranına eşittir.

$$\frac{2a+b}{2a+5b} = \frac{a+2b}{3a+4b}$$
$$2a^2 + ab - 3b^2 = 0$$
$$a = b \text{ olur.}$$

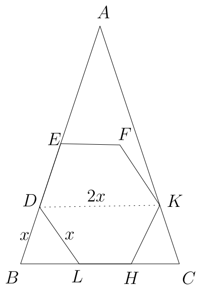
Hızları oranı $\frac{3}{7}$ bulunur.

Cevap: c

24. Koşulları sağlayan boş karenin bulunduğu satır ve sütunun biri 1'lerle diğeri 0'larla dolu olmalıdır. Dikey 1 ve yatay 0 alırsak diğer bütün yatay satırlarda en az bir tane 1 bulunur. Dikeyde aynı şekilde en az bir tane 0 bulunur. Bu durumda boş kare sayısı en fazla 2 olur.

Cevap: b

25.



$\overset{\triangle}{DBL}$'ni eşkenar üçgendir. $2|DL| = |DK| = 2x$ ve $DK \parallel BC$'dir. $\overset{\triangle}{ADK} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ olduğundan $\frac{8-x}{8} = \frac{2x}{3}$, $24 - 3x = 16x$, $24 = 19x$, $x = \frac{24}{19}$ bulunur.

Cevap: c

26. $b = 0$ ve $a = 3$ denklemi sağlar. $T_1 = 0 + 3 = 3$ bulunur. $147 = 3 \cdot 7^2$ olduğundan $b = 4k\,(k \in \mathbb{Z}^+)$ olmalıdır. $(a-3)^3 = 7^2 \cdot 3k$ olup, buradan k en az $7 \cdot 3^2$ olmalıdır. $a - 3 = 7 \cdot 3 \Rightarrow a = 24$ ve $b = 252$ bulunur. $T_2 = 24 + 252 = 276$ olur.

Cevap: a

27. $C = 20$ olduğu biliniyor. Verilen ifadelerden $B = 2F, B = A{+}6, A{+}F = 2E, E = C{+}4$, yaş ortalamaları 28'dir. Grupta 6 kişi olduğundan yaşları toplamı $28 \cdot 6 = 168$'dir. $E = C + 4 \Rightarrow E = 20 + 4 = 24$ olur. $F + A = 2E \Rightarrow F + A = 2 \cdot 24 = 48$'dir. $B = 2F$ ve $B = A + 6 \Rightarrow 2F = A + 6$ ve $F + A = 48$ denklemleri yardımıyla $F = 18$ ve $A = 30$ bulunur. $B = A + 6 \Rightarrow B = 30 + 6 = 36$ olur. $D = 168 - (20 + 24 + 18 + 30 + 36) = 40$ bulunur.

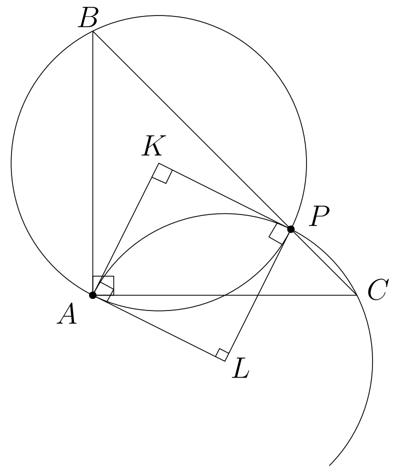
Cevap: b

•				$\cdots$	
1	2	3	4		n

28. Bu kesiti herhangi satır veya sütun olarak düşünebiliriz. Kalemiz bulunduğu konumdan 2 kare dışarıdakilere giderek başlangıca geri dönebilir. Sonrasında 1'den n'ye gidip n'den 2'ye gidebilir. Böylece $n > 3$ olan her satır ve sütunda her kareye uğrayabilir.

Cevap: d

29.



$AKPL$ karedir. $|AP| = |KL|$ olur. $|AC| = |AB| = 2 + 2\sqrt{3}$. $\overset{\triangle}{ACP}$'ninde $|AP| = 4$ bulunur. $|AP| = |KL| = 4$.

Cevap: b

30. $x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x - 4 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 4$ olur. Bu ifadenin arka arkaya iki defa karesi alınırsa $x^2 + \frac{1}{x^2} = 14$ ve $x^4 + \frac{1}{x^4} = 194$ bulunur.

$$x^9 + x^7 - 194x^5 - 194x^3 = x^5(\underbrace{x^4 - 194}_{x^{-4}}) + x^3 \cdot (\underbrace{x^4 - 194}_{x^{-4}}) = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -4$$

bulunur. $\left(x^4 + \frac{1}{x^4} = 194 \Rightarrow x^4 - 194 = \frac{-1}{x^4} \Rightarrow x^4 - 194 = -x^{-4}\right)$

Cevap: a

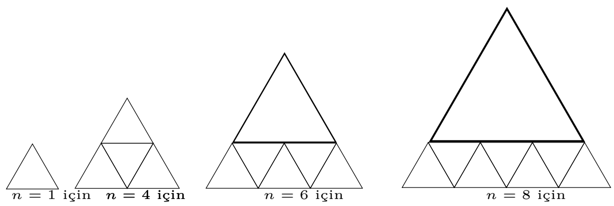
31. Verilen ifade şu şekilde düzenlenebilir.

$$\left(x^2 - 2\right)^2 + (\sqrt{2}x - 2)^2 + 4$$

$x = \sqrt{2}$ için 4 bulunur.

Cevap: d

32.

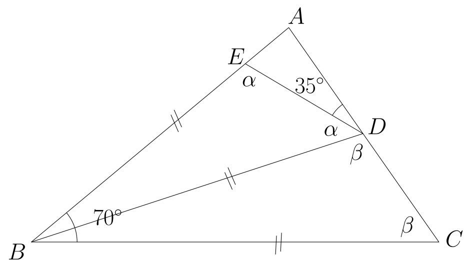


olduğundan $n > 2$ olmak üzere tüm çift sayılar farklı sayı olur. Her eşkenar üçgen 4 parçaya ayrılabileceği için her farklı sayının 3 fazlası da farklı sayı olur. Dolayısıyla 2, 3 ve 5 dışındaki tüm sayılar farklı sayıdır. 1, 4, 6, 7, 8, 9,…, 2018, 2019, 2020 olmak üzere n, 2017 farklı değer alır.

Cevap: e

Deneme 5

1.



$\alpha+\beta=45°$. $EBCD$ dörtgeninin iç açıları toplamından $m(\widehat{B})=m(\widehat{C})=70°$, $m(\widehat{BAC})=40°$.

Cevap: c

2. $n=14,16,20,22$ değerleri denklemi sağlayan en küçük pozitif dört tam sayıdır. Sadece çift tam sayılar denenerek bulunabilir.

Cevap: c

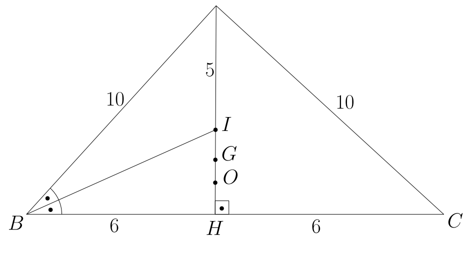
3. $1^2,2^2,3^2,\ldots,125^2$'ne kadar 125 tane sayı var. Aralara tam küpleri koyarsak $125^2=25^3=5^6$. 25 tane küp var 5 tanesi ortak olmak üzere 20 tane gelir. 145. sayı 125^2'dir. $125^2=15625$ ve rakamları toplamı 19 olur.

Cevap: a

4. Ali>Berkay>Can
Berkay'ın alabileceği bilye sayısı en fazla 5 olabilir.
$(A,B,C)=\{(6,5,1),(5,4,3),(6,4,2),(7,4,1),(7,3,2),(8,3,1),(9,2,1)\}$ şekilde 7 farklı paylaşım yapabilir.

Cevap: b

5.



$|IH|=5$, $|GA|=\frac{8}{3}$ ($\frac{1}{2}$ oranı), $|OH|=\frac{7}{4}$ bulunur. $\frac{|OI|}{|IG|}=\frac{3-\frac{7}{4}}{3-\frac{8}{3}}=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{1}{3}}=\frac{15}{4}$

Cevap: d

6. Bir basamaklı 9, iki basamaklı $9 \cdot 9 = 81$, üç basamaklı $9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$, dört basamaklı $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ ve 2013 ile 2019 arasında 7 sayı olmak üzere $9 + 81 + 648 + 504 + 7 = 1249$ sayı vardır.

Cevap: b

7.

$$\left(x^{1+\sqrt{x}}\right)^2 = (\sqrt{x})^{x-1}$$
$$x^{2+2\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{2}(x-1)}$$
$$2 + 2\sqrt{x} = \frac{1}{2}(x-1)$$
$$4 + 4\sqrt{x} = x - 1 \Rightarrow x = 25 \text{ bulunur.}$$

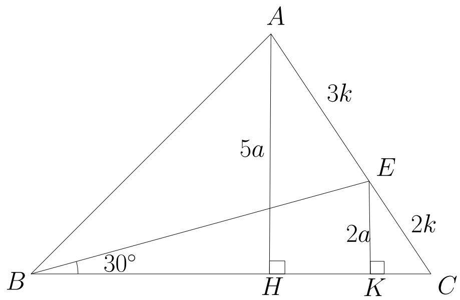
Ayrıca $x = 1$ denklemi sağlar. $25 + 1 = 26$ bulunur.

Cevap: d

8. Her çitten bir tane çektikten sonra kalan 10 tane tek çoraptan 3 tane seçerse 3 çift aynı renk çorabı almayı garantilemiş olur. $10 + 1 + 1 + 1 = 13$

Cevap: d

9.



$$\frac{A(BEC)}{A(ABC)} = \frac{EC}{AC} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{|EK|}{|AH|} = \frac{2}{5} \text{ ve } \frac{|BE|}{|AH|} = \frac{4}{5} \text{ bulunur.}$$

Cevap: e

10. $T = (a+b)^2 - 9ab \equiv (a+b)^2 \pmod 9$
$T \equiv 0, 1, 4, 7 \pmod 9$. Bu koşullar altında $a = 12$, $b = 1$ için $T = 144 + 1 - 7 \cdot 12 \cdot 1 = 61$ elde edilir.
$T_{\min} = 61$ olabilir.

Cevap: c

11.
$$\begin{aligned}x^2+y^2-2xy-x+y&=6\\(x-y)^2-(x-y)&=6\\(x-y)^2-(x-y)-6&=0\\x-y=-3,x-y&=-2\end{aligned}$$

İlk denklemden $x(x-y)-x=2 \Rightarrow 3x-x=2 \Rightarrow x=1, y=-2$ veya $-2x-x=2 \Rightarrow x=\frac{-2}{3}, y=\frac{4}{3}$. Bu durumda $x+y$ en çok $\frac{2}{3}$ olur.

Cevap: c

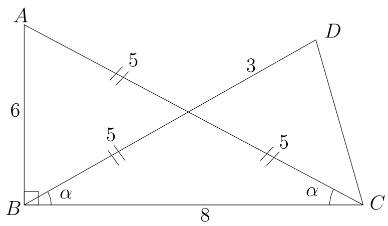
12.

$$\overline{abc}+\overline{ab}+a=11(ab)+a+c$$
$$11\cdot 10+1+(0\ldots 9) \Rightarrow 10 \text{ sayı}$$
$$\vdots$$
$$11\cdot 89+8+(0\ldots 9) \Rightarrow 10 \text{ sayı}$$

Toplamda $80\cdot 10=800$ sayı. $900+90+9=999$'dan 1 sayı daha ilave edilirse $800+1=801$ sayı bulunur.

Cevap: d

13.



$A(D\overset{\triangle}{B}C)=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 8\cdot \frac{6}{10}=\frac{96}{5}$.

Cevap: d

14. $9^9 \equiv 9 \pmod{12}$ olduğundan 9 olabilir.

Cevap: d

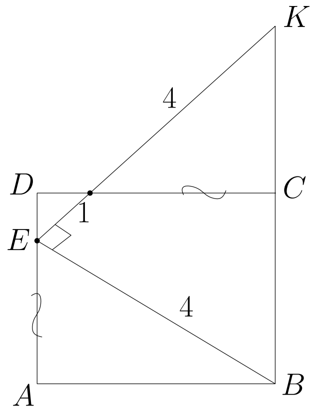
15. Masa $100x$ alınırsa, satılan masa y olsun. Satılmayan masa $100x-y$'dir. Sandalye sayısı $200x$ olsun. Satılan sandalye $120x-y$, satılamayan sandalye $80x+y$ olur. $2(100x-y)=80x+y \Rightarrow y=40x$ olur. $40x+120x=240 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ ve $60x=60\cdot\frac{3}{2}=90$ bulunur.

Cevap: c

16. Her kişi 12 maç yapmıştır. C yaptığı 12 maçın hepsini kaybetmiştir. D, C'nin bulunduğu ikililerde yaptığı 6 maçın hepsini kazanmış, geriye kalan maçlarda kaybetmiştir. E, C ile aynı ikilide yer aldığı 3 maçı kaybetmiş, D ile aynı ikilide yer aldığı maçın 2'sinde yenmiş, 1'inde kaybetmiştir. E, A ile aynı ikilide oynadığı 3 maçın hepsinde yenmiş, aynı şekilde B ile beraber 3 maç yenmiştir. Toplam 8 maç kazanmıştır.

Cevap: c

17.



$EF \cap BC = K$ olsun. $K\overset{\triangle}{C}F = B\overset{\triangle}{A}E$ olduğundan $FK = 4$ ve $A(ABCFE) = A(BEK) = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ bulunur.

Cevap: b

18. $2021 = 43 \cdot 47 \Rightarrow A = 44 \cdot 48, B = (43 \cdot 47)^2$ bulunur. $A \cdot B = 44 \cdot 48 \cdot (43 \cdot 47)^2 \equiv 8 \cdot 3 \cdot (7 \cdot 2)^2 \equiv 6 \pmod 9$ bulunur.

Cevap: d

19. a siyah olmak üzere a, b, c, d, e komşu beş sayı olsun. $b = a \cdot c$, $d = c \cdot e$, $c = b + d = ac + ce = c(a+e), c \neq 0$ olur. Dolayısıyla $a + e = 1$'dir. Böylece aralarında tam bir tane siyah sayı olan iki siyah sayının toplamı 1'dir. 500 tane sayıyı böyle 250 ikiliye bölebiliriz. Dolayısıyla tüm siyah sayıların toplamı 250'dir. Tüm siyah sayıların toplamı tüm beyaz sayıların toplamının iki katına eşit olduğundan tüm sayıların toplamı 375 olur.

Cevap: e

20. Her grupta 108 öğrenci bulunur. Gruplardaki kızları b_i ve erkekleri e_i $(1 \leq i \leq 5)$ ile göstererek her sütundaki elemanların toplamı 108 ve satırındaki elemanların toplamı 270 olan bir matris tanımlayalım.

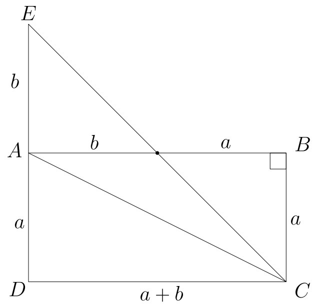
$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{pmatrix}$$

Her sütundaki elemanların minumum olanları seçileceğinden satırlardan birinden en az üç eleman seçilir. $\min(b_1 + b_2 + b_3)$ için $\max(b_4 + b_5)$ olmalıdır.

$$b_1 + b_2 + b_3 \geq 270 - 2 \cdot 79 = 112$$
$$112 + (e_4 + e_5) = 112 + 58 = 170$$

Cevap: d

21.



$$\frac{A(CAF)}{A(EFA)} = \frac{\frac{a \cdot b}{2}}{\frac{b \cdot b}{2}} = \frac{a}{b}$$

Cevap: a

22. $216 = 2^3 \cdot 3^3$ olduğundan $(2 \cdot 3 + 1)(2 \cdot 3 + 1) = 49$ farklı (A, B) ikilisi bulunur.

Cevap: d

23.

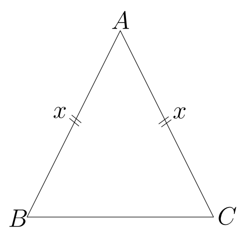
$$\begin{aligned} &= \frac{47^2}{46 \cdot 48} \cdot \frac{48^2}{47 \cdot 49} \cdots \frac{2020^2}{2019 \cdot 2021} \\ &= \frac{47 \cdot 47}{46 \cdot 48} \cdot \frac{48 \cdot 48}{47 \cdot 49} \cdots \frac{2020 \cdot 2020}{2019 \cdot 2021} \\ &= \frac{47}{46} \cdot \frac{2020}{2021} = \frac{1010}{989} \end{aligned}$$

Cevap: b

24. Bir A şehrinin 2 birliğe üye olduğunu düşünürsek bu birliklerden birindeki üye sayısı 50'yi geçer. O zaman her şehir en az 3 birliğe üye olmalıdır. Bu durumda $3 \cdot 100 = 300$ ve $300 : 50 = 6$ birlik kurulabilir. Şehirler $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$ olsun. Şehirleri, 25'erli 4 gruba ayıralım. Bu 4 grubu 2'şerli birleştirerek birlikler oluşturursak istenen şartlar sağlanmış olur. $\binom{4}{2} = 6$ birlik yeterlidir.

Cevap: b

25.



$|AB| = |AC| = x$ olsun. $m(\widehat{BAC}) \geq 90^\circ$ olduğundan $|BC| \leq 10$ olur. $x\sqrt{2} \leq 10$ şartını sağlayan 7 tane x tam sayı değeri vardır.

Cevap: c

26. $ax+by=n$ denkleminin m tane çözümü varsa $ax+by=n+a\cdot b$ denkleminin $m+1$ tane çözümü vardır.

(x_0,y_0) ikilisi $ax+by=n$ denkleminin bir çözümü ise en küçük x_0 ve y_0 değerleri $0\le x_0<b$ ve $0\le y_0<a$ aralığında olur. Tüm bunlardan yola çıkarak

$$\sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{1}(2x+3y+2020\cdot 2\cdot 3)$$

değeri n'nin alabileceği değerler toplamını verir. Toplam 72741 bulunur.

Cevap: d

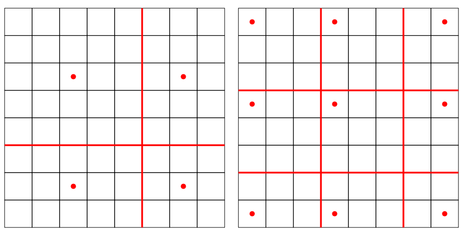
27.

$$\begin{aligned}0\le(2+a+b)^2=4+4(a+b)+(a+b)^2&=8+4a+4b+2ab+a^2+b^2-4\\&=2\cdot(2+a)(2+b)-c^2-d^2\le 2\cdot(2+a)(2+b)-2cd\\&\Rightarrow 2(2+a)(2+b)\ge 2cd\Rightarrow\frac{(2+a)(2+b)}{c\cdot d}\ge 1\end{aligned}$$

bulunur. Örnek olarak $a=b=-1$ ve $c=d=1$ verilebilir.

Cevap: b

28. Tahtayı 4 tane 3×3, 1 tane 2×2 ve 4 tane 2×3 boyutunda dikdörtgene bölebiliriz. Dama sayısı 4'ten az olmaz ve 9'dan fazla olamaz (9 dikdörtgenden birinde birden fazla dama olur).



4 damaya örnek şekil   9 damaya örnek şekil

Cevap: d

29. Taban ve tavan $=2\cdot 20^2=800$
Yan yüzeyler

$$\begin{aligned}&=4\cdot\left(2^2+4^2+\cdots+70^2\right)\\&=4\cdot 2^2\cdot\left(1^2+2^2+\cdots+10^2\right)\\&=16\cdot\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}=6160\end{aligned}$$

Toplam alan$=6160+800=6960$

Cevap: c

30. $x < 0$ ise sağ taraf tam sayı iken sol taraf tam sayı olmaz. Çelişki elde edilir. $x = 0$ ise $2 = y^2$ olur. y tam sayı olmadığından çözüm gelmez. Demek ki $x > 0$ olmalıdır. $p^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$ olduğundan p^x ardışık iki tek veya ardışık iki çift sayının çarpımı olup p asal sayı olduğundan $p^x = (2k-1)(2k+1)\,(y = 2k, k \in \mathbb{Z})$ için $p^x = 1 \cdot 3$ veya $p^x = -3 \cdot (-1)$ olup $x = 1, p = 3$ olur. $(p, x, y) = (3, 1, 2)$ ve $(3, 1, -2)$ çözümleri elde edilir. $p^x = 2k \cdot (2k+2) = 2^2 \cdot k \cdot (k+1)\,(y = 2k+1, k \in \mathbb{Z})$ için $p^x = 2^2 \cdot 1 \cdot 2$ veya $p^x = 2^2 \cdot (-2) \cdot (-1)$ olup $x = 3$ ve $p = 2$ olur. $(p, x, y) = (2, 3, 3)$ ve $(2, 3, -3)$ çözümleri elde edilir. Dolayısıyla 4 farklı (p, x, y) üçlüsü vardır.

Cevap: d

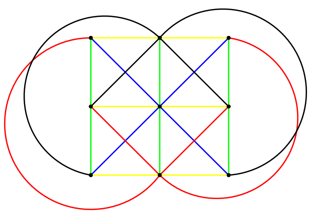
31.

$$\begin{aligned} &2^2 - 1 - 1 + 4^2 - 3^2 - 1 + \cdots + 20^2 - 19^2 - 1 = \\ &\qquad 3 + 7 + 11 + \cdots + 39 - (1 + 1 \cdots + 1) = 210 - 10 = 200 \end{aligned}$$

Cevap: c

32. Herhangi bir A durağını alalım ve buradan en fazla kaç rota geçebileceğini hesaplayalım. A dışında kasabada 8 durak var. A'dan geçen her rotada 2 durak daha var. Bu rotalardan hiçbir ikilinin başka ortak durağı bulunmadığından A'dan geçen rota sayısı k olmak üzere $k \leq 4$ olur.

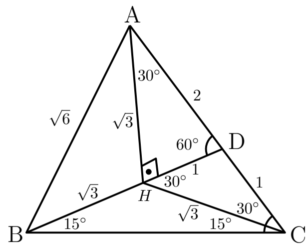
i. duraktan geçen rota sayısı a_i olmak üzere her rotada tam 3 durak bulunduğundan n tüm rotaların sayısı olmak üzere $a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 3n$ ve $a_i \leq 4$ olduğundan $3n \leq 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow n \leq 12$ olur. $n = 12$ için örnek aşağıdaki gibidir.



Cevap: b

Deneme 6

1. A'dan BD'ye inilen dikme ayağına H diyelim. AHD üçgeni $30°, 60°, 90°$ üçgeni olduğundan $|HD| = 1$ ve $|AH| = \sqrt{3}$ olur. $[HC]$ çizilirse $\overset{\triangle}{HDC}$'ni ve $\overset{\triangle}{BHC}$'ni ikizkenar olur. $|HC| = |BH| = \sqrt{3}$ ve buradan $\overset{\triangle}{AHB}$'ninin ikizkenar dik üçgen olduğu görülür. $|AB| = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6}$ bulunur.



Cevap: e

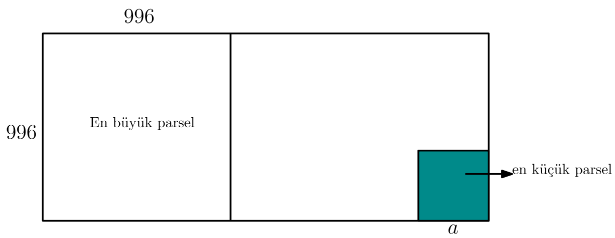
2. Ayla'nın yaşı iki basamaklı AB sayısı olsun. Ceyda'nın yaşı $A + B$ olur.

$$10A + B + 10 = 2(A + B + 10)$$
$$8A = B + 10$$

A ve B rakam olduklarından denklemin tek çözümü vardır. $A = 2$ ve $B = 6$ bulunur. Ayla ve Ceyda'nın yaşları toplamı $26 + 8 = 34$ bulunur.

Cevap: b

3. Az sayıda parsel elde etmek için karenin kenarının en büyük olması gerekiyor. Bu da karenin bir kenar uzunluğunun dikdörtgenin kısa kenar uzunluğuna eşit olması demektir. En büyük parselin 996×996 ebatlarında olduğu açıktır. Bir parsel elde edildikten sonra her seferinde kalan dikdörtgenin kısa kenarı kullanılarak parseller yapılırsa en küçük parselin 4×4 ebatlarında olduğu görülebilir. En küçük parselin bir kenar uzunluğunu bulmak için ebob'da kullanılabilir.



$a = \text{EBOB}(996, 2020) = 4$ olur.

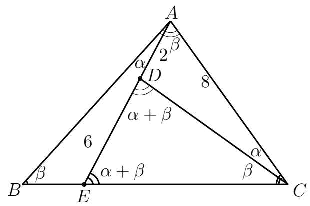
$996^2 - 4^2 = (996 - 4)(996 + 4) = 992000$

Cevap: d

4. Sınıfta 13 kız öğrenci varsa erkek arkadaşlarının sayıları 0'dan 12'ye kadar değerler alabilir. Kız öğrenci sayısı 13'ten fazla olursa en az iki kız öğrencinin erkek arkadaşlarının sayısı aynı olur.

Cevap: e

5.



$m(\widehat{BAE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{EAC}) = \beta$ alınarak verilen açı eşitlikleri yardımıyla açı takibi yapılırsa $m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{EAC}) = m(\widehat{DCE}) = \beta$ ve $|AB| = |BC|$, $|AE| = |AC|$ ve $|DC| = |EC|$ olur. $D\overset{\triangle}{C}E \sim E\overset{\triangle}{A}C \sim A\overset{\triangle}{B}C$ olduğundan $|EC|^2 = 6 \cdot 8 = 48$ olduğundan $|EC| = 4\sqrt{3}$ ve $|AC|^2 = 4\sqrt{3} \cdot |BC|$ olduğundan $|BC| = \frac{16}{\sqrt{3}}$ olur. $|BE| = \frac{16}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ bulunur.

Cevap: c

6. n sayısında birler basamağından itibaren arka arkaya ne kadar çok 9 varsa $n+1$ sayısını oluşturan rakamların toplamı o kadar az olur. Örneğin 199 ve $199 + 1 = 200$ gibi. $S(n) = 224 \cdot 9 + 5$ olduğundan $n = 5\underbrace{99\ldots9}_{224 \text{ tane}}$ olarak yazılabilir. Bu durumda $n + 1 = 6 \cdot 10^{224}$ olur. $S(n+1)$ en az 6 olur.

Cevap: b

7. Ürün fiyatına 100 diyelim.

$$\begin{aligned} (100 + x) - (100 + x) \cdot \tfrac{y}{100} &= 100 \\ 100 + x - y + \tfrac{xy}{100} &= 100 \\ \tfrac{x-y}{xy} = -\tfrac{1}{100} &= -0,01 \end{aligned}$$

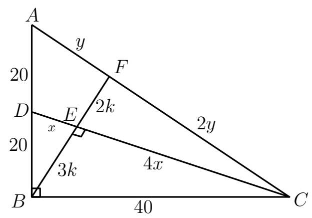
bulunur.

Cevap: a

8. X kümesinin 2 ve 3 elemanlı $\binom{5}{2} = 10$'ar alt kümesi, 1 ve 4 elemanlı $\binom{5}{1} = 5$'er alt kümesi vardır. Aynı elemanlı alt kümelerinden seçilerek herhangi dördü ideal alt küme olacaktır. Bir elemanlı alt kümeler 5 tane olduğu için ideal aile kümesi yapmak için 4 tanesini seçersek $\binom{5}{4} = 5$ tane ideal alt küme yapabiliriz. Bu işlemi 2 elemanlı, 3 elemanlı ve 4 elemanlı alt kümelere uygularsak istenen şekilde $2\binom{5}{4} + 2\binom{10}{4} = 430$ ideal aile vardır.

Cevap: a

9.



$\overset{\triangle}{BDC}$'ninde Öklit bağıntısı yardımıyla $\frac{|DE|}{|EC|} = \frac{1}{4}$ olur. D'den BF'ye paralel çizilerek veya iki defa Menaleus teoremi uygularsak $\frac{BD}{BA} \cdot \frac{AF}{FC} \cdot \frac{CE}{ED} = 1$'den $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ ve $\frac{CF}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EF} = 1$'den $\frac{EF}{BE} = \frac{2}{3}$ olur. Bu durumlar yardımıyla $A(\overset{\triangle}{EFC}) = A(\overset{\triangle}{ABC}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{640}{3}$ bulunur.

Cevap: d

10. Denklem düzenlenirse

$$2021 \cdot (a+b) = a \cdot b$$
$$0 = a \cdot b - 2021 \cdot (a+b)$$

denklemin her iki tarafına 2021^2 ekleyelim.

$$2021^2 = a \cdot b - 2021(a+b) + 2021^2$$
$$2021^2 = (a-2021) \cdot (b-2021) \text{ olur.}$$

$47^2 \cdot 43^2 = (a-2021) \cdot (b-2021)$ elde edilir. Bu sayının $(2+1)(2+1) = 9$ tane pozitif, 9 tane negatif toplam 18 böleninden $(-2021, -2021)$ durumunda elde edilen $(a, b) = (0, 0)$ durumu denklemi sağlamaz. Toplam $18 - 1 = 17$ tam sayı ikilisi için eşitlik sağlanır.

Cevap: c

11. $c = 12 - (a+b), b = 12 - (a+c), a = 12 - (b+c)$ istenen denklemlerde yerine yazılırsa

$$\frac{12-(a+b)}{a+b} + \frac{12-(b+c)}{b+c} + \frac{12-(a+c)}{a+c}$$
$$12\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c}\right) - 3 = 12 \cdot \frac{1}{3} - 3 = 1$$

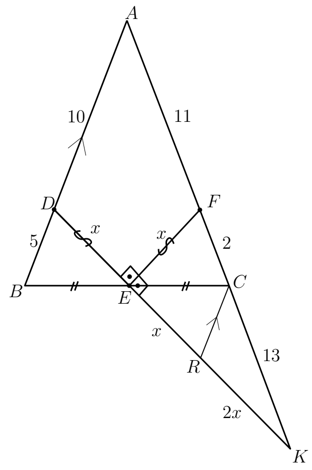
bulunur.

Cevap: b

12. (iii) dolayısıyla bu kümeler ayrık fakat (ii)'den bileşimleri X olmalıdır. O zaman X kümesindeki her eleman için 2 durum vardır. Her eleman ya A kümesinde ya da B kümesindedir. Fakat $\{A, B\} = \{B, A\}$ olduğundan her küme ailesi 2 kere sayılmış olur. Dolayısıyla $\frac{2^{99}}{2} = 2^{98}$ küme ailesi vardır.

Cevap: b

13.



$|DE| = |EF| = x$ ve $DE \cap FC = K$ olsun. C'den AB'ye çizilen paralelin EK'yi kestiği nokta R olsun. $RC \parallel BD$ ve $BE = EC$ olduğundan $|DE| = |ER| = x$ ve $|RC| = 5$ olur. Ayrıca RC, ADK üçgeninde orta tabandır. Bu durumda $|CK| = 13$ ve $|DR| = |RK| = 2x$ olduğundan $\frac{|EK|}{|DE|} = 3$ bulunur. $\overset{\triangle}{FEK}$'ninde Pisagor teoreminden $x = \frac{15}{\sqrt{10}}$ ve $\overset{\triangle}{DEF}$'ni ikizkenar dik üçgen olduğundan $|DF| = 3\sqrt{5}$ bulunur.

Cevap: c

14. x ile y sayıları 5'in katı ise $5 \cdot 4 = 20(x \neq y)$ durum vardır. Aksi taktirde 5'in katı olmayan her bir x sayısı için onunla toplandığında toplamı 5'in katı olan 5 tane y sayısı vardır (Örneğin: $x = 1$ için $y = 4, 9, 14, 19, 24$). Verilen şartı sağlayan $20 \cdot 5 = 100$ durum vardır.

Toplam $100 + 20 = 120$ tam sayı ikilisi vardır.

Cevap: d

15. Denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) + 3(x + y + z) = 70$$
$$(x + y + z)^2 + 3(x + y + z) = 70$$

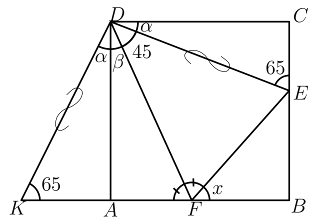
$x+y+z = a$ olsun. İfade $a^2+3a-70 = 0$ halini alır. Bu denklem çarpanlarına ayrılırsa $(a+10)\cdot(a-7) = 0$ olur. Buradan $x + y + z = -10$ ve $x + y + z = 7$ bulunur. $x + y + z$'nin en büyük değeri 7'dir.

Cevap: c

16. Erkek öğrenci sayısı n ve kız öğrenci sayısı m olsun. Arkadaşlık sayıları $3n$ ve $5m$ olur. $3n = 5m$ olduğundan $n = 5k$ ve $m = 3k$ olur. Öğrenci sayısı $8k$ yani 8'in katı bulunur. Örneğin 3 kız 5 erkekten oluşan bir grupta tüm kızlar tüm erkeklerle arkadaş olsun. Bu şekilde 5 tane grup alırsak istenen sayıya ulaşılmış olur.

Cevap: e

17.



$\overset{\triangle}{ECD}$'nine eş $\overset{\triangle}{KAD}$'ni çizilir. $m(\widehat{EDC}) + m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{KDA}) + m(\widehat{ADF}) = 45°$'dir. $|KD| = |ED|$ ve $m(\widehat{KDF}) = m(\widehat{FDE}) = 45°$ olduğundan $\overset{\triangle}{KDF} = \overset{\triangle}{EDF}$ olur. $m(\widehat{KFD}) = m(\widehat{EFD}) = 70°$ ve $m(\widehat{EFB}) = 40°$ bulunur.

Cevap: d

18. $n = 2^{x_1} \cdot 3^{x_2} \cdot 5^{x_3} \ldots$ biçiminde ($x_i \in \mathbb{N}$) genel olarak ifade edilebilir. $x_1 = 0$ olduğunda n'nin en büyük değer alacağı açıktır. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$'de $a - b$ ve $a + b$ çarpanları çift olmalıdır. $(x_1 - 1) \cdot (x_2 + 1) \cdot (x_3 + 1) \cdots = 24$ olduğundan n'nin en küçük değeri için $x_1 - 1 = 4$ ve $x_1 = 5$, $x_2 + 1 = 3$ ve $x_2 = 2$, $x_3 + 1 = 2$ ve $x_3 = 1$ olmalıdır. $n = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1440$ olur. $1440 \equiv 10 \pmod{11}$.

Cevap: e

19. Denklem düzenlenirse $(2x-1)(x-y) = 2 \cdot (5+4x)$ olur. $2x - 1 \mid 5 + 4x$ ve $2x - 1 \mid 5 + 4x - 2(2x-1) = 7$ olmalıdır.
$2x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1$ ve $y = -17$
$2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$ ve $y = 10$
$2x - 1 = 7 \Rightarrow x = 4$ ve $y = -2$
$2x - 1 = -7 \Rightarrow x = -3$ ve $y = -5$
olmak üzere 4 tane ikili bulunur.

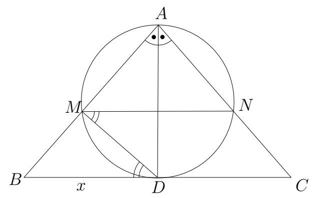
Cevap: b

20. Önce A'nın dışındaki harfleri dizelim. Sonra da A harflerini yerleştirebileceğimiz 9 yerden 5 tanesini seçelim.

$$\frac{8!}{2! \cdot 2!} \cdot \binom{9}{5} = 10080 \cdot 126 \equiv 4 \cdot 5 \equiv 9 \pmod{11}$$

Cevap: a

21.



$|BD| = x$ ve $|DC| = 8-x$ olsun. Açıortay teoreminden $\frac{9}{x} = \frac{7}{8-x}$'den $|BD| = \frac{9}{2}$ bulunur. B'den çembere göre kuvvet alınırsa $|BD|^2 = |BM| \cdot |BA|$, $(\frac{9}{2})^2 = |BM| \cdot 9$'dan $|BM| = \frac{9}{4}$ ve $|MA| = \frac{27}{4}$ olur. Aynı yayı gören çevre açı ve teğet kiriş açıların eşitliğinden $m(\widehat{NMD}) = m(\widehat{MDB}) = m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAC})$ ve $MN \parallel BC$ olur. $\overset{\triangle}{AMN} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ olduğundan temel orantı teoremi kullanılırsa, $\frac{|MA|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|BC|}$, $\frac{\frac{27}{4}}{9} = \frac{|MN|}{8}$ eşitliğinden $|MN| = 6$ bulunur.

Cevap: a

22. $2021^{2021} \equiv 5^{2021} \equiv (-2)^{2021} \equiv (-2) \cdot 2^{2020} \equiv -2 \cdot 2 \cdot 2^{2019}$
$-4 \cdot \left(2^3\right)^{673} \equiv -4 \cdot 8^{673} \equiv -4 \cdot 1^{673} \equiv -4 \equiv 3(\text{mod}7)$

Cevap: d

23.

$$\frac{k^2-2}{k!} = \frac{k^2+k-k-2}{k!} = \frac{k(k+1)}{k!} - \frac{k+2}{k!} = \frac{k+1}{(k-1)!} - \frac{k+2}{k!} \Rightarrow$$
$$S = \frac{3}{1!} - \frac{4}{2!} + \frac{4}{2!} - \frac{5}{3!} + \cdots + \frac{2021}{2019!} - \frac{2022}{2020!}$$

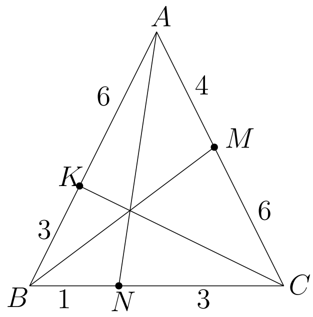
$S = 3 - \frac{2022}{2022!} = 2, \ldots$ olduğundan istenen değer 2'dir.

Cevap: b

24. $n = 23$ ise 4. ve 11. halkaları keserek 1, 1, 3, 6 ve 12 parçalı 5 zincir elde edilebilir (1 parçadan oluşanlar kesik halkalar). İlk gün 1. kesik halkayı ikinci gün 2. kesik halkayı verip üçüncü gün kesik halkaları alıp 3 parçadan oluşan halkayı verir. 6. gün otel ücretinin ödenebilmesi için parçalardan bir başkası en fazla 6 halkadan oluşmalıdır. 12. gün otel ücretinin ödenebilmesi için parçalardan üçüncüsü en fazla 12 halkadan oluşmalıdır. böylece halka sayısı $1+1+3+6+12 = 23$'ten fazla olamaz.

Cevap: d

25.



Seva teoremi kullanılarak $\frac{|BK|}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{1} = 1$ olduğundan $|BK| = 3$ bulunur. $\overset{\triangle}{ABC}$'ni ve $\overset{\triangle}{KAC}$'ninde Kosinüs teoremi uygulanarak veya Stewart teoreminden

$$|KC|^2 = \frac{10^2 \cdot 3 + 4^2 \cdot 6}{3+6} - 3 \cdot 6$$
$$|KC| = \sqrt{26} \text{ bulunur.}$$

Cevap: d

26. $f(n) = \lfloor \sqrt[n]{5000} \rfloor \quad 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096$
$f(2) = 70,\ f(3) = 17,\ f(5) = 5,\ f(7) = 3,\ f(11) = 2,\ f(6) = 4,\ f(10) = 2$ olur.

$70 + 17 + 5 + 3 + 2 - (4 + 2) = 91$ olur. Ancak 1'i üç kez saydık. $91 - 3 = 88$. Değer verilerek $2^2, 2^3, \ldots 2^{12}, 3^2, \ldots, 3^7, 4^2, \ldots, 4^6, \ldots, 70^2 \leq 5000$ olduğu görülebilir.

Cevap: a

27. Denklem düzenlenirse $y^2 = a^2x^2 - a^2 + 1 \leq a^2x^2$

$$y^2 < a^2x^2 \Rightarrow y < ax, \quad y \leq ax - 1,$$
$$a^2x^2 - a^2 + 1 = y^2 \leq (ax-1)^2 = a^2x^2 - 2ax + 1$$
$$2ax \leq a^2 \text{ ve } \frac{a}{x} \geq 2 \text{ olur.}$$

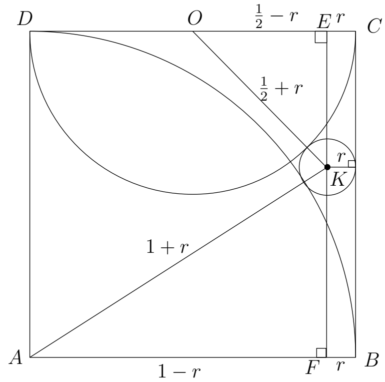
Örneğin $x > 100$, $a = 2x$, $y = ax - 1 = 2x^2 - 1$ verilebilir.

Cevap: d

28. Herkes 8 kişiyi eleştirirse $15 \cdot 8 = 120$ eleştiri yapılmış olur. Bu da $\binom{15}{2} = 105$'ten büyüktür. Dolayısıyla birbirini eleştiren iki kişi daima bulunur. Öte yandan 15 kişi yuvarlak bir masa etrafına oturtulduğunda herkes sağındaki 7 kişiyi eleştirdiğinde karşılıklı olarak birbirini eleştiren kimse bulunmaz.

Cevap: c

29.



$\overset{\triangle}{OEK}$'ni ve $\overset{\triangle}{KFA}$'ninde Pisagor teoremi kullanılırsa,

$$\sqrt{(1+r)^2-(1-r)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{2}+r\right)^2-\left(\frac{1}{2}-r\right)^2}=1$$

$$2\sqrt{r}+\sqrt{2r}=1$$

$$\sqrt{r}=\frac{1}{2+\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$r=\frac{3-2\sqrt{2}}{2} \text{ ve } 2r=3-2\sqrt{2}$$

bulunur.

Cevap: b

30. Denklem $\pmod 2$'de incelenirse $n^4-2n^3-n^2+2n+2 \equiv n^4-n^2 \equiv n^2\left(n^2-1\right) \equiv 0 \pmod 2$ olduğundan $n^4-2n^3-n^2+2n+2=2 \Rightarrow n^4-2n^3-n^2+2n=0$
$n(n-1)(n+1)(n-2)=0$ olduğundan denklemini sağlayan n tam sayılarının toplamı $0+1+(-1)+2=2$ bulunur.

Cevap: c

31. $a_1=1, a_2=2020, a_3=2, a_4=2019, \ldots a_{2019}=1010$ ve $a_{2020}=1011$ alınırsa, buradan istenen toplam $1+2+3+\cdots+2019+1010=\frac{2019\cdot 2020}{2}+1010=1010\cdot 2020$ bulunur.

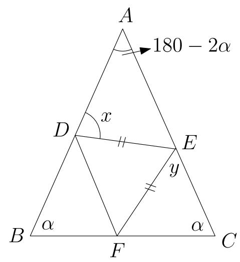
Cevap: b

32. Ali 1010 yazarsa kazanmayı garantiler çünkü Betül'ün yazacağı sayı $1011, \ldots, 2019$ sayılarından biri olmak zorundadır. Ali 2010 yazdığında kazanıyorsa 1010 yazabilmek için 505 yazar. Bu durumda Betül $506, \ldots, 1009$ sayılarından birini yazmak zorunda kalır. Bu şekilde devam edilirse Ali'nin 2021, 1010, 505, 252, 126, 63, 31, 15, 7 ve 3 sayılarından biriyle oyuna başlarsa kazanmayı garantilediği görülür.

Cevap: a

Deneme 7

1.



$x + y = 130°$. $m(\widehat{B}) = m(\widehat{C}) = \alpha$ olsun. $m(\widehat{BAC}) = 180 - 2\alpha$. $m(\widehat{DEF}) = 180 - 2\alpha + x - y$. $m(\widehat{DFE}) = \frac{2\alpha - x + y}{2}$. $m(\widehat{DFB}) + \frac{2\alpha - x + y}{2} = y + \alpha$, $2m(\widehat{DFB}) = 130°$, $m(\widehat{DFB}) = 65°$.

Cevap: e

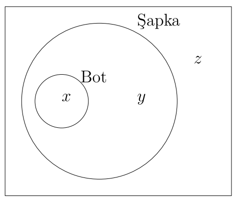
2.

$$\begin{aligned} &a^2 = b^2 + 7b \\ &4a^2 = 4b^2 + 28b + 49 - 49 \\ &(2a)^2 = (2b+7)^2 - 49 \\ &(2b+7)^2 - (2a)^2 = 49 \\ &(2b+7+2a)(2b+7-2a) = 49 \end{aligned}$$

$2b + 7 + 2a = 49$ ve $2b + 7 - 2a = 1$ olduğundan $b = 9$ ve $a = 12$ bulunur. Bir tane (a, b) sayı ikilisi vardır.

Cevap: b

3.



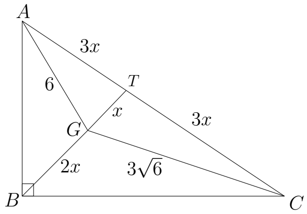
Şapka giyemeyen kişilerin sayısı $z = 2$'dir. $x + y + z = 16$, $y + z = 10$, $y = 8$ (şapkası olup bot giymeyenler). $x = 6$ (bot giyenler). $y - x = 8 - 6 = 2$.

Cevap: a

4. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. $A < B < C < D$ $\binom{6}{4} = 15$
$A = B < C < D$ ve $A < B < C = D$ $2 \cdot \binom{6}{3} = 40$
$A = B < C = D$ $\binom{6}{2} = 15$
$15 + 40 + 15 = 70$

Cevap: c

5.



$BG \cap AC = T$ olsun. $AT = TC = BG$ ve $2|GT| = |BG|$'dir. AGC üçgeninde kenarortay formülü uygulanırsa

$$2 \cdot x^2 = 6^2 + (3\sqrt{6})^2 - \frac{(6x)^2}{2}$$
$$20x^2 = 36 + 54 = 90$$
$$x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$
$$|BG| = 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

Cevap: c

6.

$$m^2 - n^2 - 2n - 1 = 2020$$
$$m^2 - (n+1)^2 = 2020$$
$$(m-n-1)(m+n+1) = 2070$$

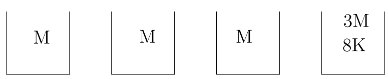
$m-n-1 = 2$ ve $m+n+1 = 1010$ olduğundan $m = 506, n = 503$ bulunur.
$m-n-1 = 10$ ve $m+n+1 = 202$ olduğundan $m = 106, n = 95$ bulunur.
2 tane (m,n) pozitif tam sayı ikilisi vardır.

Cevap: c

7. Ali eve planlanandan 10 dk erken geldi. Bu süre içinde araç Ali'nin yürüdüğü yolu iki kere geçerdi. Dolayısıyla araç istasyona giderken 5 dk tasarruf etmiştir. Ali ile 17.55'de karşılaştı. Demek ki Ali istasyondan babası ile karşılaşana kadar 50 dk yürüdü. Bu yol araçla 5 dk'lık mesafe idi. Dolayısıyla Ali'nin hızı aracın hızının 1/10'u kadar yani 6 km/saat'tir.

Cevap: c

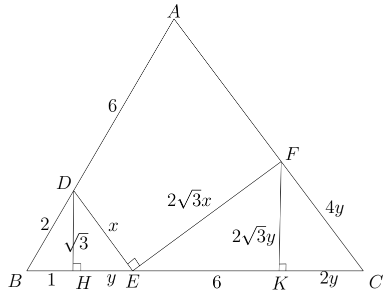
8. Kırmızı toplar bir kutuda toplanır.



Kırmızı olma olasılığı $\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{11} = \frac{2}{11}$
Mavi olma olasılığı $1 - \frac{2}{11} = \frac{9}{11}$ olur.

Cevap: d

9.



D ve F'den BC'ye dikme ayaklarına H ve K dersek $\overset{\triangle}{DHE} \sim \overset{\triangle}{EKF}$ olur. $|HE| = y$, $|FK| = 2\sqrt{3}y$, $|KC| = 2y$ ve $|FC| = 4y$ olur. $2+6 = 1+y+6+2y$ olduğundan $y = 1/3$ ve $|AF| = 8-4y = 8-\frac{4}{3} = \frac{20}{3}$ bulunur.

Cevap: d

10. $p^2 + 2p - 8 = (p+4)(p-2)$ ifade asal ise çarpanlarından biri 1 olmalı. $p - 2 = 1 \Rightarrow p = 3$.
$p = 3$ için $p^2 + 2p - 8 = 7$ ve $p + 2 = 5$ olur.
$p + 4 = 1$, $p = -3$ olur. -3 asal olmadığından çözüm gelmez.
Tek çözüm $p = 3$'tür.

Cevap: a

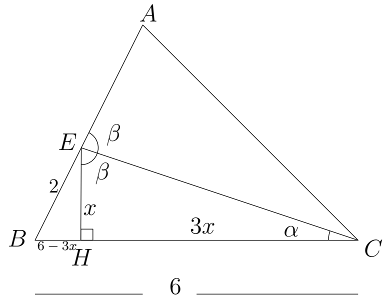
11. Vagon numarası $< x$ ve vagon numarası $= y$ olması için cumartesi ve pazartesi günlerinin farklı aylarda bulunması gerekir. Ahmet 50 saat yani 2 günden fazla seyahat ettiği için pazartesi ayın birinci veya ikinci günü olabilir. Yani vagon numarası 1 veya 2'dir. Vagon numarası 1 olmaz çünkü koltuk numarasının vagon numarasından küçük olduğu biliniyor. Buradan Ahmet'in ikinci vagon bir numaralı koltukta seyahat ettiği çıkar. $1 + 2 = 3$.

Cevap: a

12. 100 top çekildiğinde 4 farklı renkten top çekilmesi garantileniyorsa kalan 11 top ve 100 toptan birinin aynı renkte olması gerekir. $11+1 = 12$ bu aynı zamanda herhangi bir renkteki minumum top miktarıdır. Diğer iki renkten 12'şer top ve son renkten 75 top olmalıdır. $75 + 12 + 12 + 12 = 111$. Üç farklı renkte top çekmeyi garantileyebilmek için en az $75 + 12 + 1 = 88$ top çekilmelidir.

Cevap: e

13.



$\alpha + \beta = 90°$. E'den BC'ye inilen dikme ayağı H olsun. EC, $\overset{\triangle}{BEH}$'ninde dış açıortay olur. $3|EH| = |HC| = 3x$. $\overset{\triangle}{EBH}$'ninde Pisagor teoreminden

$$\begin{gathered} 2^2 = x^2 + (6-3x)^2 \\ 4 = x^2 + 36 + 9x^2 - 36x \\ 10x^2 - 36x + 12 = 0 \\ 5x^2 - 18x + 16 = 0 \end{gathered}$$

$(5x-8)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{5}$ bulunur. $\overset{\triangle}{EHC}$'ninde Pisagor teoreminden $|EC| = \frac{8\sqrt{10}}{5}$ olur.

Cevap: c

14.

$$\begin{aligned} 4^4 \cdot \left(14^4 - 5^4\right) &= 2^8 \cdot \left(14^2 + 5^2\right)(14-5)(14+5) \\ &= 2^8 \cdot 3^2 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \end{aligned}$$

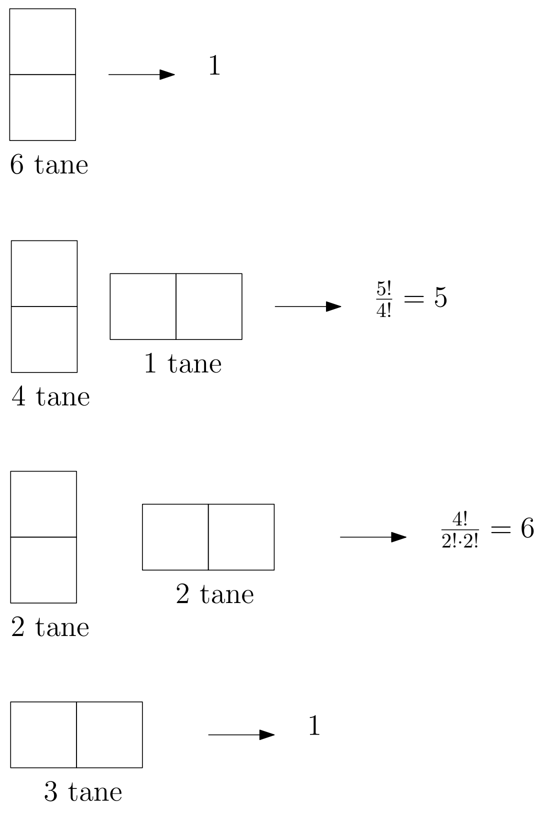
$$(8+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = 216$$

Cevap: c

15. Sayı n olsun. $n^2 = A$, $\frac{n}{n} = B = 1$, $n - n = C = 0$, $n + n = D$. $A + B + C + D = n^2 + 1 + 0 + 2n = (n+1)^2$. Toplam tam kare olmalı. Şıklarda tam kare olan seçenek $45^2 = 2025$'dir.

Cevap: e

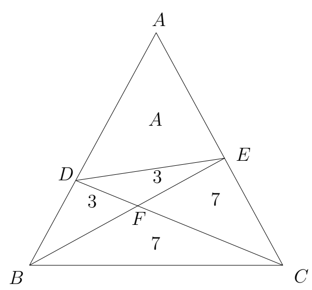
16.



$1+5+6+1=13$

Cevap: c

17.



$A(DFE)=3$ ve $A(\overset{\triangle}{ADE})=A$ olsun.

$$\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{A}{10}=\frac{A+6}{14}$$
$$7A=5A+30$$
$$A=15$$
$$A(ADFE)=15+3=18$$

Cevap: d

18.

$$5 \cdot 2^m = n^2 - 1 = (n-1) \cdot (n+1)$$
$n - 1 = 10$ veya $n + 1 = 10$ olmalıdır.
$n = 11 \Rightarrow 5 \cdot 2^m = 10 \cdot 12$ ve $m \notin \mathbb{Z}$ olur.
$n = 9 \Rightarrow 5 \cdot 2^m = 8 \cdot 10$ ve $m = 4$ olur.
$(m, n) = (4, 9)$ tek çözüm vardır.

Cevap: b

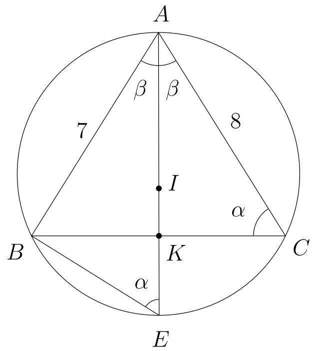
19. 10. sınıf öğrencileri a kişi ve aldıkları toplam puan b olsun. 11. sınıf öğrencileri $10a$ kişi ve aldıkları toplam puan $4,5b$ olur. Katılımcı sayısı $10a + a = 11a$ kişidir. Her öğrenci bir diğeriyle maç yaptığı için yapılan toplam maç sayısı $\frac{11a \cdot (11a-1)}{2}$'dir. Her maçta katılımcılar toplamda 2 puan aldığından kazanılan tüm puanların toplamı $11a \cdot (11a - 1) = b + 4,5b$ olur. $2a(11a - 1) = b$'dir. Her katılımcının $11a - 1$ maç yaptığı turnuvada 10. sınıf öğrencileri $a(11a - 1)$ maç ve bu maçlar sonucunda en fazla $2a(11a - 1)$ puan alabilirler. Bu da bize 10. sınıf öğrencilerinin yaptıkları tüm maçları kazandıklarını gösterir. Birden fazla 10. sınıf öğrencisi olsaydı bazıları birbirini yenmiş olurdu. Bu da mümkün değil demek ki 1 tane 10. sınıf öğrencisi var ve aldığı puan $2(11 - 1) = 20$ bulunur.

Cevap: d

20. A ve B kişileri görüşmemiş olsun. Herhangi başka bir C ve D ikilisini ele alalım. Bunlar daha görüşmemişse A, B, C ve D dörtlüsünde geriye kalan üç kişiyle görüşmüş olan biri bulunamaz. Bu çelişkidir (Aynı anda birbiriyle görüşmemiş olan iki tane ikili olamaz). Dolayısıyla görüşme yapmamış olan her ikilide A veya B bulunuyor. A'nın B dışında görüşmemiş olduğu bir C kişisi bulunsun. D geriye kalan diplomatlardan herhangi biri olmak üzere A, B, C, D dörtlüsünü alalım. A kişisi B ve C ile görüşmediği için bu şekildeki her dörtlüde D herkesle görüşmüştür. Böylece A ile B kişileri C dışında herkesle görüşmüştür. Dolayısıyla görüşme yapmayan ikili (B,C) olabilir. Böylece en fazla üç tane görüşme yapmayan ikili olabilir. (A,B), (A,C), (B,C)

Cevap: a

21.



İç teğet çemberin merkezi I olmak üzere $I \in [AE]$'dir. $BC \cap AE = K$ olmak üzere $|KC| = \frac{9}{15} \cdot 8 = \frac{24}{5}$. $m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{AEB})$ aynı yayı gören çevre açılar. $\overset{\triangle}{ACK} \sim \overset{\triangle}{AEB}$ ve $|BE| = |IE|$ olduğundan $\frac{AE}{IE} = \frac{AE}{BE} = \frac{8}{\frac{24}{5}} = \frac{5}{3}$.

Cevap: a

22. Eşitliğin sol tarafı düzenlenirse,

$$n^4 + 2n^3 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = m^2$$
$$n^2\left(n^2 + 2n + 1\right) + \left(n^2 + 2n + 1\right) = m^2$$
$$(n+1)^2 \cdot \left(n^2 + 1\right) = m^2$$

$n^2 + 1 = k^2$ olmalıdır. $k^2 - n^2 = 1$

$$k^2 - n^2 = (k-n)(k+n) = 1$$

$k - n = 1$ ve $k + n = 1 \Rightarrow (k, n) = (1, 0)$

$k - n = -1$ ve $k + n = -1 \Rightarrow (k, n) = (-1, 0)$ olur.

$(m, n) = \{(1,0), (-1,0), (0,-1)\}$ üç tane ikili vardır.

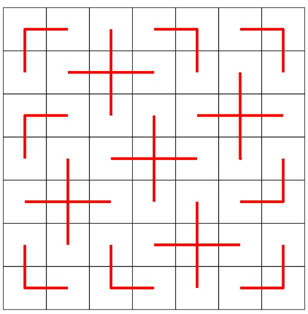
Cevap: d

23. $2020 = x$ denilirse

$$\frac{\left[(x+10)^2 - 10x\right] \cdot 100 \cdot (x-10)(x+10) \cdot \left[(x-10)^2 + 10x\right]}{x^6 - 10^6}$$
$$\frac{100 \cdot \left(x^3 - 10^3\right) \cdot \left(x^3 + 10^3\right)}{x^6 - 10^6} = 100$$

Cevap: b

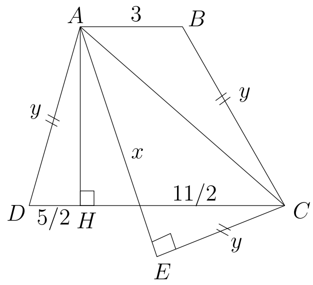
24.



5 tane kullanılabilir.

Cevap: b

25.



$AD = BC = EC = y$ ve $AE = x$ olsun. A'dan DC'ye inilen dikme ayağı H olsun. $DH = \frac{5}{2}$ ve $HC = \frac{11}{2}$. ADH, AHC ve AEC üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$y^2 - \frac{25}{4} + \frac{121}{4} = x^2 + y^2$$
$$x^2 = \frac{96}{4} = 24$$
$$x = 2\sqrt{6} \text{ bulunur.}$$

Cevap: b

26. $391 = 17 \cdot 23$ olduğundan

$$A = 17 \cdot 27 \cdot 2021^{37} + 17 \cdot 19 \cdot 2021^{15} \equiv 0(\text{mod} 17)$$
$$A = 17 \left(27 \cdot 2021^{37} + 19 \cdot 2021^{15}\right) \equiv ?(\text{mod} 23)$$
$$A = 17 \left(4 \cdot 2021^{15} \cdot 2021^{22} + 19 \cdot 2021^{15}\right) = 17 \cdot 23 \cdot 2021^{15} \equiv 0(\text{mod} 23) \text{ olduğundan}$$
$$A \equiv 0(\text{mod} 391) \text{ bulunur.}$$

Cevap: a

27. Denklem düzenlenirse

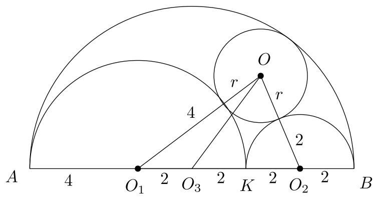
$$x^2 + y^2 + 22x - 26y + 290 = 0$$
$$(x+11)^2 + (y-13)^2 = 0 \quad x = -11 \text{ ve } y = 13 \text{ bulunur.}$$
$$x \cdot y = -11 \cdot 13 = -143$$

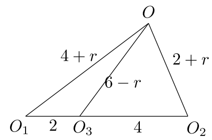
Cevap: a

28. Her adımda tahtadaki sayı adedi 7 azalacaktır. 14 adım sonra tahtada 2 sayı kalır. Farklarının en çok olması için biri 1 olsun. Diğeri diğer sayıların toplamının $14 \cdot 5 = 70$ fazlasıdır. $2 + 3 + \cdots + 100 + 70 = 5119$. İstenen fark $5119 - 1 = 5118$ bulunur.

Cevap: e

29.





$[AK], [KB], [AB]$ çaplı çemberlerin merkezleri sırasıyla O_1, O_2, O_3 ve yarıçapı sorulan çemberin merkezi O olsun. Merkezler ikişerli olarak birleştirilerek elde edilen şekilde stewart teoremi kullanılarak $r = \frac{12}{7}$ bulunur.

Cevap: c

30. $85282 < k < 85382 \quad \left(k^5 < (85282+100)^5\right)$ olduğunu görüyoruz.
$k^5 \equiv 1+0+1+1 \equiv 0 \pmod 3 \Rightarrow k \equiv 0 (\mathrm{mod} 3)$
$k^5 \equiv 0+3+(-1)+2 \equiv 4(\mathrm{mod} 5) \Rightarrow k \equiv 4(\mathrm{mod} 5)$
$k^5 \equiv -1-1+1+0 \equiv 7(\mathrm{mod} 8) \Rightarrow k \equiv 7(\mathrm{mod} 7)$ (k tek sayıdır.)

$$k = 852a9 \Rightarrow a = 9 \text{ ve}$$
$$k = 853a9 \Rightarrow a = 2, 5, 8 \text{ olabilir.}$$

(mod 8)'de bulunan değerler kontrol edilerek ($k < 85382$) $k = 85359$ bulunur.

Cevap: c

31. $$x^4 + y^4 = 1 \Rightarrow |x| \le 1 \text{ ve } |y| \le 1\text{'dir.}$$

İlk eşitliğin sağlanması için x ve y'den en az birinin pozitif olması gerekir. $0 < x \le 1$ olsun. O halde $0 < x^3 \le 1$ ve $0 \le y < 1$ olmalı. $0 < x \le 1$ ve $0 \le y < 1$ olduğundan $x^4 \le x^3$ ve $y^4 \le y^3$ eşitsizliklerinin eşitliğe dönüşmesi sadece $x = 1$ ve $y = 0$ durumunda olur. $(1, 0)$ bir çözümdür. Simetri dikkate alınarak $(0, 1)$'in diğer çözüm olduğu görülür.

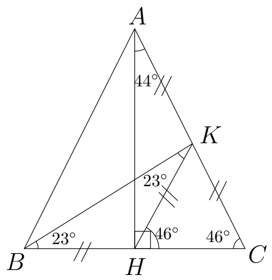
Cevap: a

32. Sayının 12 ile tam bölünebilmesi için 3 ve 4 ile tam bölünmelidir. Her durumda sayının 4 ile bölünebilmesi için kullanılan rakamlar 4 ve 8 olmalı. 3 ile tam bölünebilmesi için rakamlar toplamı 3'ün katı olmalı yani sayının 4 basamağı 4 ve 4 basamağı 8 olmalıdır. Sayının 11'e bölünebilmesi için $(84, 84, 48, 48)$, $(44, 44, 88, 88)$ ve $(88, 44, 84, 48)$ gruplandırmalarını kullanalım. $\frac{4!}{2! \cdot 2!} + \frac{4!}{2!+2!} + 4! = 36$ tane sayı yazılabilir.

Cevap: c

Deneme 8

1. $[HK]$ çizilirse dik üçgende hipotenüse ait kenarortay hipotenüsün yarısına eşit olduğu için $|AK| = |KC| = |HK| = |BH|$ olur. BHK ve HKC ikizkenar üçgenleri kullanılarak $m(\widehat{C}) = 46°$ ve AHC dik üçgeninden $m(\widehat{HAC}) = 45°$ bulunur.



Cevap: b

2. $A = (29+1)^4 = 30^4 = 3^4 \cdot 2^4 \cdot 5^4$
$(4+1)(4+1)(4+1) = 125$

Cevap: a

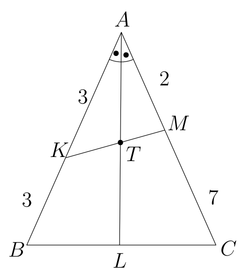
3. $90 \cdot \frac{70}{100} = 63$ bilyeden fazlasını dağıtmak istiyor. $50 \cdot \frac{82}{100} = 41$ misket dağıttı.
$41 + x > 63$, $x > 22$
Arkadaşlarına en az 23 misket dağıtmalıdır.

Cevap: c

4. Küpün 12 ayrıtı her gruptaki ayrıtlar paralel olacak şekilde 3 gruba ayrılabilir. Paralel olma olasılığı $\frac{3 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{3}{11}$, paralel olmama olasılığı $1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$ bulunur.

Cevap: d

5.



$\overset{\triangle}{KAM} \sim \overset{\triangle}{CAB}$ (KAK benzerliği). Benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ olur. Benzer üçgenlerin açıortayları oranı benzerlik oranına eşit olduğundan $\frac{AT}{AL} = \frac{1}{3}$ ve $\frac{AT}{TL} = \frac{1}{2}$ bulunur.

Cevap: a

6. 99 ile bölünebilmesi için 2'lerin sayısı 9'un katı (9 ile bölünebilme) ve 2'lerin sayısı aynı zamanda çift olmalı (11 ile bölünebilme). 18 basamaklı $222\dots2$ sayısı istenen şartı sağlar.

$$2^{18} = 2^{10} \cdot 2^8 \equiv 2^8 (\mathrm{mod} 11)$$
$$\left(2^4\right)^2 \equiv 5^2 \equiv 3 (\mathrm{mod} 11)$$

Cevap: b

7. Bir kutunun ağırlığı m olsun. $m \mid 2600$ ve $m \mid 6500$ olmalıdır. $\mathrm{obeb}(6500, 2600) = 1300$ olduğundan $m \mid 1300$ olmalıdır. Ayrıca $300 \leq m \leq 400$ olduğunu biliyoruz. $m = 325$ olduğu görülür. Baba $6500 : 325 = 20$ kutu, oğul $2600 : 325 = 8$ kutu taşıyor. $20 + 8 = 28$ kutu taşıyorlar.

Cevap: c

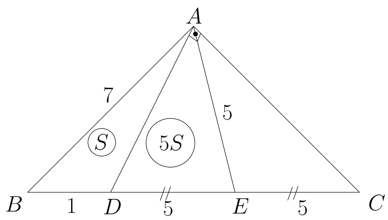
8.

A A A A B B B C C D

Yuvarlak içine alınan 7 harf uygun sıra ile en sağa taşındığında istenen sıralama elde edilir.

Cevap: c

9.



Dik üçgende hipotenüse ait kenarortay çizilirse $5, 6, 7$ üçgeni elde edilir. $A(\overset{\triangle}{ABE}) = 6\sqrt{6}$ (Heron alan formülü). Yükseklikleri eşit üçgenlerin alanları oranı tabanları oranına eşit olduğundan $A(\overset{\triangle}{ABD}) = S$ ve $A(\overset{\triangle}{ADE}) = 5S$ olur. Buradan $A(\overset{\triangle}{ABD}) = \sqrt{6}$ bulunur.

Cevap: d

10. $2a^2 + 2b^2 = 2ab + 14$, $(a-b)^2 + a^2 + b^2 = 14$ olduğuna göre, $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$ olduğundan

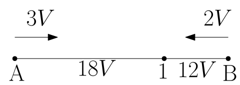
$$\begin{array}{lll} a = 3 & b = 2 & a - b = 1 \\ a = 2 & b = 3 & a - b = -1 \\ a = 1 & b = 3 & a - b = -2 \\ a = 3 & b = 1 & a - b = 2 \end{array}$$

şeklinde 4 tane (a, b) sıralı ikilisi elde edilir.

Cevap: b

11.

İlk karşılaşmalarına kadar geçen süre t olsun. $V_1 \cdot t = 9V_2$ ve $V_2 \cdot t = 4V_1$ olduğundan $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{2}$ bulunur. Bu oran kullanılarak şekildeki veriler tekrar düzenlenirse



1. karşılaşma $30V = 5V \cdot t \Rightarrow t = 6$ saat sonra gerçekleşir. Sonraki her karşılaşma 12 saat sonra gerçekleşir. $6 + 12 + 12 = 30$ saat sonra 3. karşılaşma gerçekleşir.

Cevap: c

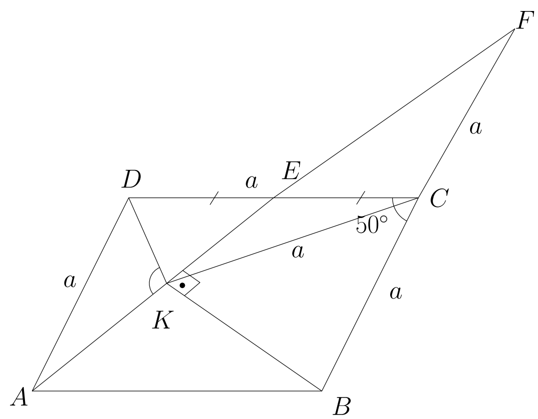
12. $0 \le a \underset{x}{\le} b \underset{y}{\le} c \underset{z}{\le} d \le 6$

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, x, y, z\}$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Cevap: b

13.



$|AD| = |BC| = a$ ve $AE \cap BC = F$ olsun. $\overset{\triangle}{ADE} \sim \overset{\triangle}{FCE}$ ve benzerlik oranı $\frac{DE}{EC} = 1$ olduğundan $|FC| = a$ olur. $m(\widehat{FKB}) = 90°$, $|BC| = |FC| = a$ olduğundan $|KC| = a$'dır. $BCDK$ dörtgeninde DCK ve BCK ikizkenar üçgenleri kullanılarak $m(\widehat{BKD}) = 155°$ bulunur. $m(\widehat{AKD}) = 360° - (155° + 90°) = 115°$ bulunur.

Cevap: d

14. $p > 2$ ve $q > 2$ için $T + T =$ Çift olduğundan $p^q + q^p = 2$ olamaz. $p = 2$ ise $2^q + q^2 \overset{q=3 \text{ için}}{=} 2^3 + 3^2 = 17 \Rightarrow (p,q) = (2,3), (3,2)$ bulunur. $p > 3$ için

$$2^q + q^2 \equiv ? \pmod 3$$
$$(-1)^q + 1 \equiv 0 \pmod 3$$

olduğundan başka çözüm yoktur.

Cevap: b

15.
$$\left.\begin{aligned} a - \frac{1}{a} &= b \\ b - \frac{1}{b} &= c \\ c - \frac{1}{c} &= a \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0 \quad \left.\begin{aligned} a^2 + \frac{1}{a^2} - 2 &= b^2 \\ b^2 + \frac{1}{b^2} - 2 &= c^2 \\ c^2 + \frac{1}{c^2} - 2 &= a^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 6$$

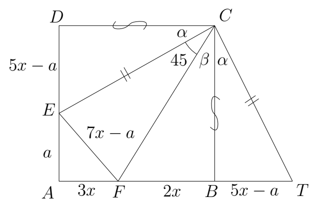
$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) = 0$$
$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc} = -3 \text{ bulunur.}$$

Cevap: a

16. Verilen n sayısına olan sayılar toplamları 5'in katı olacak şekilde 2'li gruplara ayıralım. Örneğin $n = 21$ için $(1,4)(2,3)(5,10),(6,9)(7,8)(11,14)(12,13)(15,20)(16,19)(17,18)$ gruplanamayan tek sayımız kalır o da 21'dir. 1. oyuncu önce 21'i siler. Sonraki adımlarda ise 2. oyuncunun sildiği sayının grubundaki diğer sayıyı siler. Bu durumda sona kalan iki sayının toplamı da 5 ile bölünür ve 1. oyuncu kazanır. $n = 21$, $n = 23$ ve $n = 25$ durumlarında 1. oyuncu oyunu kazanmayı garantileyebilir.

Cevap: d

17.



$|AF| = 3x$, $|FB| = 2x$, $|AE| = a$, $m(\widehat{DCE}) = \alpha$ ve $m(\widehat{FCB}) = \beta$ olsun. $\alpha+\beta0 = 45°$'dir. AB üzerinde şekildeki gibi bir T noktası alınarak CDE üçgenine eş CBT üçgeni çizilirse $CTFE$ deltoit olduğundan $|TF| = |EF| = 7x - a$ olur. EAF üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} a^2 + 9x^2 &= 49x^2 + a^2 - 14xa \\ 40x^2 &= 14xa \\ 40x &= 14a \\ 20x &= 7a \\ \frac{5x - \frac{20x}{7}}{\frac{20x}{7}} &= \frac{15x}{20x} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Cevap: c

18. $4^{21} \cdot 5^{21} \equiv 2^{42} \cdot \left(5^3\right)^7 \equiv 2^{42} \cdot 2^7 \equiv 2^{49} \equiv 2^9 \equiv 512 \equiv 20 \pmod{41} \left[2^{20} \equiv 1 \pmod{41} \text{ Fermat teoremi}\right]$

Cevap: b

19. İstenen ifade düzenlenirse

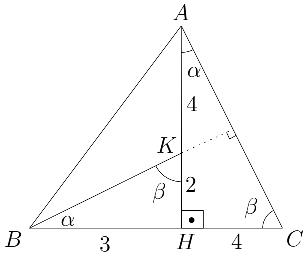
$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 6x + 9}{2} + \frac{2}{x^2 - 6x + 9} &= \frac{6x - 16}{2} + \frac{2}{6x - 16} \\ &= 3x - 8 + \frac{1}{3x - 8} \\ &= \frac{9x^2 - 48x + 65}{2x - 8} \quad (x^2 = 12x - 25 \text{ yazılırsa}) \\ &= \frac{60x - 160}{3x - 8} = 20 \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Cevap: d

20. Herhangi bir kişiyi ele alalım. Her gece iki kişi ile nöbet tutarsa 3 gece nöbet tuttuktan sonra beraber nöbet tutmadığı bir kişi kalıyor. Dolayısıyla en az $8/2 = 4$ ikili hiç bir nöbette bulunmayacak. O halde nöbette bulunan ikililer en fazla $\binom{8}{2} - 4 = 24$ olur. Her gece 3 kişi nöbet tuttuğundan nöbet sayısı $24/3 = 8$'den fazla olamaz. Örnek; kişiler A, B, C, D, 1, 2, 3, 4 olsun. A12, B23, C34, D41, AB4, BC1, CD2, DA3 şeklinde verilebilir.

Cevap: d

21.



$\overset{\triangle}{BHK} \sim \overset{\triangle}{AHC}$ benzerliği kullanılarak $|HC| = 4$ ve AHC üçgeninde Pisagor teoremi kullanılarak $|AC| = 2\sqrt{13}$ bulunur.

Cevap: c

22. p, q, r asalları tek sayı olursa tek $\neq$ çift olduğundan eşitlik sağlanmaz. $r = 2$ olursa $p^2 + pq + q^2 \neq 7$ (sol taraf > 7) olduğundan çözüm yok. $p = 2$ ise $4 + 2q + q^2 = r^2 + 3 \Rightarrow (q+1)^2 = r^2 \Rightarrow q + 1 = r \Rightarrow q = 2$ ve $r = 3$ bulunur. $(p, q, r) = (2, 2, 3)$ bulunur.

Cevap: b

23. $2a + 9c = 6 + 7b$ ve $9a - 2c = 7 - 6b$ eşitliklerinin her ikisinin de karesini alıp taraf tarafa toplarsak

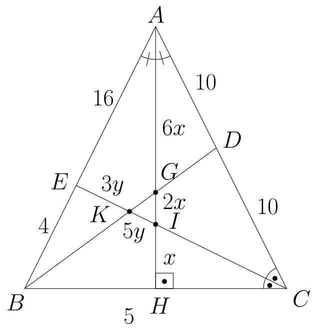
$$85a^2 + 85c^2 = 85 + 85b^2$$
$$a^2 - b^2 + c^2 = 1 \quad \text{bulunur.}$$

Cevap: c

24. Elde edilen nokta sayısı $\binom{9}{2} - \binom{3}{2} + 1 - \binom{4}{2} + 1 = 29$ tanedir. Dikkat edilirse bu noktalardan bazılarının doğrusal olduğu görülür. Bu noktalar kullanılarak elde edilebilecek üçgen sayısı $\binom{29}{3} - \left(7 \cdot \binom{3}{3} + 3 \cdot \binom{5}{3} + 4 \cdot \binom{4}{3}\right) = 3601$ tanedir.

Cevap: d

25.



AHC üçgeninde $\frac{HI}{AI} = \frac{1}{8}$ ve $2|GH| = |AG|$ kullanılarak $HI : GI : AG = 1 : 2 : 6$ bulunur. ABG üçgeninde IE kesenine göre menaleus yapılırsa $\frac{4}{20} \cdot \frac{6x}{2x} \cdot \frac{KI}{EK} = 1$ $\frac{KI}{EK} = \frac{5}{3}$. $A(\overset{\triangle}{KIG}) = 5S$ olsun. $A(\overset{\triangle}{EKG}) = 3S$, $A(\overset{\triangle}{AEG}) = 24S$ ve $A(\overset{\triangle}{EBG}) = 6S$ olur. $\frac{A(\overset{\triangle}{GIK})}{A(\overset{\triangle}{ABC})=3 \cdot A(\overset{\triangle}{ABG})} = \frac{5S}{90S} = \frac{1}{18}$.

Cevap: d

26. $(991-2)(991+10)(991+16)+320$ şeklinde yazalım. $x = 991$ alınırsa $(x-2)(x+10)(x+16)+320$ elde edilir. Denklem tekrar düzenlenirse $x \cdot (x+6) \cdot (x+18) = 991 \cdot 997 \cdot 1009$ bulunur. $p+q = 997+1009 = 2006$ bulunur.

Cevap: e

27.

$$
\begin{aligned}
[1,3] &\longrightarrow 1 \cdot 3 = 3 \\
[4,8] &\longrightarrow 2 \cdot 5 = 10 \\
[9,15] &\longrightarrow 3 \cdot 7 = 21 \\
[16,25] &\longrightarrow 4 \cdot 9 = 36 \\
[25,35] &\longrightarrow 5 \cdot 11 = 55 \\
[36,48] &\longrightarrow 6 \cdot 13 = 78 \\
[49,63] &\longrightarrow 7 \cdot 15 = 105 \\
[64,80] &\longrightarrow 8 \cdot 17 = 136 \\
[81,99] &\longrightarrow 9 \cdot 19 = 171 \\
100 &\longrightarrow 10 \cdot 1 = 10
\end{aligned}
$$

Bu sayılar toplanırsa cevap 625 bulunur.

Cevap: b

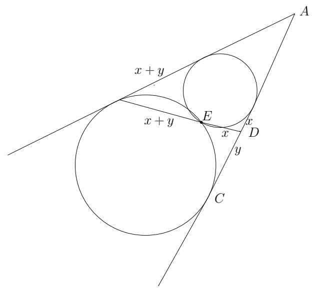
28. Sayıları 2020, 1, 2, 3, ..., 2019 sırasıyla yazalım. Sayıları baştan itibaren ikili gruplayarak verilen kuraı uygularsak

$$2019, 1, 1, 1, \ldots, 1$$

dizisi elde edilir. Aynı kural baştan itibaren tekrar uygulanırsa $2018, 0, 0, \ldots, 0$ dizisi elde edilir. İşlemler devam ettirilirse tahtada kalan sayının 2018 olduğu görülür.

Cevap: d

29.



D noktasından çembere göre kuvvet alınırsa

$$\begin{aligned} y^2 &= x \cdot (2x + y) \\ y^2 &= 2x^2 + xy \\ y^2 - xy - 2x^2 &= 0 \Rightarrow (y - 2x)(y + x) = 0 \Rightarrow y = 2x \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{BE}{ED} = \frac{x+y}{x} = \frac{x+2x}{x} = 3$

Cevap: a

30. Dik kenar uzunlukları p ve q, hipotenüs uzunluğu a olsun. $p < q$ olsun. $p = 2$ ise $4 + q^2 = a^2 \Rightarrow a^2 - q^2 = 4 \Rightarrow (a - q)(a + q) = 4 \Rightarrow a = 2, q = 0$ bulunur. Buradan çözüm gelmez.

$p \geq 3$ ise $p^2 + q^2 = a^2 \Rightarrow x^2 - q^2 = p^2 \Rightarrow (x - q)(x + q) = p^2 \Rightarrow x - q = 1, x + q = p^2 \Rightarrow x = \frac{p^2+1}{2} = q + 1$. $p^2 + 1 = 2q + 2 \Rightarrow p^2 = 2q + 1 \Rightarrow (p - 1)(p + 1) = 2q$ denkleminin tam sayılarda çözümü yoktur.

Kısa yol: $(\text{tek})^2 \equiv 1 \pmod 4$. $p^2 + q^2 \equiv a^2 \Rightarrow 1 + 1 \equiv 2 \not\equiv x^2 \pmod 4$ çözüm yoktur.

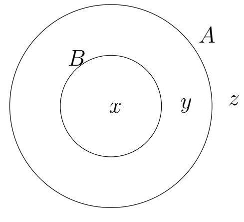
Cevap: a

31. $m = 1$ için $a_{n+1} = a_1 + a_n + 1 \cdot n$ ve $a_{n+1} - a_n = n + 1$. $n = 1$ için $a_2 - a_1 = 2$, $n = 2$ için $a_3 - a_2 = 3$, $\ldots$, $n = 20$ için $a_{21} - a_{20} = 21$. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa $a_{21} - a_1 = \frac{21 \cdot 22}{2} - 1 \Rightarrow a_{21} - 1 = 230 \Rightarrow a_{21} = 231$.

Cevap: c

32. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ kümesinin her elemanının aşağıdaki şekilde verildiği gibi x, y, z olmak üzere gidebileceği 3 yer var. Dolayısıyla tüm durumların sayısı 3^8 olup, istenmeyen durumlar $y = 0$ (bu durumda $A = B$ olur) durumları olup 2^8'dir. İstenen durumların sayısı $3^8 - 2^8 = 6305$ bulunur.

$A \supset B$ istendiğinden

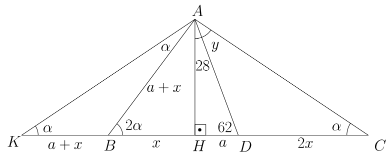


şeklinde kümeleri gösterebiliriz

Cevap: a

Deneme 9

1.



$2m(\widehat{ACB}) = m(\widehat{ABC}) = 2\alpha$, $|HD| = a$ ve $2|BH| = |DC| = 2x$ olsun. $[CB$ üzerinde $AB = BK$ olacak şekilde K noktası alınırsa KAC üçgeni ikizkenar olur. $|KH| = |HC|$ eşitliği kullanılarak $KB = AB = BD$ olduğundan $2\alpha = 56$, $\alpha = 28$ bulunur. $y + \alpha = 62$ olduğundan $y = 34^\circ$ bulunur.

Cevap: b

2. Yazılan en küçük sayı x olsun. $x + y$ ise silinen sayı olsun. $(0 < y < 9)$

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4) + (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9) - (x+y) = 2021$$

yani $9x = 1976 + y$ olur. Buradan $1976 + y$ sadece $y = 4$ için 9'a bölünebilir. Yani $x = 1980 : 9 = 220$.

$$x + y = 220 + 5 = 225$$

Cevap: d

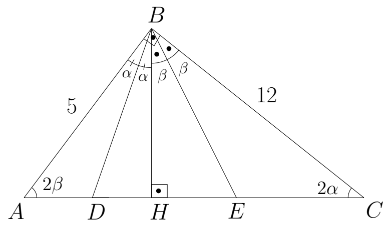
3. Bidonlardan birinin hacmi V olsun. Bir şişe karışımda $\frac{V}{6}$ elma suyu ve $\frac{V}{10}$ portakal suyu vardır. Elma suyunun $\frac{V}{5}$ olması demek şişelerdeki elma suyu miktarının artması yani portakal suyu miktarının azalması demektir. $\frac{V}{5} - \frac{V}{6} = \frac{V}{30}$ elma suyu artışıyla bir şişedeki portakal suyu miktarı $\frac{V}{10} - \frac{V}{30} = \frac{V}{15}$ yapar. Bu da bir bidon portakal suyunun 15 şişe karışıma yettiğini gösterir.

Cevap: c

4. Koşulu sağlayan alt küme sayısı n olsun. Hiçbir alt küme diğerlerinin birleşiminin alt kümesi değilse bu durumda her alt küme için sadece bu alt kümede bulunan bir eleman vardır. Bunlar birbirinden farklıdır ve sayıları n'dir. Geriye $11 - n$ elaman kalıyor, bunların arasında en büyük alt kümenin geriye kalan elemanları da var. En büyük alt kümenin eleman sayısı $\geq n$ olduğundan $11 - n \geq n - 1$ ve $n \leq 6$ olur. Örnek küme $\{1, 2, \ldots, 11\}$ olsun. Alt kümelerde $\{1\}, \{2, 7\}, \{3, 7, 8\}, \{4, 7, 8, 9\}, \{5, 7, 8, 9, 10\}, \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ şeklinde yazılabilir.

Cevap: e

5.



$m(\widehat{ABD}) = \alpha$, $m(\widehat{EBC}) = \beta$ olsun. $2\alpha + 2\beta = 90°$ olduğundan $m(\widehat{BAC}) = 2\beta$ ve $m(\widehat{BCA}) = 2\alpha$ olur. $m(\widehat{BDC}) = 2\beta + \alpha$ olduğundan $|DC| = 12$. $m(\widehat{BEA}) = 2\alpha + \beta$ olduğundan $|AE| = 5$. $|AC| = 13 \Rightarrow |AD| = 1$ ve $|DE| = 4$ bulunur.

Cevap: d

6. $(ab + 6)^2 = 25ab$ eşitliğinde $ab = x$ alınırsa $x^2 + 12x + 36 = 25x$ ve $x^2 - 13x + 36 = 0$ olduğundan $ab = 4$ veya $ab = 9$ bulunur.

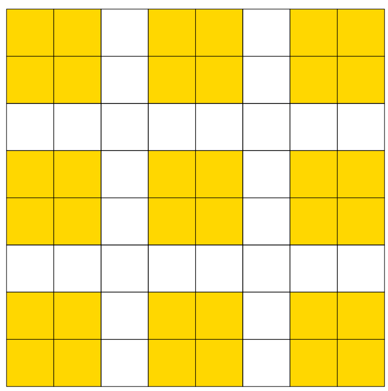
$ab = 4 \Rightarrow (1, 4), (-4, -4), (4, 1), (-4, -1), (2, 2), (-2, -2)$
$ab = 9 \Rightarrow (1, 9), (-1, -9), (-9, -1), (9, 1), (3, 3), (-3, -3)$ 12 tane

Cevap: c

7. 13 büyük kutudan x tanesinin içinde 6'şar orta kutu bulunsun. Orta boy kutu sayısı $6x$'tir. Bunlardan y tanesinin içinde 6'şar küçük kutu bulunsun. $6y$ tane küçük kutu bulunur. Boş kutu sayısı $= 88 = 13 - x + 6x - y + 6y = 5x + 5y + 13$ ve $x + y = 15$ olur. Toplam kutu sayısı $= 13 + 6x + 6y = 103$ bulunur.

Cevap: a

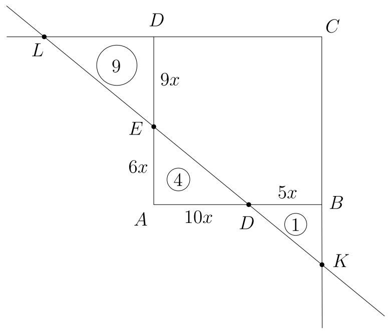
8.



Şekildeki taralı 9 tane 2×2'lik kare koşulu sağlar. Bunların dışında seçilen 2×2'lik her karenin bu taralı 2×2'lik karelerden tam 1 tanesiyle ortak hane veya haneleri bulunur. Dolayısıyla 9'dan az sayıda 2×2'lik kare seçilirse taralı 2×2'lik karelerle ortak hanesi bulunmayan 2×2'lik bir kare bulunabilir, dolayısıyla bu taralı kare de seçilmiş hanelere eklenebilir.

Cevap: c

9.



Benzer üçgenlerin benzerlik oranlarının karesi alanlar oranına eşit olduğundan LDE, DAE ve DBK üçgenlerinin benzerlik oranları aşağıdaki şekilde bulunur.

$\overset{\triangle}{LDE} \overset{B.O=\frac{3}{2}}{\sim} \overset{\triangle}{DAE} \overset{B.O=2}{\sim} \overset{\triangle}{DBK}$
$A(E\overset{\triangle}{A}D) = 10x \cdot \frac{6x}{2} = 4$ ve $x^2 = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ bulunur.
$A(ABCD) = 225x^2 = 225 \cdot \frac{2}{15} = 30$

Cevap: c

10. Sayı 10 basamaklı 3816547290 olur ve $4+7+2+9+0 = 22$'dir. 10 basamaklı bir sayının 10 ile tam bölünmesi için son basamağı 0 olmalıdır. Sondan 9 basamağı göz önüne alındığında elde edilen sayının 9 ile bölünebilmesi için rakamlar toplamı 9'un katı olmalıdır. Buradan ilk basamağın 9 olduğu görülür. Bu şekilde devam edilirse istenen sayı 9537681240 ve istenen toplam $8+1+2+4 = 15$ bulunur.

Cevap: e

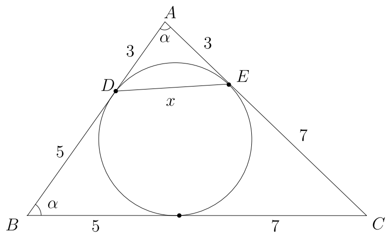
11. $\overbrace{3,4,5,6,7}^{5}, \overbrace{8,9,\ldots,37}, \overbrace{93,94,95,96,97}^{5}.$
Grup 1 $\Rightarrow 3,4,5,96,97$ ortası 5
Grup 2 $\Rightarrow 6,7,8,94,95$ ortası 8
Grup 3 $\Rightarrow 9,10,11,\ldots$ ortası 11
$5+8+11+14+17+20+23+36 = \frac{31\cdot 8}{2} = 124.$

Cevap: d

12. Öbekleri en az taş içerenden en çok içerene doğru sıralayalım. O halde 1. öbekte en az $0+1+2+\cdots+6 = 21$ taş olmalı, çünkü 8. öbeğe en az 0, 7. öbeğe en az 1, v.s., 2. öbeğe de en az 6 taş verilmeli. Öbeklerdeki taş sayıları birbirinden farklı olduğundan 1. öbekte 21 taş varsa 8. öbekte en az 28 taş bulunur. Örnek 1. öbekle 21 taş, 2. de 22, ..., 8. de 28 taş olursa her öbekteki taşları diğerlerine dağıtarak her birinde 28 taş olmasını sağlayabiliriz.

Cevap: d

13.



$|AB| = |AE| = u - BC = 15 - 12 = 3$
$m(\widehat{BAC}) = \alpha$ olsun. BAC üçgeninde kosinüs teoremi uygulanırsa $144 = 64 + 100 - 2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot \cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{20}{2 \cdot 8 \cdot 10} = \frac{1}{8}$ bulunur.

$\overset{\triangle}{DAE}$'ninde tekrar kosinüs teoremi uygulayarak $\cos\alpha = \frac{1}{8}$ yazalım. $|BF|^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 33 \cdot \frac{1}{8} = 18 - \frac{9}{4}$ ve $|DE| = \frac{63}{4}$ bulunur.

Cevap: c

14. 4 sayısından tüm sayılar elde edilebilmektedir.

- $4 \to 40 \to 4040 \to 2020$
- $4 \to 2 \to 20 \to 204 \to 102 \to 1024 \to 512 \to 206 \to 2064 \to 1032 \to 516 \to 258 \to 2584 \to 1292 \to 646 \to 6464 \to 3232 \to 1616 \to 808 \to 8084 \to 4042 \to 2021$
- $4 \to 40 \to 404 \to 4044 \to 2022$
- $4 \to 2 \to 24 \to 12 \to 6 \to 64 \to 32 \to 16 \to 164 \to 82 \to 824 \to 412 \to 206 \to 2064 \to 1032 \to 516 \to 258 \to 129 \to 1294 \to 12944 \to 6472 \to 3236 \to 1618 \to 16184 \to 8092 \to 4046 \to 2023$

Cevap: a

15. $\frac{18}{x}$, $\frac{2}{3y}$ ve $\frac{2}{3y}$ terimlerine AGO eşitsizliği uygulanırsa

$$\frac{\frac{18}{x} + \frac{2}{3y} + \frac{2}{3y}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{18}{x} \cdot \frac{2}{3y} \cdot \frac{2}{3y}}$$

$$\frac{3}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{8}{xy^2}}$$

$$1 \geq \frac{2}{3\sqrt{xy^2}} \Rightarrow 1 \leq \frac{\sqrt[3]{y^2}}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \leq \sqrt[3]{xy^2} \Rightarrow 8 \leq xy^2$$

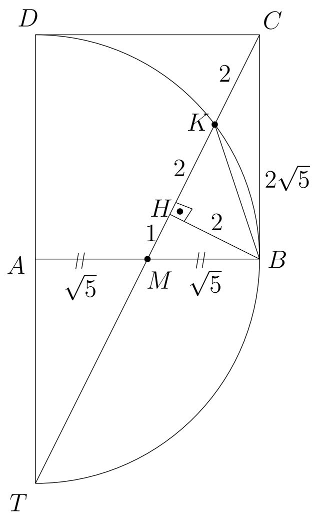
Minumum değer 8 olarak bulunur.

Cevap: e

16. Bu toplamların alabileceği en küçük değer $1+2=3$, en büyük değer de $19+20=39$ olduğundan 37'den fazla farklı toplam olamaz. Ayrıca $3,4,\ldots,13$ sayılarından en az biri mavi+kırmızı şeklinde gösterilemez, aksi durumda 1 maviyse $3=1+2$ olduğundan 2 kırmızı. $4=1+3$ olduğundan 3 kırmızı. $5=1+4=2+3$, fakat 2 ve 3 kırmızı olduğundan 4 kırmızı,... bu şekilde devam edersek $2,3,\ldots,12$ kırmızı ve benzer şekilde $29,30,\ldots,39$ sayılarının her biri mavi+kırmızı şeklinde gösterilebilseydi $9,10,\ldots,19$ sayıları aynı renkte olurdu. Öte yandan $1,11,12,\ldots,19$ mavi, $2,3,\ldots,10,20$ kırmızı olursa 35 tane farklı toplam oluşturulur.

Cevap: b

17.



A merkezli AB yarıçaplı çemberde bir ucu D noktasında olan çapın diğer ucu T noktası olsun. T, M ve C noktaları doğrusaldır. $|TM| = |MC| = 5$ (Pisagor Teoremi).
C'den çembere göre kuvvet alınırsa $(2\sqrt{5})^2 = |CK| \cdot 10$ olduğundan $|CK| = 2$ bulunur. B'den MC'ye inilen dikme H olmak üzere, Öklit teoremi yardımıyla $|MH| = 1$ olur. $|HK| = 2$, $|KB| = 2\sqrt{2}$ bulunur (Pisagor teoremi).

Cevap: a

18. $2^{2021} \cdot 3^{2021} \longrightarrow 2022 \cdot 2022 \cdot 2 \cdot 3 = -2 \cdot -2 \cdot 6 \equiv 24 \equiv 2 \pmod{11}$

Cevap: c

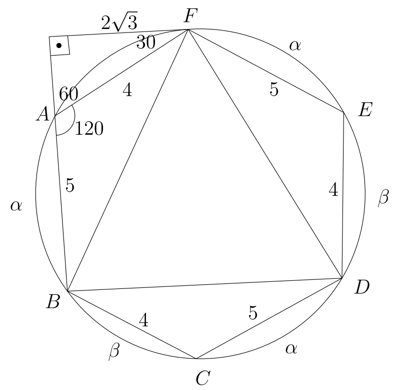
19. Sıcak musluktan bir dakikada küvetin 1/23'ü kadar, soğuk musluktan da 1/17'si kadar su akıyor. Küvet dolduğunda 3/5'ünün sıcak, 2/5'nin de soğuk olmasını istiyoruz. Sıcak musluk $\frac{\frac{3}{5}}{\frac{1}{23}} = \frac{69}{5}$ dakika, soğuk musluk da $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{17}} = \frac{34}{5}$ dakika açık kalmalıdır. Soğuk musluk $\frac{69}{5} - \frac{34}{5} = 7$ dakika sonra açılırsa istenen oran elde edilir.

Cevap: c

20. Bir kentten doğrudan ulaşılamayan kent sayısı≥ 10 olursa, bu 11 kent koşulları sağlamaz. Her kentten en az 10 sefer olduğuna göre sefer sayısı $\geq \frac{20 \cdot 10}{2} = 100$. Öte yandan bu 20 kent iki 10'ar gruba ayrılıp, farklı gruplardaki her ikili arasında sefer konulursa tam 100 sefer olur ve koşullar sağlanır, çünkü her 11 kentte her iki gruptan da kent bulunacak, dolayısıyla her kentten karşı gruptaki bir kente aktarma yapılarak kendi grubundaki kentlere ulaşılabilecek.

Cevap: b

21.



Altıgenin ardışık kenar uzunluklarını $4, 5, 4, 5, 4, 5$ şeklinde alalım. Çemberde eşit yaylar eşit kirişleri ayırdığından $m(\overset{\frown}{AF}) = m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{DE}) = \beta$ ve $m(\overset{\frown}{AB}) = m(\overset{\frown}{CD}) = m(\overset{\frown}{EF}) = \alpha$ olsun. $3\alpha + 3\beta = 360 \Rightarrow \alpha + \beta = 120°$, $m(\widehat{BAF}) = 120°$, $|BF| = \sqrt{61}$ (Pisagor teoremi). $B\overset{\triangle}{A}F = F\overset{\triangle}{E}D = D\overset{\triangle}{C}B$ (eş üçgenler). $F\overset{\triangle}{D}B$'ni eşkenar üçgendir. $3 \cdot \frac{5 \cdot 2\sqrt{3}}{2} + \frac{(\sqrt{61})^{2/3}}{4} = \frac{60\sqrt{3}}{4} + \frac{61\sqrt{3}}{4} = \frac{121\sqrt{3}}{4}$.

Cevap: a

22. n sayısının rakamları toplamını $S(n)$ ile gösterelim.
a) $S(n) = 27$ ise, $n = 999 \Rightarrow$ kalan 0
b) $S(n) = 26$ ise, $n = 998, 989, 899 \Rightarrow$ kalan 10, 1, 15
c) $S(n) = 25$ ise, $n = 799$ aldığımızda kalan 24 olur.

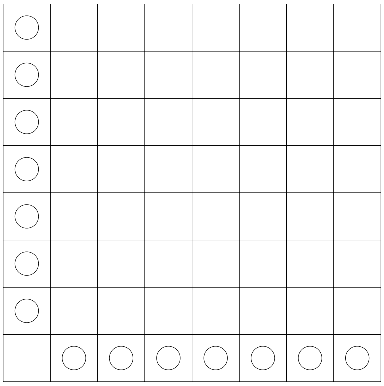
Cevap: e

23. $y = z \Rightarrow x * y + y = x * (y * y) = x * 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow x * y = x * 0 - y \\
&x = y = z \Rightarrow x * 0 = x * (x * x) = x * x + x = \\
&= 0 + x = x \Rightarrow x * y = x * 0 - y = x - y \\
&\Rightarrow 2023 * 1923 = 2023 - 1993 = 100
\end{aligned}$$

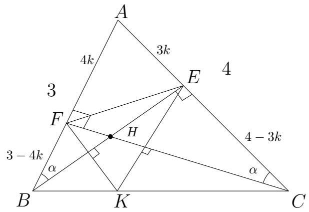
Cevap: a

24. Her damaya kendisi dışında dama bulunmayan satır veya sütuna karşılık getirelim, hem satır hem de sütunda başka dama yoksa satırı karşılık getirelim. Tüm satırlar veya tüm sütunlar damalara karşılık gelmişse dama sayısı 8'i geçmez. Damalara karşılık gelmeyen hem satır hem de sütun bulunuyorsa, karşılık gelen satır ve sütunların sayısı 14'ü geçmez, dolayısıyla dama sayısı da 14'ü geçmez. 14 örneği aşağıdaki gibi olur.



Cevap: c

25.



$\overset{\triangle}{BFA} \sim \overset{\triangle}{CFA}$ olduğundan $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF}$ olur. $|AE| = 3k$, $|AF| = 4k$. K noktası EHF'nin diklik merkezi olmak üzere $FK \parallel AC$ ve $KE \parallel AB$'dir. $\frac{3-4k}{4k} = \frac{BK}{KC}$ ve $\frac{3k}{4-3k} = \frac{BK}{KC}$ eşitliklerinden $k = \frac{12}{25}$ bulunur. $\overset{\triangle}{BEA}$ ve $\overset{\triangle}{BEC}$'ninde Pisagor teoremi kullanarak $|BC| = \frac{\sqrt{337}}{5}$ bulunur.

Cevap: d

26. $p_i = 5$ için $0 + \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\text{9 tane}} = 9 \equiv 4 \pmod 5$

Cevap: e

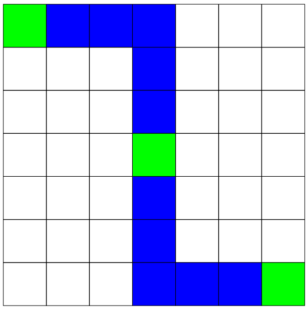
27. Lemma: Her $1 \le k \le 2^5 - 1$ için $\binom{2^5}{k}$ çift sayıdır.

$$\binom{2^5}{k} = \frac{2^5 \cdot (2^5-1)(2^5-2)\cdots[2^5-(k-2)][2^5-(k-1)]}{1 \cdot 2 \cdots (k-2)(k-1)}$$

Her $i \le m \le k-1$ için $2^t \mid m$ ancak ve ancak $2^t \mid (2^5 - m)$ ve $2^5 \nmid k$, dolayısıyla $\binom{2^5}{k}$ çifttir. $2021 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 \cdots + 2^1$ olduğundan $(x+1)^{2021} = (x+1)^{2^{10}} + (x+1)^{2^9} + \cdots + (x+1)^{2^1}$ çarpanların her birinde sadece ilk ve son terimlerin katsayıları tektir (1'dir), dolayısıyla çarpımdaki tek sayı katsayılı terimlerin sayısı $2^8 = 256$ olur.

Cevap: c

28.

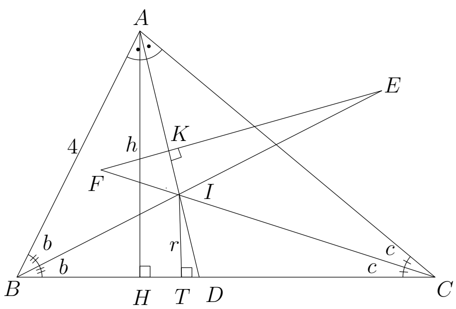


Yukarıdaki şekildeki boyalı olmayan haneler 4 tane 3×3'lük kareye bölünüyor. Dolayısıyla buralardaki sayıların toplamı 0'dır. 2 tane mavi hanelerden oluşan beşlinin her biri bir 3×3'lük karenin 5 hanesini kaplıyor. Geriye kalan 4 hanedeki sayıların toplamı en az $4 \cdot (-1) = -4$'tür. Beşlideki sayıların toplamı ise 4'e eşit veya küçüktür. Yeşil hanelerdeki sayıların toplamı da 3'e eşit veya küçüktür. O halde tüm sayıların toplamı 11'e eşit veya küçüktür. Alttaki şekilde toplamın 11 olduğu bir örnek verilmiştir.

1	1	0	1	1	0	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	0	1	1	0	1

Cevap: c

29.



ABC üçgeninin iç teğet çemberinin merkezi I ve $EF \cap AD = K$ olsun. $m(\widehat{B}) = 2b$ ve $m(\widehat{C}) = 2c$ alınırsa $m(\widehat{DAC}) = 90° - b - c$, $m(\widehat{DIC}) = m(\widehat{FIK}) = 90° - b$ ve $m(\widehat{IFK}) = b$ olur. Ayrıca $m(\widehat{DIC}) = m(\widehat{FIE})$ olduğundan $\overset{\triangle}{BIC} \sim \overset{\triangle}{FIE}$ olur. Açıortay teoreminden $|BD| = 2$, $|DC| = 3$ ve $|AD| = 3\sqrt{2}$ olur. $A(ABC) = \frac{15\sqrt{7}}{4}$ (Heron Alan formülü), $\frac{|BC| \cdot h}{2} = u \cdot r = \frac{15\sqrt{7}}{4}$ olduğundan $r = \frac{\sqrt{7}}{2}$ ve $h = \frac{3\sqrt{7}}{2}$ olur. $AH \parallel IT$ olduğundan $\frac{|ID|}{|AD|} = \frac{1}{3}$ ve $|ID| = \sqrt{2}$, $|KI| = \frac{\sqrt{2}}{2}$'dir. $\overset{\triangle}{FEI} \sim \overset{\triangle}{BIC}$'dir. $\frac{|KI|}{|IT|} = \frac{|FE|}{|BC|}$ olduğundan, $|FE| = \frac{5\sqrt{14}}{7}$ bulunur.

Cevap: e

30. Sayılar x ve y olsun. xy sayısı 14 basamaklı bir sayı ise $10^7 \cdot x + y$ şeklinde yazılabilir.

$$3 \cdot x \cdot y = 10^7 \cdot x + y$$
$$10^7 \cdot x = y(3x-1)$$
$$(x, 3x-1) = 1$$

olduğundan $(3x-1) \mid 10^7$ olmalıdır. Bundan dolayı $3x - 1 \geq 3 \cdot 10^6 - 1$ olur. $3x - 1 = 5 \cdot 10^6$ veya $3x - 1 = 10^7$'dir. $x = \frac{5 \cdot 10^6 + 1}{3} = 1666667$ ve $y = 3333334$ bulunur. xy sayısının rakamları toplamı 60 bulunur.

Cevap: e

31. İşlemden önde tahtadaki sayılar a ve b ise işlemden sonra sayılar $\frac{a+b}{2}$ ve $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ olur. Dolayısıyla bunların çarpımı $\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = a \cdot b$ bulunur. Yani sayıların çarpımından elde edilen sonuç değişmez. Başlangıçta tahtada $a = 1$ ve $b = 2$ olduğundan çarpım hep $1 \cdot 2 = 2$ olarak bulunur.

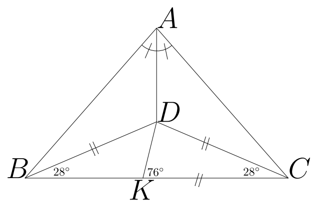
Cevap: e

32. Sayılar $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ olsun. Her $1 \leq n \leq 11$ için $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ve $S_0 = 0$ olsun. O halde yan yana gelen sayıların toplamları $n > m$ olmak üzere $S_n - S_m$ şeklinde olur. $S_n (n = 0, 1, 2, \ldots, 11)$ toplamları arasında $k + 1$ tane çift, $11 - k$ tane de tek sayı olsun. O halde tek sayı olan $S_n - S_m$ farklarının sayısı $(11 - k) \cdot (k + 1)$ olur. $\sqrt{(11-k) \cdot (k+1)} \leq \frac{11-k+k+1}{2} = 6$ ve $(11 - k) \cdot (k + 1) \leq 36$ bulunur. 36 için örnek $0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0$ olarak verilebilir.

Cevap: e

Deneme 10

1.



A açısının açıortayı üzerinde alınan noktanın B ve C köşelerine olan uzaklıkları eşittir.
$|BD| = |DC| = |KC|$ olur. BDC ve DKC üçgenleri ikizkenardır.
$m(\widehat{DBC}) = m(\widehat{DCB}) = 28°$,
$m(\widehat{DKC}) = \dfrac{180° - 28°}{2} = 76°$,
$m(\widehat{DBK}) + m(\widehat{BDK}) = 76°$,
$m(\widehat{BDK}) = 48°$ bulunur.

Cevap: d

2. $20x + 21y = 2021$ denkleminde $(x, y) = (100, 1)$ bir çözümdür.

$$\begin{aligned} 100 - 21n &> 0 \\ 100 &> 21n \\ 4,76 &> n \end{aligned}$$

$n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ olur. $(x, y) = \{(100, 1), (79, 21), (58, 41), (37, 6), (16, 81)\}$ olmak üzere 5 tanedir.

Cevap: b

3. Kalan dilim sayısı x olmak üzere

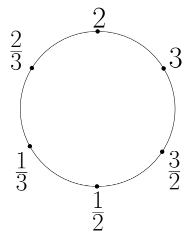
Adet ⇒	0	1	2	3
Kişi ⇒	$3x$	y	z	$y - 10$

$$\begin{aligned} y + 2z + 3(y - 10) &= 50 \\ 4y + 2z &= 80 \\ 3x + y + z + y - 10 &= 50 + x \end{aligned}$$

denklemleri çözülürse $x = 10$ olur. Baklava yemeyenler $3x = 3 \cdot 10 = 30$ bulunur.

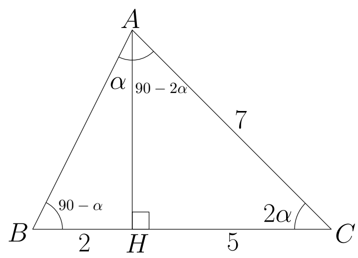
Cevap: e

4. a ve b komşu iki sayı olsun. O halde b'nin sağına $\frac{b}{a}$, onunda sağına $\frac{1}{a}$, sonra $\frac{1}{b}$, sonra $\frac{a}{b}$ ve sonra da a gelmek zorundadır. Dolayısıyla en fazla 6 sayı olabilir. Örnek durum:



Cevap: a

5.



$m(\widehat{BAH}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ACB}) = 2\alpha$ olsun.
$m(\widehat{HAC}) = 90 - 2\alpha$ ve
$m(\widehat{BAC}) = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$
$m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{BAC}) = 90 - \alpha$ ve
$|AC| = |BC| = 7$ bulunur. AHC ve AHB dik üçgenlerinde Pisagor teorem uygulanırsa $|AH| = \sqrt{24}$ ve $|AB| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ bulunur.

Cevap: b

6. $x^3 - y^3 = (x-y)\cdot\left(x^2 + xy + y^2\right) = 91$
$x^2 + xy + y^2 \geq 0$ olduğundan 91 sayısı $1 \cdot 91$ ve $7 \cdot 13$ şeklinde yazılabilir.

$$x - y = 1$$
$$x^2 + xy + y^2 = 91$$

denklemleri çözülürse $x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy = 91$, $x \cdot y = 30$ ve $(x,y) = \{(6,5), (-5,-6)\}$ bulunur.

$$x - y = 7$$
$$x^2 + xy + y^2 = (x-y)^2 + 3xy = 13$$

denklemleri çözülürse $x \cdot y = -12$ ve $(x,y) = \{(4,-3), (3,-4)\}$ bulunur. Denklemi sağlayan 4 farklı tam sayı ikilisi vardır.

Cevap: d

7. Sütün maliyeti 100 olsun. Elinde kalan süt x olsun. Su katıldıktan sonra 1 kg karışımın maliyeti $x = 80$ olur. Sütün litre maliyetinin 100'den 160'a çıkması için karışımın %50'si dökülmelidir.
$x \cdot 160 = 100 \Rightarrow x = \frac{5}{8} = 0,625$ süt kalan
$1,250 - \frac{5}{8} = 1,250 - 0,025 = 0,625$ dökülen
$\dfrac{0,625}{1,250} \Rightarrow$ %50'si dökülmüş.

Cevap: b

8. Sayının birler basamağı 2, 4 veya 6 olmalı. Birler basamağı 6 olursa yazılan sayıların hepsi istenen şartı sağlar. $6! \cdot 1 = 720$ durum. Birler basamağı 2 veya 4 alınırsa

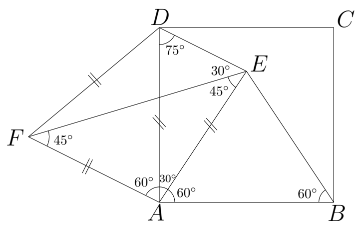
$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{1, 3, 5 ve 6 sayıları için yer seçimi}} \cdot \underbrace{3!}_{\text{1, 3, 5'in kendi arasındaki yer değişimi}} \cdot \underbrace{1}_{\text{6'nın yeri sabit}} \cdot \underbrace{2}_{\text{birler basamağı 2 veya 4}} \cdot \underbrace{2!}_{\text{kalan 2 sayı için}}$$

$$15 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 = 360$$
$$720 + 360 = 1080$$

istenen şartları sağlayan durum sayısı.

Cevap: d

9.



$|AE| = |AD| = |AF|$ olduğundan DAE'ni ve FAE'ni ikizkenardır.

$$\begin{aligned} m(\widehat{DEF}) &= m(\widehat{DEA}) - m(\widehat{FEA}) \\ &= 75 - 45 \\ &= 30^\circ \text{ bulunur.} \end{aligned}$$

Cevap: c

10. $n = 0$ için $\dfrac{1}{21^{-2}} = 441$ bulunur.

Cevap: d

11. Verilen ifadede 3 tane tam kare açılım vardır. Düzenlenirse
$-(z+6)^2 - (2x-3y)^2 - (y-4)^2 + 100$ elde edilir. $z = -6$, $y = 4$ ve $x = 6$ alınırsa istenen değer 100 bulunur.

Cevap: d

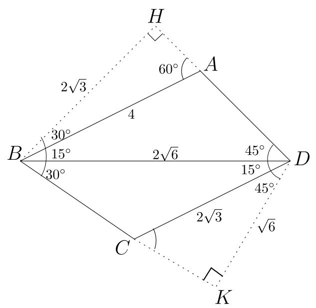
12.

1.	2.	3.	4.	5.	
1	1	3	-	-	(4. ve 5. yok)$\Rightarrow 5 \cdot 4 = 20$
1	1	2	1	-	(5. yok)$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 120$
1	1	1	1	1	$\Rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

$120 + 120 + 20 = 260$ farklı sıralama olabilir.

Cevap: d

13.



B ve D'den sırasıyla AD ve BC'ye inilen dikme ayakları H ve K olsun. Sırasıyla $|BH| = 2\sqrt{3}$, $|BD| = 2\sqrt{6}$, $|DK| = \sqrt{6}$ ve $|CD| = 2\sqrt{3}$ bulunur. (Soru ABD ve BCD üçgenlerinde sinüs teoremi kullanılarak çözülebilir.)

Cevap: b

14. $2022 \equiv -2 \pmod{11}$ ve
$2^{10} \equiv 1$ (Fermat teoremi) olduğundan,
$-2 \cdot 2^{2020} = -2 \cdot \left(2^{10}\right)^{202} \equiv -2 \cdot 1 \equiv -2 \equiv 9 \pmod{11}$ bulunur.

Cevap: e

15. Denklemi düzenlersek,
$4x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{x^2 - 2x} + x^2 - 2x = 4$
$\left(2x - \sqrt{x^2 - 2x}\right)^2 = 4$ elde edilir. Buradan
$2x - \sqrt{x^2 - 2x} = 2$
$2x - 2 = \sqrt{x^2 - 2x} \Rightarrow 3x^2 - 6x + 4 = 0$ ve $\Delta < 0$ olduğundan çözüm gelmez.

$2x - \sqrt{x^2 - 2x} = -2$
$2x + 2 = \sqrt{x^2 - 2x} \Rightarrow 3x^2 + 10x + 4 = 0$ ve $\Delta > 52$ olduğundan kökler $x_1 \sim -3$ ve $x_2 \sim -1/2$ bulunur.

$x_2 \sim -1/2$ denklemi sağlar. Denklemin bir tane gerçel kökü vardır.

Cevap: b

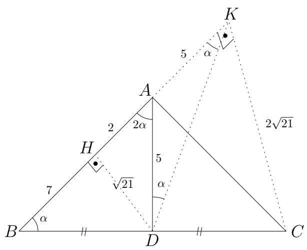
16. En az kaç sınıfın karantinada olabilceğini bulmak için tüm sınıflara 1'er öğrenci koyduktan sonra kalan öğrencileri mümkün olduğu kadar az sınıfa dağıtmaya çalışırız.

$40 \cdot 1 = 40$, $43 - 40 = 3$ kalan öğrencileri de 1 sınıfa koyabileceğimizden en az 1 sınıf karantinadadır.

En çok kaç sınıfın karantinada olduğunu bulabilmek için ise 43 öğrenciyi 2'şer 2'şer sınıflara koyarız. Buradan $42 : 2 = 21$ sınıf en çok olabilir. $x + y = 21 + 1 = 22$.

Cevap: c

17.



$m(\widehat{ABC}) = \alpha$ ve $m(\widehat{BAD}) = 2\alpha$ olsun. DAK ikizkenar üçgeni oluşturulursa $m(\widehat{B}) = m(\widehat{K})$ olduğundan BDK'ni de ikizkenar olur. D'den BK'ye inilen dikme ayağı H olmak üzere $|BH| = |HK|$'dir. AHD'ninde pisagor teoreminden $|HD| = \sqrt{21}$ ve $[KC]$ çizilirse benzerlik kullanılarak $CK \perp KB$ ve $|CK| = 2\sqrt{21}$ bulunur. AKC dik üçgeninde pisagor teoremi kullanılarak $|AC| = \sqrt{109}$ bulunur.

Cevap: e

18. $x^2 = 25k^2$ ve $y^2 = 9t^2$ olması gerektiği görülebilir ($345 = 3 \cdot 5 \cdot 23$).
$3 \cdot 25k^2 + 5 \cdot 9t^2 = 345$
$5k^2 + 3t^2 = 23$
$t^2 = 1$ ve $5k^2 = 20$
$(k, t) = \{(1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)\}$ olur. Buradan,
$(x, y) = \{(10, 3), (10, -3), (-10, 3), (-10, -3)\}$ olmak üzere 4 tane bulunur.

Cevap: b

19. 1. denklem çarpanlarına ayrılır.

$$x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right) + xy \cdot (x + y)$$
$$18 = (x + y)\left(x^2 + y^2\right)$$

$x + y = m$ ve $x^2 + y^2 = n$ olsun. $m \cdot n = 18$'dir. 2. denklem ayrılırsa

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 14$$
$$x^2 + y^2 + 2(x + y) = 12$$

$n + 2m = 12$ olur.

$n + 2m = 12$ ve $m \cdot n = 18$ denklemeleri çözülürse $m = 3$ ve $n = 6$ bulunur.
$x + y = 3$ ve $x^2 + y^2 = 6 \Rightarrow x \cdot y = \frac{3}{2}$ bulunur.

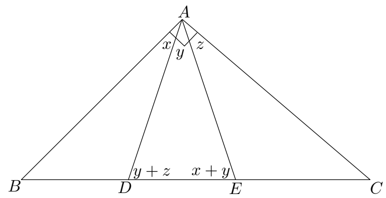
Cevap: c

20. Her görüşmede bulunan kişilerin hepsinin birbiriyle tokalaştığını varsayalım. Bir kişi geriye kalan 9 kişiden her biriyle en fazla iki kez görüştüğüne göre, dolayısıyla en fazla 18 kez tokalaştı. Her görüşmede 4 kez tokalaştı. $\frac{18}{4} \sim 4,5$ olduğundan bir kişi 4 görüşmede bulunabilir. O halde tüm görüşmelerin sayısı $\frac{4 \cdot 10}{5} = 8$'den fazla değildir.

Görüşme sayısının tam 8 olduğuna örnek şu şekilde verilebilir. Kişileri 0'dan 9'a kadar numaralandırırsak; 02345, 06789, 02479, 03568, 12367, 13478, 14589, 15269 şeklinde olabilir.

Cevap: b

21.



İkizkenar üçgenlerin taban açılarının eşit olduğu göz önüne alınırsa $x+y+z = 90°$ ve $3y+x+z = 180°$ ve $y = 45°$ olur. ADE üçgeninde sinüs teoremi kullanılırsa

$$\frac{6}{\sin 45°} = 2R$$

$R = 3\sqrt{2}$ bulunur.

Cevap: b

22. Denklem düzenlenirse

$$n! = a^2 - 2a - 2 = (a-1)^2 - 3$$
$$n! + 3 = (a-1)^2 \quad \text{elde edilir.}$$

$n \geq 4$ ise $3 \equiv (a-1)^2 \pmod 4$ (3, mod 4'te kare kalan olmadığından çözüm yok)

$n = 3$ ise $9 = (a-1)^2 \Rightarrow a = 4$ ve $(a, n) = (4, 3)$

$n = 2$ ise $5 \neq (a-1)^2$ çözüm gelmez

$n = 1$ ise $1 + 3 = (a-1)^2 \Rightarrow a = 3$ ve $(a, n) = (3, 1)$ bulunur.

2 tane (a, n) pozitif tam sayı ikilisi vardır.

Cevap: d

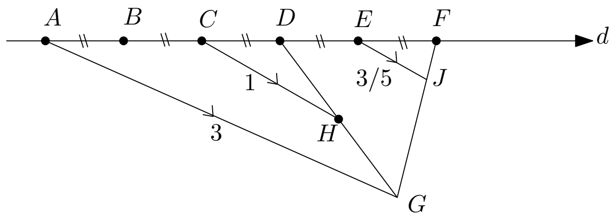
23. 1. koşuldan altın balıkların sayısının tüm balıkların 1/3'ünden 1 fazla olduğu, 2. koşuldan kırmızı balıkların sayısının tüm balıkların sayısının 1/3'ünden 4 az olduğu görülmektedir. Dolayısıyla gümüş balıklar tüm balıkların 1/3'ünden 3 fazladır. Böylece gümüş balıkların altın balıklardan 2 fazla olduğu görülür.

Cevap: b

24. Ayşe ile Betül çeyrek finalde, yarı finalde ve finalde karşılaştırılabilir. Bu durumların olasılıkları sırasıyla $\frac{1}{7}, \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ ve $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ olduğundan aranan olasılık $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} = \frac{1}{4}$ bulunur.

Cevap: d

25.



$|CH| = 1$ olsun. $CH \parallel AG$ olduğundan temel orantı teoreminden $|AG| = 3$ ve $EJ \parallel AG$ olduğundan temel orantı teoreminden $\frac{|EJ|}{3} = \frac{1}{5} \Rightarrow |EJ| = \frac{3}{5}$ olur. $\frac{|HC|}{|EJ|} = \frac{1}{3/5} = 5/3$ bulunur.

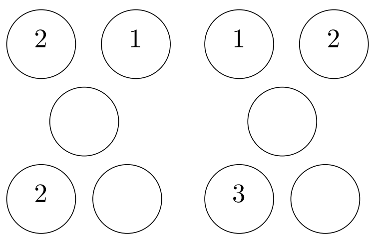
Cevap: d

26. Denklem düzenlenirse,
$y = \frac{2-x^2}{x-1} = -x - 1 + \frac{1}{x-1}$
$x - 1 = 1$ ve $x - 1 = -1$ olur. Buradan,
$(x, y) = \{(0, -2), (2, -2)\}$ olmak üzere 2 çözüm gelir.

Cevap: b

27. Cevap 9'dur. Başka bir sayı olamayacağını şu şekilde kanıtlayabiliriz. Yukarıda yazan sayıların toplamı geriye kalanların $\frac{1}{7}$'sine eşit olduğundan tüm sayıların $\frac{1}{8}$'idir.

Benzer şekilde soldaki sayılar tüm sayıların toplamının $\frac{1}{6}$'sıdır. O halde tüm sayıların toplamı hem 8 ile hem de 6 ile bölünmelidir. Bu durumda bu sayı 24 veya 48 olabilir. Fakat 5 rakamın toplamı 48 olamaz, demek ki 24'tür. O halde yukarıdaki sayıların toplamı $\frac{24}{8} = 3$ olur. Yani bir tanesi 1 diğeri 2 olur. Sol taraftaki sayıların toplamı $\frac{24}{6} = 4$ olur. Bu durumda aşağıda verilen iki şekildeki durumlar olabilir. Birinci şekil iki rakamın toplamı 19 olamayacağı için olmaz. Son durumda rakamlar 9, 9 olur.



Şekil I Şekil II

Cevap: a

28. 3 ile bölünebilen sayıların adedi ≥ 4 ise bu sayılardan iki tanesi yan yana gelir. Bu çelişkidir. Demek ki 3 ile bölünebilen sayı adedi 3'ten fazla değildir.

Yan yana gelen her 3 sayıdan en az bir tanesinin 3 ile bölündüğünü kanıtlayalım. Tersini varsayalım. O halde ya iki komşu sayı 3'e bölündüğünde farklı kalanlar verecek, dolayısıyla bunların toplamı 3'e bölünecek; ya da üçü de aynı kalanı verecek ve toplamları 3'e bölünecek. Bu da bir çelişkidir. O halde 3 ile bölünen sayı adedi 3'ten az olamaz. Aksi takdirde 3'e bölünmeyen 3 komşu sayı bulunur. Örnek dizilim 0110101 şeklinde verilebilir.

Cevap: c

29. Pisagor teoreminden $|BC| = 6\sqrt{5}$ olur. İç açıortay teoreminden $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{1}{2}$ ve $|DC| = 4\sqrt{5}$'dir. $\overset{\triangle}{DCE} \sim \overset{\triangle}{ACD}$ (A.A) olduğundan $(4\sqrt{5})^2 = |CE| \cdot 12$, $|CE| = \frac{20}{3}$ ve $|AE| = \frac{16}{3}$ bulunur.

Cevap: e

30. $y^3 - x^3 > 0$ ve $y > x$ olur.
$y = x + n(n \geqslant 1)$ olsun.

$$(x+n)^3 - x^3 = x \cdot (x+n) + 41$$
$$x^2 \cdot (3n-1) + x\left(3n^2 - n\right) + n^3 - 41 = 0$$
$$\Rightarrow n^3 < 41 \text{ ve } n \leq 3 \quad \text{olur.}$$

$$n = 1 \text{ için } 2x^2 + 2x + 1 = 41 \Rightarrow x^2 + x - 20 = 0 \text{ ve } x = 4$$

bulunur.

$$n = 2 \text{ için} \quad 5x^2 + 10x + 8 = 41 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$$
$$n = 3 \text{ için} \quad 8x^2 + 24x + 27 = 41 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}^+$$

olduğundan $n = 1$ ve $n = 4$ için $y = 5$ tek çözüm gelir. $(x, y) = (4, 5)$ bulunur.

Cevap: b

31. Denklem

$$\frac{4}{a} + \frac{4}{a} + \frac{4}{a} + \frac{4}{a} + \frac{6a^2}{b} + \frac{6a^2}{b} + \frac{4b^2}{9}$$

şeklinde düzenlenerek AGO kullanılırsa

$$\frac{16}{a} + \frac{12a^2}{b} + \frac{4b^2}{9} \geq 28$$

bulunur. İstenen en küçük değer 28'dir. Eşitlik durumu $a = 2$ ve $b = 3$ için sağlanır.

Cevap: c

32. $n \geq 5$ için olmadığını gösterelim. Kişiler $1, 2, \ldots, n$ olsun. $t_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ yalnızca $i_1, i_2, \ldots, i_k$'nın beraber geçirdiği süreyi göstermek üzere 1-2 ikilisi için denklem yazarsak

$$t_1 + t_2 + (t_{1,3} + t_{1,4} + \cdots + t_{2,n}) + (t_{1,3,4} + \ldots) + \cdots \geq 5$$

olur. Bunu tüm ikililer için toplarsak

$$\underbrace{(n-1)\begin{pmatrix}\text{tam olarak}\\ \text{1 kişinin}\\ \text{olduğu süre}\end{pmatrix} + 2(n-2)\begin{pmatrix}\text{tam olarak}\\ \text{2 kişinin}\\ \text{olduğu süre}\end{pmatrix} + \ldots}_{k} \geq 5\binom{n}{2}$$

$$8\left(\frac{n}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{n}{2}\right)^2 \begin{pmatrix}\text{en az 1 ki-}\\ \text{şinin olduğu}\\ \text{süre}\end{pmatrix} > 5\binom{n}{2}$$

$$\Rightarrow 4n^2 > 5n(n-1) \Rightarrow 5 > n$$

Bu denklemleri 4 için yazarsak

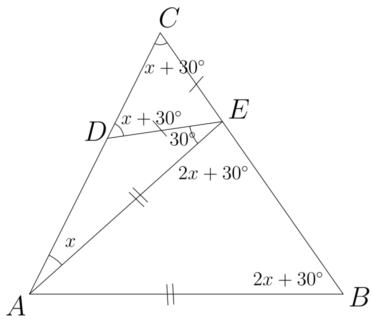
$$t_1 + t_2 + (t_{1,3} + t_{1,4} + t_{2,3} + t_{2,4}) + (t_{1,3,4} + t_{2,3,4}) \geq 5$$

Bütün $t_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$'ları $\frac{5}{8}$'e eşitlersek örnek oluşur. $t_{1,2,3,4} = 0$

Cevap: b

Deneme 11

1.



$m(\widehat{DAE}) = x$ olsun. $m(\widehat{CDE}) = m(\widehat{EAB}) = x + 30°$ olduğundan $m(\widehat{CAB}) = m(\widehat{CBA}) = m(\widehat{AEB}) = 2x + 30°$ dir. EAB üçgeninin iç açıları toplamından $x = 18°$ ve $m(\widehat{EAB}) = 48°$ bulunur.

Cevap: b

2. 10^{2022} sayısı 1'den sonra 2022 tane 0 içerir. Bu sayıdan 2022 sayısını çıkaralım.

$$\begin{array}{r} 1000\ldots00000 \\ - \qquad\qquad 2022 \\ \hline \underbrace{9\ldots99}_{\text{2018 basamak}}\ 7978 \end{array}$$

Bu yüzden sonucun rakamları toplamı $= 2019 \cdot 9 + 2 \cdot 7 + 8 = 18193$.

Cevap: a

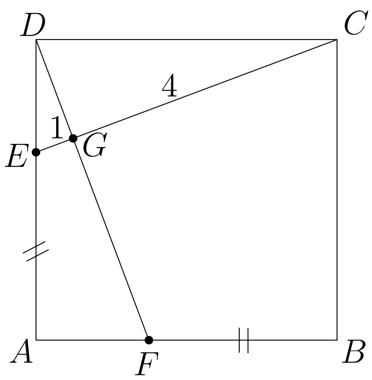
3. Asya ve Burak'ın toplam doğru sayısı $74 \cdot 2 = 148$ ve dördünün toplam doğru sayısı $73 \cdot 4 = 292$'dir. Burak'ın geometri doğrusunun 2 olması için diğer alanları tam yapmaları gerekir. Bu durumda Burak'ın geometri doğrusu en az $148 - (4 \cdot 20 + 3 \cdot 20) = 8$, Can'ın geometri doğrusu en az $292 - (148 + 4 \cdot 20 + 3 \cdot 20) = 4$ bulunur. Burak ve Can'ın geometri doğrularının ortalaması $\frac{8+4}{2} = 6$'dır.

Cevap: c

4. İki basamaklı rakamları farklı $\binom{5}{2} \cdot 2! = 20$ sayı yazılabilir. Her bir rakam her bir basamakta $20/5 = 4$ defa kullanılır. Tüm sayıların toplamı $(55 + 44 + 33 + 33 + 11) \cdot 4 = 165 \cdot 4 = 660$ bulunur.

Cevap: e

5.



$|AF| = |DE|$ ve $E\overset{\triangle}{D}C = F\overset{\triangle}{A}D$ (KAK eşliği) bulunur. $m(\widehat{ADF}) = m(\widehat{DCE})$ olduğundan $DG \perp EC$'dir. Öklit bağıntılarından $|DG|^2 = 1 \cdot 4$, $|DG| = 2$ ve eşlikten $|EC| = |DF|$ olduğundan $|GF| = 3$ bulunur.

Cevap: c

6. $x = 4k$, $y = k - 2$ ve $z = k + 8$ olduğundan

$$x \cdot y \cdot z = 4k \cdot (k-2) \cdot (k+8) = 12012$$
$$\underbrace{k}_{13} \cdot \underbrace{(k-2)}_{11} \cdot \underbrace{(k+8)}_{21} = 3003$$

olur. $3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ olduğundan $k = 13$ bulunur.

$x + y + z = 6k + 6 = 6(k+1) = 6 \cdot 14 = 84$ olur.

Cevap: e

7. $n = 100$'den başlayarak diziyi incelersek $a_{97}, a_{94}, \ldots$ değerleri için aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$a_{100} = a_{97} + 3 = a_{94} + 2 \cdot 3 = a_{91} + 3 \cdot 3 \cdots = a_{10} + 30 \cdot 3$$

Bu eşitlikten $a_{100} - a_{10} = 90$ olur.

Cevap: a

8. Farklı iki çember en fazla iki noktada kesişir. Farklı iki doğru en fazla bir noktada kesişir. Bir çember ve bir doğru en fazla iki noktada kesişirler.

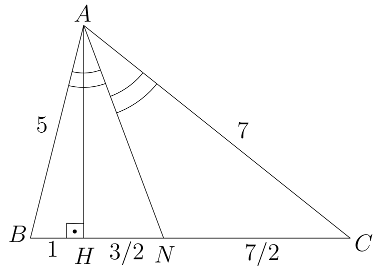
$$\binom{3}{2} \cdot 2 + \binom{5}{2} \cdot 1 + \binom{5}{1}\binom{3}{1} \cdot 2$$

$6 + 10 + 30 = 46$ kesişme noktası vardır.

2. yol: 3 çember en çok 6 noktada kesişir. 1. doğru bu çemberleri en çok 6 noktada keser. Sonraki her doğru çemberleri 6 noktada ve kendisinden önce çizilen doğruları keseceğinden toplam $6 + (6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 46$ kesişme noktası olur.

Cevap: c

9. $[AN]$ açıortay, $[BC]$'nı 5 ve 7 ile orantılı böleceğinden $\frac{|BN|}{|NC|} = \frac{5}{7}$ ve $|BC| = 6$ olduğundan $|BC| = \frac{5}{2}$ ve $|NC| = \frac{7}{2}$ olur.



$|BH| = x$ ve $|HC| = 6 - x$ için Pisagor teoreminden $|BH| = x = 1$ olur. $|BN| = \frac{5}{2}$ olduğundan $|HN| = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$ bulunur.

Cevap: e

10. y^2'yi eşitliğin sol tarafına atıp iki kare farkından yararlanıp çarpanlarına ayıralım.

$$\begin{array}{rr} (x^2 - y)(x^2 + y) = 71 \text{ olduğundan } x^2 + y = 71 & x^2 + y = 1 \\ + \qquad x^2 - y = 1 & x^2 - y = 71 \\ \hline 2x^2 = 72 & 2x^2 = 72 \\ x^2 = 36 & x^2 = 36 \\ \Rightarrow x = 6, y = 35 & \Rightarrow x = 6, y = -35 \\ \Rightarrow x = -6, y = 35 & \Rightarrow x = -6, y = -35 \end{array}$$

(x, y) ikilileri $(6, 35), (-6, 35), (6, -35), (-6, -35)$. Buradan $(y - x)_{\text{max}} = 35 - (-6) = 41$ olur.

Cevap: c

11. Eşref kumbarasına x gün 70 TL, y gün 80 TL, z gün 90 TL atmış olsun. Bu durumda $x + y + z = 20$ ve $70x + 80y + 90z = 1630$ olacaktır. Denklemler düzenlendiğinde;

$$\left.\begin{array}{r} 7x + 8y + 9z = 163 \\ x + y + z = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow y + 2z = 23$$

bulunur. Kağıt banknot sayısının az olması için $70 = 50{+}20$ (2), $80 = 50{+}20{+}10$ (3) ve $90 = 50{+}20{+}20$ (3) x'i mümkün olduğunca büyük tutmak gerekir. $z = 11$, $y = 1$ ve $x = 8$ alınırsa banknot sayısı en az $11 \cdot 3 + 1 \cdot 3 + 8 \cdot 2 = 52$ olur.

Cevap: d

12. A kümesini 3 ile bölümünden kalanlara göre 3 kümeye ayıralım.

$$A_1 = \{3, 6, 9\}$$
$$A_2 = \{1, 4, 7, 10\}$$
$$A_3 = \{2, 5, 8\}$$

Tüm alt durumları inceleyelim.

(a) Üç elemanda A_1 kümesinden seçilebilir.
$\binom{3}{3} = 1$ durum.

(b) Üç elemanda A_2 kümesinden seçilebilir.
$\binom{4}{3} = 4$ durum.

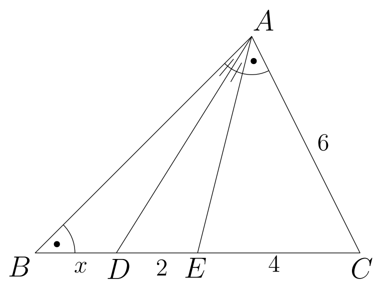
(c) Üç elemanda A_3 kümesinden seçilebilir.
$\binom{3}{3} = 1$ durum.

(d) Her kümeden bir eleman seçilebilir.
$\binom{3}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 36$ durum.

Toplamları 3'e tam bölünebilen 3 elemanlı 42 alt küme vardır.

Cevap: b

13.



Açılar isimlendirildiğinde $m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{ADC})$ eşitliği görülür. Buradan $|AD| = |DC| = 6$ olur. $C\overset{\triangle}{A}E \sim C\overset{\triangle}{B}A$ olduğundan (AA benzerliği) $\frac{4}{6} = \frac{6}{6+x} \Rightarrow x = 3$ bulunur.

Cevap: d

14. İfadeyi bölelim ve iki kesrin toplamı olarak yazalım.
$\frac{y^2-3y+18}{y-1} = y - 2 + \frac{16}{y-1}$.
O halde $y-1$'in 16'nın bir böleni olması gerekir. $y-1$ ifadesi $1, 2, 4, 8, 16$ ve -1 olabilir. Bu durumda y değeri $2, 3, 5, 9, 17$ ve 0 olabilir. y değerlerin aritmetik ortalaması ise $\frac{(2+3+5+9+17+0)}{6} = 6$ olur.

Cevap: b

15. Her iki bölgeyi de x saatte geçmiş olsun. Bu durumda $\frac{40}{x} \leq 110$ ve $\frac{20}{x} > 50$ olur.
$\frac{4}{11} \leq x < \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{11}{4} \geq \frac{1}{x} > \frac{5}{2}$.
Şehir dışı için $110 \geq \frac{40}{x} > 100$ olduğundan hızı en az 101 olur.
Şehir içi için $55 \geq \frac{20}{x} > 50$ olduğundan hızı en çok 55 olur.
Bu değerlerin toplamı $101 + 55 = 156$'dır.

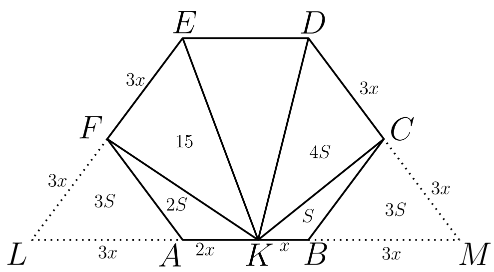
Cevap: b

16. Toplam $C(7,2) = 21$ maç yapılmıştır. Her maçtan toplam 2 veya 3 puan alınabilmektedir. Dolayısıyla turnuvada kazanılan toplam puan $21 \cdot 3 = 63$'ten fazla olamaz. O halde sonraki tura 5'ten fazla takım geçemez. ($5 \cdot 12 = 60$ olduğundan.) Örneğin aşağıda 5 takımın geçebileceği görülmektedir.

	1	2	3	4	5	6	7	Toplam
1	X	0	0	3	3	3	3	12
2	3	X	0	0	3	3	3	12
3	3	3	X	0	0	3	3	12
4	0	3	3	X	0	3	3	12
5	0	0	3	3	X	3	3	12
6	0	0	0	0	0	X	1	1
7	0	0	0	0	0	1	X	1

Cevap: d

17.



$EF \cap AB = \{L\}$ ve $AB \cap DC = \{M\}$ olsun. FLA ve BCM üçgenleri eşkenar üçgen olur. $5S = 15$ ise $S = 3$ ve $4S = 12$ bulunur.

Cevap: c

18. $2022^3 = 2^3 \cdot 1011^3$

İstenen tek sayıların toplamı x olsun. Her tek sayının 2 katı, 4 katı ve 8 katı da bu sayının bir çift böleni olacağından istenilen çift sayıların toplamı $2x + 4x + 8x = 14x$ olur. O halde toplamların oranı $14x/x = 14$ olur.

Cevap: e

19.

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{12})^2 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{12}^2 + 2(\underbrace{a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot a_3 + \cdots + a_{11} \cdot a_{12}}_{x})$$

özdeşliğinden yararlanalım ve aradığımız ifadeye x diyelim.

$(7 \cdot 2 + 5 \cdot (-1))^2 = 7 \cdot 2^2 + 5 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot x$ olur. Buradan;

$9^2 = 33 + 2x$ olduğundan $x = 24$ olur.

Cevap: c

20. 5 basamaklı rakamları farklı $\binom{10}{5} = 252$ tane sayı beşlisi vardır.

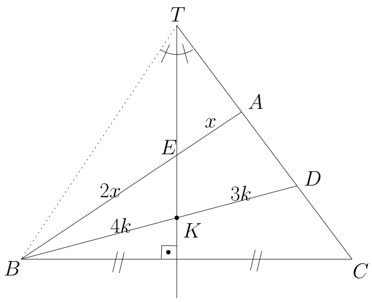
5 basamaklı iki rakamı aynı $\binom{10}{4}\binom{4}{1} = 840$ olduğundan 5 basamaklı (12311 ve 12233) türündeki diziler $\binom{10}{3}\binom{3}{1} + \binom{10}{3}\binom{3}{2} = 720$ tanedir.

5 basamaklı ve 2 farklı rakamdan oluşan diziler $\binom{10}{2} \cdot 4 = 180$ tanedir.

5 basamaklı ve aynı rakamdan oluşan diziler $\binom{10}{1} = 10$ tanedir. Toplam 2002 tane dizi vardır.

Cevap: a

21.



Kenar orta dikme ile AC'nin kesişim noktası T olsun. İç açıortay teoreminden; $\frac{|TB|}{|TA|} = \frac{2x}{x}$ ve $\frac{|TB|}{|TD|} = \frac{4k}{3k}$ olduğundan $\frac{|TA|}{|AD|} = 2$ ve $|TB| = |TC|$ olduğundan $|AD| = |DC|$'dir. $\frac{|AD|}{|DC|} = 1$ olur.

Cevap: e

22. $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ olduğundan $2022^{2022} = 2^{2022} \cdot 3^{2022} \cdot 337^{2022}$'dir. Bu sayının tam sayı bölen sayısı $2 \cdot 2023^3$ tanedir. $(x-1)$'in bölen sayıları toplamı 0'dır. Ancak $(x-1)$'in bölen sayıları toplamı her x değeri için 1 artacağından $2 \cdot 2023^3$ olur.
$2 \cdot 2023^3 \equiv 2 \cdot (-1)^3 \equiv -2 \equiv 9 \pmod{11}$ bulunur.

Cevap: d

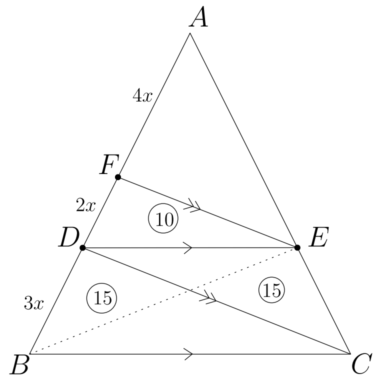
23. $\Delta < 0$ ise $b^2 - 4ac < 0$ ve $b^2 < 4ac$ olur. b'nin alabileceği değerler için eşitsizliği inceleyelim.
$b = 1$ ise (a, c) ikililerinin sayısı $5 \cdot 5 = 25$
$b = 2$ ise (a, c) ikililerinin sayısı $5 \cdot 5 - 1 = 24$
$b = 3$ ise $9 < 4ac$ ise $(a, c) = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5),$
$(3,1), \ldots, (3,5), (4,1), \ldots, (4,5), (5,1), \ldots, (5,5)\} \Rightarrow 22$ tane
$b = 4$ ise $16 < 4ac$ ise $4 < ac$ ise $(a, c) = \{(1,5), (2,3), (2,4), (2,5),$
$(3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), \ldots, (5,5)\} \Rightarrow 17$ tane
$b = 5$ ise $25 < 4ac$ ise $(a, c) = \{(2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5),$
$(4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,2), \ldots, (5,5)\} \Rightarrow 13$ tane
Toplam 101 tane.

Cevap: b

24. $n \leq 20$ ise Ali'nin iddiasının yanlış olabileceğini gösterelim. İlk $n-1$ çocuk $0, 1, 2, \ldots, n-2$ mantar, n'inci çocuk da $200 - \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ mantar toplamış olsun. O halde $\frac{(n-2)(n-1)}{2} \leq \frac{18 \cdot 19}{2} = 171$ olduğundan n'inci çocuk en az $200 - 171 = 29$ mantar toplamıştır, dolaysıyla $29 > 18 \geq n-2$. $n = 21$ ve çocukların topladıkları mantar sayıları $a_0 < a_1 < \cdots < a_{20}$ olsun. Her $i = 0, 1, 2, \ldots, 20$ için $a_i \geq i$ olacağı barizdir, dolayısıyla $200 = a_0 + a_1 + \cdots + a_{20} \geq 0 + 1 + \cdots + 20 = 210$, çelişki. O halde a_i'lerden çakışan ikisi bulunur.

Cevap: c

25.



$A(DEC) = A(BDE)$'dir (tabanları ve yükseklikleri eşit). $\frac{A(FDE)}{A(BDE)} = \frac{|FD|}{|BD|} = \frac{2}{3}$ olur. Temel orantı teoreminden $\frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|AF|}{2x} = \frac{|AF|+2x}{3x}$ olduğundan $|AF| = 4x$ olur. İstenen oran $\frac{|AF|}{|BD|} = \frac{4}{3}$ bulunur.

Cevap: d

26. Eşitliğin iki tarafını 23! ile çarpalım.

$$23!\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{23}\right) = x$$
$$23!+\frac{23!}{2}+\frac{23!}{3}+\cdots+\frac{23!}{23} = x \to 0+0+\cdots+\frac{23!}{13}+0+\cdots+0 = x(\text{mod} 13)$$

$\frac{23!}{13} = 1\cdot 2\cdots 12\cdot 14\cdot 15\cdots 23 \equiv 12!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots 10 \equiv 12!\cdot 10! \pmod{13} \equiv 12\cdot 6 \equiv 7$

$$12! \equiv 12 \pmod{13} \quad \text{(Wilson Teoremi)}$$
$$12\cdot 11! \equiv 12 \pmod{13}$$
$$11! \equiv 1 \pmod{13} \text{ ise } 11\cdot 10! \equiv 1 \pmod{13}$$
$$\text{Buradan } -2\cdot 10! \equiv -12 \pmod{13} \text{ olduğundan } 10! \equiv 6 \pmod{13}$$

Cevap: d

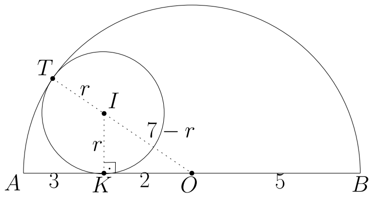
27. Şenol'dan sonra torbadaki beyaz sayısı x, kırmızı sayısı $5x$ olsun. Bu durumda 12'şer bilye eklersek $5x+12 = 4(x+12)$ ise $5x+12 = 4x+48$ ve $x = 36$ olur. Bu durumda Sabahattin n'er tane bilye almış olursa $192+n = 3(48+n)$ ise $192+n = 144+3n$ ve $2n = 48$ olur.

Cevap: d

28. Cemre ve Dilara doğru söylüyorsa bunlar birinci ve sonuncu olmuştur, dolayısıyla Ali ve Bekir de doğru söylüyordur ancak bu bir çelişkidir. O halde Cemre veya Dilara yalan söylüyordur. Dilara yalan söylüyorsa, diğerleri doğru söylüyordur, dolayısıyla kimse sonuncu olmamıştır ancak bu da çelişkidir. Demek ki yalan söyleyen Cemre'dir. O halde Bekir birinci, Dilara da sonuncu olmuştur.

Cevap: a

29.



AB çaplı çemberin merkezi O ve küçük çemberin merkezi I olsun. O, I ve T doğrusaldır. IKO üçgeninde Pisagor teoremi kullanılırsa; $|IK| = r = \frac{45}{14}$ bulunur.

Cevap: e

30. $m > 0$ olsun. $x^2 \equiv -2^n \pmod 7$

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

n	0	1	2	3	4	5	...
-2^n	6	5	3	6	5	3	...

$x^2 \not\equiv -2^n \pmod 7$ olduğundan $m = 0$'dır. $x^2 = 1 - 2^n \Rightarrow n = 0$ ve $x = 0$'dır. $(x, m, n) = (0, 0, 0)$ tek çözüm var.

Cevap: b

31.

$$\begin{aligned} (|x|-2)^2 &= y+2 \\ (|y|-2)^2 &= z+2 \\ +\ (|z|-2)^2 &= x+2 \end{aligned}$$

$$0 \le (|x|-2)^2 + (|y|-2)^2 + (|z|-2)^2 = x+y+z+6$$

Buradan $x + y + z \ge -6$ olur. Bu eşitsizlik $x = y = z = -2$ için sağlanır.

Cevap: a

32. k'inci işlemde boyanan haneleri k ile, bunların sayısını da n_k ile gösterelim.

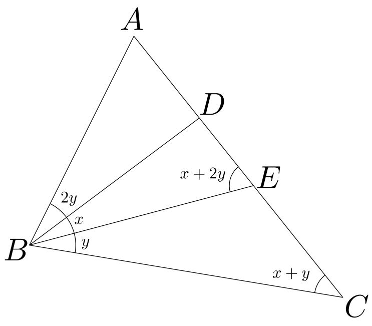
					4					
				4	3	4				
			4	3	2	3	4			
		4	3	2	1	2	3	4		
	4	3	2	1	0	1	2	3	4	
4	3	2	1	0	0	1	2	3	4	
	4	3	2	1	1	2	3	4		
		4	3	2	2	3	4			
			4	3	3	4				
				4	4					

Şekil-3'ten $n_0 = 3$, $n_1 = 7$, $n_2 = 11$, $n_3 = 15$, $n_4 = 19$ olduğu görülmektedir. n_k'nın, farkı 4 olan bir aritmetik dizi oluşturduğu tümevarımla kolaylıkla kanıtlanır. O halde $n_{40} = 3 + 40 \cdot 4 = 163$ ve tüm boyalı hanelerin sayısı da $n_0 + n_1 + \cdots + n_{40} = \frac{(n_0+n_{40})\cdot 41}{2} = \frac{(3+163)\cdot 41}{2} = 83 \cdot 41 = 3403$ tanedir.

Cevap: d

Deneme 12

1.



$m(\widehat{EBC}) = y$ ve $m(\widehat{DBE}) = x$ denilirse $m(\widehat{DCB}) = x + y$ (BDC'ni ikizkenar).
$m(\widehat{AEB}) = m(\widehat{ABE}) = x + 2y$ (BAE'ni ikizkenar).
Buradan $m(\widehat{ABD}) = 2y$ olduğu görülür. İstenen oran $\frac{y}{2y} = \frac{1}{2}$ bulunur.

Cevap: b

2.

$$\begin{aligned} 1 \cdot 9 + 2 \cdot 90 + 3x &= 2022 \\ 3x &= 1835 \\ x &= 611 \end{aligned}$$

$100 + 611 = 711 \Rightarrow 7 + 1 + 1 = 9$.

Cevap: a

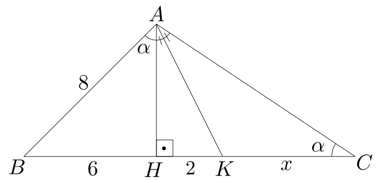
3. $a_1 = 2^3$, $a_2 = 5^2$, $a_3 = 2^3 \cdot 5^2$, $a_4 = 2^3 \cdot 5^4$, $a_5 = 2^6 \cdot 5^6$, $a_6 = 2^9 \cdot 5^{10}$, $a_7 = 2^{15} \cdot 5^{16}$, $a_8 = 2^{24} \cdot 5^{26}$, $a_9 = 2^{32} \cdot 5^{42}$, $a_{10} = 2^{63} \cdot 5^{68}$ olduğundan bu sayının sondan 63 basamağı sıfırdır.

Cevap: d

4. Çift sayılar kendi aralarında tek türlü sıralanırlar. Bunları özdeş nesneler olarak düşünürsek (yani kendi aralarında yer değişimleri önemli değil) sıralama sayısı $8!/4! = 1680$ bulunur.

Cevap: d

5.



$|KC| = x$ olsun. $|AB| = |BK|$ olduğu görülürse açı takibi yapılarak $m(\widehat{BAH}) = m(\widehat{ACB}) = \alpha$ olduğu görülür. Buradan $ABH \sim CBA$ (AA benzerliği) görülürse $\frac{6}{8} = \frac{8}{8+x}$ olduğundan $x = \frac{8}{3}$ bulunur. $(m(\widehat{BAC}) = 90°$ olduğu görülürse Öklit bağıntıları kullanılarak çözüm yapılabilir)

Cevap: b

6. $5n - 38 + 7n - 15 + 8n + 9 = 20n - 44$ çift olduğundan bu sayıların en az biri 2'dir. $5n - 38 = 2$ ise $5n = 40$ ve $n = 8$ olur. Bu durumda $7n - 15 = 41$ ve $8n + 9 = 73$ olur. $20n - 44 = 2$ ve $7n - 15 = 2$ durumlarında çözüm yoktur. $n = 8$ tek çözümdür.

Cevap: b

7. Birinci ürün $100a$ maliyet, $100x$ satış, ikinci ürün $100b$ maliyet, $100x$ satış olsun. Bu durumda birinci ürün için $100a - 10x = 100x$, ikinci ürün için $100b + 20x = 100x$ olur. $100a = 110x$ ve $100b = 80x$. $a = 11k$, $x = 10k$, $b = 8k \Rightarrow \frac{b}{19k} = \frac{x}{100}$ olduğundan istenen oran $\frac{100}{19}$ olur.

Cevap: c

8. Önce mavi ve beyaz misketleri dizelim.

$$\frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$$

Mavi ve beyaz misketlerin arasına kırmızı misketleri yerleştirebilmek için seçim yapalım.

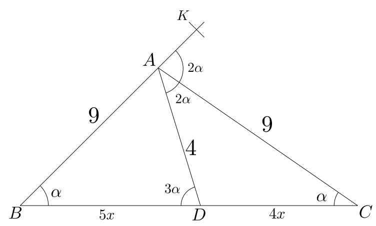
-m-m-m-b-b-b-b-b-b-

$\binom{10}{2} \cdot 2! = 90$ (kırmızı misketler iki grup şeklinde)

$84 \cdot 90 = 7560$ farklı dizilim yapabilir.

Cevap: b

9.



$m(\widehat{ABD}) = \alpha$ ve $m(\widehat{ADB}) = 3\alpha$ olsun.
$m(\widehat{ACD}) = \alpha$ (ABC ikizkenar üçgen),
$m(\widehat{DAC}) = m(\widehat{CAK}) = 2\alpha$ olur. $[AC]$, ABD üçgeninde dış açıortay olur. Dış açıortay teoreminden $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ olduğundan $|DC| = 4x$ ve $|BD| = 5x$ diyebiliriz.
ABC ikizkenar üçgeninde $|AD|^2 = |AB|^2 - |BD| \cdot |DC|$ kullanılırsa $16 = 81 - 20x^2, x = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ve $4x = |DC| = 2\sqrt{13}$ bulunur.

Cevap: c

10. $x = \frac{y^2+12}{2-y^2} = \frac{y^2-2+14}{2-y^2} = -1 + \frac{14}{2-y^2}$. $2 - y^2 = 1, 2, 7, 14, -1, -2, -7, -14 \Rightarrow y^2 = 1, 0, -5, -9, 3, 4, 9, 16$. $(x, y) = \{(13, 1), (13, -1), (6, 0), (-8, 2), (-8, -2), (-3, 3), (-3, -3), (-2, 4), (-2, -4)\}$ 9 tane (x, y) tam sayı ikilisi vardır.

Cevap: d

11.

$$(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x \cdot 3^y + (3^y)^2 + 9 \cdot (3^y)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 3^y + 8^2 = 0$$
$$(2^x - 3^y)^2 + \left(3^{y+1} - 4\right)^2 = 0$$
Buradan $2^x = 3^y$ ve $3^{y+1} = 4$
$$4^x = 3^{2y} \text{ ise } \left(3^{y+1}\right)^x = 3^{2y},\ 3^{xy+x} = 3^{2y}$$
$xy + x = 2y$ ve $x = y(2 - x)$ olur.
$$y = \frac{x}{2 - x}$$

Cevap: a

12. 2 parça aynı renk olacak şekilde $\binom{4}{2}\binom{4}{1} \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$,

3 parça aynı renk olacak şekilde $\binom{4}{3}\binom{4}{1} \cdot 3 = 48$,

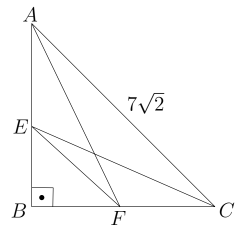
4 parça aynı renk olacak şekilde 4,

2 parça aynı renk diğer 2 parça da aynı renk olacak şekilde $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{4}{1} \cdot 3}{2} = 36$ farklı boyama yapılabilir.

Toplam $144 + 48 + 36 = 288$ farklı boyama yapılabilir.

Cevap: d

13.



Şekildeki 4 dik üçgenin kenarları harflendirilerek 4 tane Pisagor teoremi uygulanırsa

$$|EF|^2 + (7\sqrt{2})^2 = 9^2 + (6\sqrt{2})^2$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan $|EF| = \sqrt{55}$ bulunur.

Cevap: e

14. $a^k - 1 = (a-1)\cdot\left(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + 1\right) = p$ olduğuna göre, $a - 1 = 1$ olmalıdır. $a = 2$ olduğuna göre $p = 3, 7, 31$ olmak üzere üç farklı p asalı vardır.

Cevap: b

15.

$$\frac{x^4+y^4+x^2y^2}{x^2+y^2+xy} - 10 = xy + 26$$
$$\frac{x^6-y^6}{(x+y)\,(x^3-y^3)} = xy + 36$$
$$\frac{\left(x^3-y^3\right)\cdot\left(x^3+y^3\right)}{(x+y)\,(x^3-y^2)} = xy + 36$$
$$\frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x+y} = xy + 36$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 = 36$$

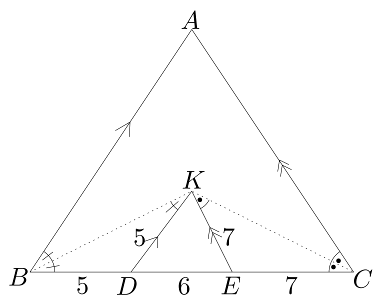
olduğundan $x - y$'nin pozitif değeri 6'dır.

Cevap: c

16. En az 12'sinin çarpımı çift ise 11'i tektir. Toplamları çift olan 10 tek sayı olduğundan 32 sayının 22'si çifttir. 22 çift 11 tek sayı vardır. Seçilen birinin çift olma olasılığı $\frac{22}{33} = \frac{2}{3}$ olur.

Cevap: b

17.



Üçgenin içinde alınan ve üçgenin kenarlarına eşit uzaklıkta olan nokta üçgenin iç teğet çemberinin merkezi aynı zamanda açıortayların kesim noktasıdır. BK ve KC çizilirse BDK ve CEK üçgenleri ikizkenar olduğundan $|DK| = 5$ ve $|KE| = 7$ olur. Ayrıca $AB \parallel DK$ ve $AC \parallel KE$ olduğundan $D\overset{\triangle}{K}E \sim B\overset{\triangle}{A}C$ ve üçgenlerin benzerlik oranı $\frac{1}{3}$ olur. Alanları oranı $\frac{1}{9}$'dur. $A(DKE)$ Heron alan formülü kullanılarak $A(DKE) = \sqrt{9 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4} = 6\sqrt{6}$ ve $A(ABC) = 6\sqrt{6} \cdot 9 = 54\sqrt{6}$ bulunur.

Cevap: d

18.

$$2022 \equiv 1453 \pmod{n}$$
$$569 \equiv 0 \pmod{n}$$

569 asal sayı olduğu için $n = 569$'dur. $1453 \equiv 315 \pmod{569}$ ise $k = 315$ ve buradan $569 \equiv 254 \pmod{315}$.

Cevap: e

19.

$$\sqrt{2x+11-2\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{2x-5}} + \sqrt{2x+31-2\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{2x-5}} = 2$$
$$\sqrt{(\sqrt{2x-5}-\sqrt{16})^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}-\sqrt{36})^2} = 2$$
$$|\sqrt{2x-5}-4| + |\sqrt{2x-5}-6| = 2$$
Buradan $4 \le \sqrt{2x-5} \le 6$, $16 \le 2x-5 \le 36$

$21 \le 2x \le 41$ ise $10,5 \le x \le 20,5$

$x = \{11, 12, 13, \ldots, 20\}$

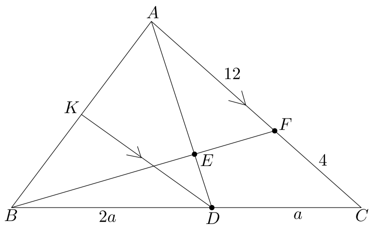
olduğundan 10 tane x tam sayısı vardır.

Cevap: e

20. Herhangi bir sıralamada üç tane uslu öğrenci arka arkaya gelirse soruda verilen şartlar sağlanmaz ve çelişki ortaya çıkar. Bu nedenle herhangi ardışık üç öğrenci arasında kesinlikle en az bir yaramaz öğrenci olmalıdır. $(27/3) + 1 = 10$ yaramaz öğrenci grupta bulunmalıdır. Örnek dizilim aşağıdaki gibi yapılabilir: uuy uuy uuy uuy uuy uuy uuy uuy uuy uy

Cevap: b

21.



$|DC| = a$ ve $|BD| = 2a$ olsun. Menaleus teoremi uygulanırsa $\frac{BE}{EF} = \frac{8}{3}$ olur. $KE \parallel AF$ olduğundan temel orantı teoremi kullanılırsa $\frac{|KE|}{12} = \frac{8}{11}$, $|KE| = \frac{96}{11}$ bulunur.

Cevap: c

22. $x = 6, -6$ veya 18'dir.

$x = 6$ ise $y = 2$ veya 6 ve $z = 9$ olup, $A = 600 + 20 + 9 = 629; 600 + 60 + 9 = 669$.

$x = -6$ ise $y = -2$ veya 18 ve $z = 21$ olup, $A = -600 - 20 + 21 = -599; -600 + 180 + 21 = -399$.

$x = 18$ ise $y = -6$ ve $z = -3$ olup, $A = 1800 - 60 - 3 = 1737$ bulunur.

$\sum A = 629 + 669 - 599 - 399 + 1737 = 2037$.

Cevap: d

23.

$$A^2 = 11111 \cdot 10^7 + 22222 \cdot 10 + 4$$
$$A^2 = \frac{10^5 - 1}{9} \cdot 10^7 + 2 \cdot \frac{10^5 - 1}{9} \cdot 10 + 4$$
$$A^2 = \frac{10^{12} - 10^7 + 2 \cdot 10^6 - 20 + 36}{9}$$
$$A^2 = \frac{10^{12} - 8 \cdot 10^6 + 16}{9} = \left(\frac{10^6 - 4}{3}\right)^2$$
$$A = \frac{10^6 - 4}{3} = \frac{999996}{3} = 333332$$

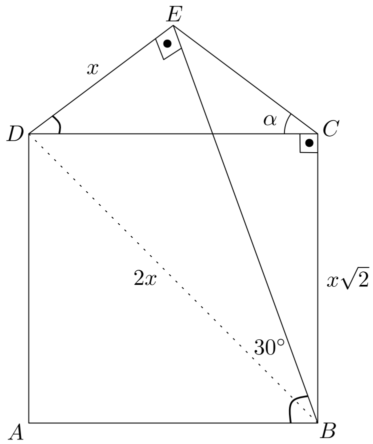
O halde A'nın rakamları toplamı 17 olur.

Cevap: c

24. Selma seçtiği sayıların çarpımının 5 ile bölünebilmesi için sayılardan birini 5'in katı olarak seçmek zorundadır. Bu sayı n ise diğer sayı $n - 11k$ veya $n + 11k$ olmalıdır. $n = 5, 10, 15, \ldots, 50$ sayıları için diğer sayı uygun şekilde seçilebilir. Yapılabilecek seçim adedi 36 olarak bulunur.

Cevap: d

25.



$|DE| = x$ ve $|BC| = x\sqrt{2}$ alalım. $m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{CBE})$ olduğundan $m(\widehat{DEB}) = 90°$ olur. $BCED$ dörtgeni kirişler dörtgenidir. Ayrıca $|BC| = x\sqrt{2}$ ise $|BD| = 2x$ olur ve BED dik üçgeninin $30°, 60°, 90°$ üçgeni olduğu görülür. $BCED$ kirişler dörtgeni olduğundan $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{ECD}) = 30°$ bulunur. (aynı yayı gören çevre açılar eştir)

Cevap: d

26. İki basamaklı bir sayının karesi en fazla dört basamaklı olur. Bu dört basamaklı sayının rakamları toplamı $4 \cdot 9 = 36$'dan az olur. Dolayısıyla aranan sayıların rakamları toplamı en fazla 5 olur. 10, 11, 12, 13, 14, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 40, 41, 50 sayılarından 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31 sayıları aranan koşulları sağlar.

Cevap: d

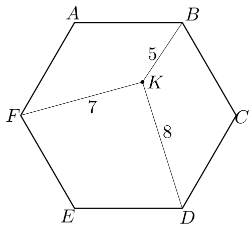
27. Kimya topluluğundaki öğrencilerin sayısı a olsun. O halde hem kimya hem de matematik topluluğuna katılanların sayısı $\frac{a}{7}$, dolayısıyla matematik topluluğuna katılanların sayısı da $\frac{8a}{7}$'dir. Matematik ve fizik topluluğuna katılanlar $\frac{4a}{21}$, fizik topluluğuna katılanlar da $\frac{4a}{7}$'dir. O halde fizik ve kimya topluluğuna katılanların sayısı $\frac{4a}{35}$'dir.

Cevap: a

28. 4 ile bölünmemesini hesaplamak daha kolay olacaktır. Hepsi tek sayı olmalıdır ya da sadece bir tanesi 4'e bölünemeyen çift sayı olmalıdır. Hepsi tek ise $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$, sadece biri 2 ya da 6 ise $4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}$. İstenmeyen durum olasılığı $\frac{1}{16} + \frac{1}{6} = \frac{11}{48}$ olduğundan istenen olasılık $1 - \frac{11}{48} = \frac{37}{48}$ olur.

Cevap: e

29.



BFD eşkenar üçgendir. BKD üçgeni D köşesi etrafında negatif yönde $60°$ döndürülürse $[DB]$ ve $[DF]$ çakışır. $FKDK'$ dörtgeninde KK' çizilerek $m(\widehat{FK'D}) = m(\widehat{BKD}) = 120°$ bulunur. BKD üçgeninde kosinüs teoreminden $|BD| = \sqrt{129}$ ve BCD ikizkenar üçgeninden $|BC| = \sqrt{43}$ bulunur.

Cevap: d

30. $861 = 3 \cdot 7 \cdot 41$ ise $n = p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot p_3^{x_3}$ biçiminde olabilir.

$n = p^x$ ise $n^n = (px)^{p^x} = p^{xp^x}$ olur. $xp^x + 1 = 861$ ise $x \cdot p^x = 860$ olur. Buradan çözüm yoktur.

$n = p^x \cdot q^y$ ise $n^n = (p^x q^y)^{p^x q^y} = p^{xp^x q^y} \cdot q^{yp^x q^y}$ ve $(xp^x q^y + 1)(yp^x q^y + 1) = 861 = 3 \cdot 7 \cdot 41.$

$$x \cdot p^x \cdot y^y + 1 = 21 \text{ ise } xp^x q^y = 20,$$
$$yp^x \cdot q^y + 1 = 41 \text{ ise } yp^x q^y = 40 \text{ olur. Buradan } p = 5, q = 2, x = 1, y = 2$$

$\Rightarrow n = p^x \cdot q^y = 5^1 \cdot 2^2 = 20$ bulunur. n'nin rakamları toplamı 2 olur.

Cevap: a

31. $939 = 625 + 250 + 64$ ve $625 \cdot 250 \cdot 64 = 10^7$. Daha fazla olamayacağını gösterelim. Sayılar x, y, z olsun.

$$\sqrt[3]{x \cdot y \cdot z} \overset{AGO}{\leq} \frac{x+y+z}{3} = \frac{939}{3} = 313 \text{ olur.}$$
$$x \cdot y \cdot z \leq (313)^3 < (320)^3 = 2^{15} \cdot 10^3 = 2^5 \cdot 2^{10} \cdot 10^3$$
$$3,2 \cdot 1,029 \cdot 10^7 < 10^8.$$

Dolayısıyla çarpımda 7'den fazla sıfır olamaz.

Cevap: a

32. $\binom{4}{2} \cdot 2 = 12$ toplam maç sayısıdır. Her maçta her iki tarafın kazandığı toplam puan sayısı 1 olduğundan toplam puan sayısı 12 olmalıdır. Demir'in en az 2,5 puanı olsaydı Betül'ün en az 3 puanı, Ceylin'in 3,5 puanı ve Ali'nin en az 4 puanı olacaktı. Bu durumda toplam puan sayısı 13 olurdu ve çelişki elde edilir.

Demek ki Demir'in en fazla iki puanı vardır. O halde Demir en fazla iki galibiyet almıştır. O halde Ali de en fazla iki galibiyet almıştır. Altı maç yapan Ali'nin puanı bu durumda $2 \cdot 1 + 4 \cdot 0,5 = 4$ olabilir.

Ali'nin puanı 4'ten az olsaydı diğer oyuncular en fazla puanları alsalar bile toplam puan sayısı 11 olurdu, bu da çelişkidir. Demek ki Ali'nin tam 4 puanı vardır. Ali 2 kez galip gelip 4 kez berabere kalmıştır. O halde Demir de iki galibiyet 4 beraberlik almıştır.

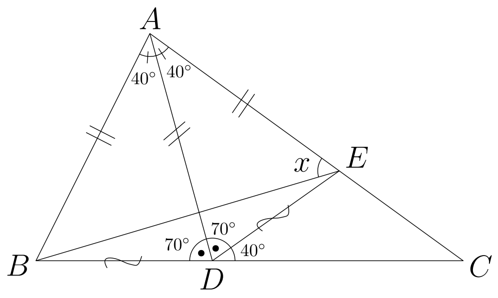
Betül ve Ceylin'in toplam puanı $12 - (4 + 2) = 6$ olur. Ali(4)>Ceylin>Betül>Demir(2) ve Ceylin'le Betül'ün puanları toplamı 6 olduğundan Ceylin'in 3,5 ve Betül'ün 2,5 puanı vardır.

Örnek Durum: Ali iki kez Demir'i yenmiş, Betül ve Ceylin'le ikişer kez berabere kalmış. Demir iki kez Betül'ü yenmiş ve iki kez Ceylin'e yenilmiş. Ceylin bir kere Betül'e yenilmiş bir kere de berabere kalmıştır.

Cevap: c

Deneme 13

1.



BAD ve DAE üçgenleri eş üçgenlerdir.
$m(\widehat{BAD}) = m(\widehat{DAE}) = 40°$ olur. BAE üçgeni ikizkenar üçgen olduğundan $m(\widehat{BAE}) = x = 50°$ bulunur.

Cevap: c

2. $abcdefkt = 10000(abcd) + efkt = 9999(abcd) + abcd + efkt$ olduğundan $abcd + efkt = 9999$ olmalıdır.

$$abcdefkt$$
$$10238976$$

O halde kullanılmayan rakamlar 4 ve 5'tir. $4 \cdot 5 = 20$

Cevap: a

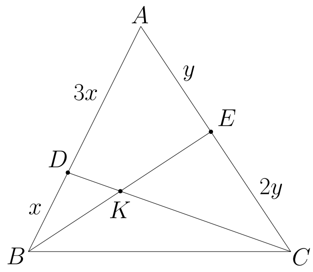
3. İş $7k$ olsun. $7k \cdot \frac{1}{7} = k$ ve $6k \cdot \frac{1}{3} = 2k$ ise $3k$ bittiğinde $4k$ kalan iş $n - 3$ işçi için 12 gün sürmüş. $\frac{4k}{(n-3)12} = \frac{k}{n \cdot 2}$ ise $12n - 36 = 8n$ ve buradan $n = 9$ olur.

Cevap: c

4. □□□□
5 için 4 durum
3 için 3 durum vardır. Kalan 8 rakam kalan haneler için 8'er defa kullanılabilir.
$4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 8 = 768$ sayı yazılabilir.

Cevap: d

5.



ABE üçgeninde CD kesenine göre Menaleus teoremi uygulanırsa $\frac{x}{4x} \cdot \frac{y}{2y} \cdot \frac{|KC|}{|KD|} = 1 \Rightarrow \frac{|KD|}{|KC|} = \frac{1}{8}$ olur.

Cevap: d

6.

$$3 + a + 5 + 4 + b = 12 + a + b = 3 \cdot k \text{ ise } a + b = 0, 3, 6, 3, 12, 15, 18$$
$$3 - a + 5 - 4 + b = 4 - a + b = 11 \cdot t \text{ ise } b - a = -4, 7 \quad \text{olabilir}$$

$a + b = 9$ ve $b - a = 7$ ise $b = 8, a = 1$
$a + b = 12$ ve $b - a = -4$ ise $b = 4, a = 8$
$a + b = 6$ ve $b - a = -4$ ise $b = 1, a = 5$

Cevap: c

7. $x^2 + \frac{3}{x} = 9 + 1$ ise $x^2 - 9 = 1 - \frac{3}{x}$
$\Rightarrow (x-3)(x+3) = \frac{x-3}{x}$ ise $x^2 + 3x = 1$ buradan $x^2 + 3x + 2 = 3$

Cevap: a

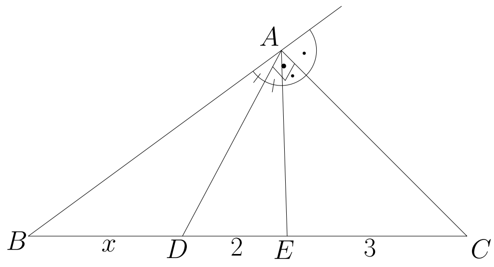
8. Üç farklı pozitif bölen $1 + 2 + 5 = 8$ veya $1 + 3 + 4 = 8$ şeklinde olabilir.

1. durumda sayı 2 ile bölünür fakat 4 ile bölünmez. O halde sonunda 1 tane sıfır bulunur.

2. durumda 4'e bölünebilen sayı 2 ile bölünebileceğinden en küçük çarpanın 1, 3 ve 4 olması mümkün değildir.

Cevap: b

9.



AC, BAE üçgeninde dış açıortay olur. İç açıortay ve dış açıortay teoremleri uygulanırsa

$$\frac{x}{2} = \frac{AB}{AE} = \frac{x+5}{3}$$
$$3x = 2x + 10$$
$$|BD| = x = 10$$

bulunur.

Cevap: e

10.

$$\begin{array}{r} 1000\ldots00000 \\ -\qquad\qquad 2022 \\ \hline 9\ldots997978 \end{array}$$

$\Rightarrow 2022 \cdot 9 - 5 = 18193$ olur.

Cevap: a

11. $|x+5+y-2+z+1| \leq |x+5| + |y-2| + |z+1| \leq 3+4+5$
$\Rightarrow |x+y+z+4| \leq 12$ ise $x+y+z = -16$ için $|x+y+z| \leq 16$ en çok olabilir.

Cevap: b

12. Herkesin farklı derece elde ettiği durumlar $4! = 24$ tanedir. Bir sıralamayı 2 kişinin paylaştığı durum sayısı

$$\binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} \cdot 2! = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$$

Bir dereceyi 3 kişinin paylaştığı durum sayısı

$$\binom{4}{3} \cdot \binom{2}{1} \cdot 1 = 8$$

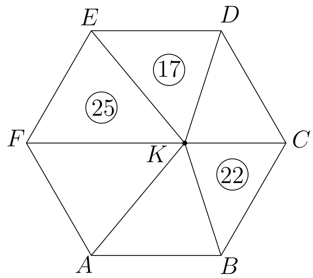
İki dereceyi ikişer kişinin paylaştığı durum sayısı

$$\binom{4}{2} = 6$$

Herkesin 1. olduğu durum sayısı 1 tane olmak üzere toplam durum sayısı $24+36+8+6+1 = 75$ bulunur.

Cevap: d

13.



$BCEF$ ve $ABDE$ dikdörtgendir.
$A(BCK) + A(FEK) = \frac{A(BCEF)}{2}$ kullanılırsa $A(BCK) + A(FEK) = A(ABK) + (DEF)$ olduğu görülür. $A(ABK) = 30$ bulunur.

Cevap: b

14. $5y + 5x = 5 + xy$ ise $5y - 5 = xy - 5x$ ve $x = \frac{5y-5}{y-5} = 5 + \frac{20}{y-5}$ olur.
$20 = 2^2 \cdot 5$'nin $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ tane böleninden 2 tanesi orijinal denklemi tanımsız yaptığından 10 farklı (x, y) ikilisi vardır.

Cevap: d

15. $2x + 5y = 7z = 2z + 5z$ ise $2x - 2z = 5z - 5y$
$2(x - z) = 5(z - y)$ olur.

$$2x^3 + 5y^3 = 7z^3 = 2z^3 + 5z^3 \text{ ise } 2x^3 - 2z^3 = 5z^3 - 5y^3$$
$$\Rightarrow 2\left(x^3 - z^3\right) = 5\left(z^3 - y^3\right)$$
$$\Rightarrow 2(x - z)\left(x^2 + xz + z^2\right) = 5(z - y) \cdot \left(z^2 + zy + y^2\right)$$

x, y, z farklı olduğundan $x^2 + xz + z^2 = z^2 + zy + y^2$

$$\text{O halde } x^2 - y^2 = zy - xz$$
$$(x - y)(x + y) = -z(x - y) \text{ ise } x + y = -z$$
$$\text{ve } x + y + z = 0 \text{ olur.}$$

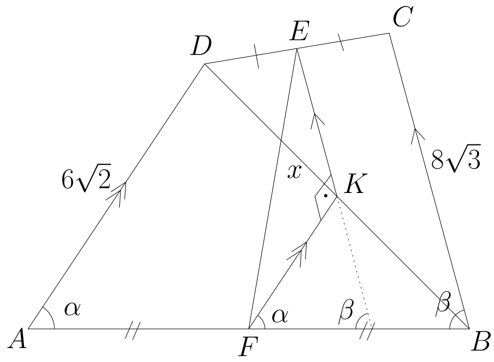
Cevap: b

16. Soru 3 kırmızı, 1 mavi, 2 siyah, 1 sarı ve 2 yeşil özdeş top kaç farklı şekilde sıralanabilir sorusuyla aynıdır.

$$\frac{8!}{3!2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!2!2!} = 1680$$

Cevap: c

17.



E ve F den sırasıyla BC ve AD'ye çizilen paraleller BD üzerindeki K noktasında kesişirler. $m(\widehat{EKF}) = 90°$, $|EK| = 4\sqrt{3}$ ve $|FK| = 3\sqrt{2}$ olur.

FKE dik üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $|FE| = x = \sqrt{66}$ bulunur.

Cevap: e

18. $5^{4^9} \equiv 5^x \pmod{11}$, $4^9 \equiv x \pmod{10}$, $4^1 \equiv 4, 4^2 \equiv 6, 4^3 \equiv 4, \dots \pmod{10}$
$x \equiv 4 \pmod{10}$ ise $5^4 \equiv 25^2 \equiv 3^2 \equiv 9 \pmod{11}$ olur.

Cevap: e

19.

$a + b = -c$ ve $(a+b)^3 = (-c)^3$ ise $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = -c^3$ olur.

$a^3 + b^3 + c^3 = -3ab(a+b) = -3ab(-c) = 3abc$

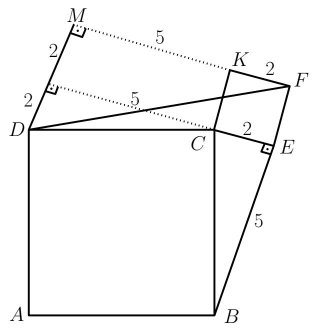
Buradan $\dfrac{a^3 + b^3 + c^2}{abc} = 3$ olur.

Cevap: a

20. Her dört bilyeden en az ikisini aynı çocuk getirdiği için dörtten az sayıda çocuk vardır (Güvercin yuvası gereği). Çocuklardan hiçbiri üçten fazla bilye getiremez. O halde 3 çocuk 3'er bilye getirmiştir.

Cevap: b

21.



D'den CE ve KF'ye çizilen dikme ayakları sırasıyla N ve M olsun. $\overset{\triangle}{DNC}=\overset{\triangle}{CEB}$ olur.
$|DE| = |NM| = 2$ ve $|NC| = |MK| = 5$ bulunur.
DMF üçgeninde Pisagor teoremi uygulanırsa $|DF|^2 = 4^2 + 7^2 = 65$ ise $|DF| = \sqrt{65}$ bulunur.

Cevap: c

22. $\lfloor x \rfloor \cdot x = 49$ ise $x = 7$ olduğu görülür.
$\lfloor y \rfloor \cdot y = 69$, $8 < y < 9$ ve $\lfloor y \rfloor = 8$, $y = \frac{69}{\lfloor y \rfloor} = \frac{69}{8}$ olur. $x + y = 7 + \frac{69}{8} = \frac{125}{8}$ bulunur.

Cevap: c

23. Pantolon maliyeti: $100x$, gömlek maliyeti: $100y$ olsun. $140x > 120y \quad 140x\frac{90}{100} = 126x$

$$120y \cdot \frac{90}{100} = 108y$$
$$126x + 108y - 20 - 100x - 100y = 350$$
$$26x + 8y = 370 \text{ ise } 13x + 4y = 185$$
$$26x + 8y - 20 = 10x + 10y$$
$$16x - 2y = 20 \text{ ise } 8x - y = 10$$

$$\begin{array}{rr} & 8x - y = 10 \\ + & 13x + 4y = 185 \\ \hline & 45x = 225 \\ & x = 5 \end{array}$$

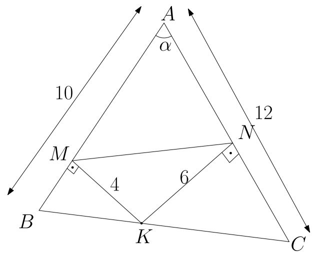
olur. $500 \cdot \frac{140}{100} = 700$ TL'dir.

Cevap: b

24. Davut'un yanında duranlar ve Davut ile arasında bir kişi bulunanlar yalan söylemektedir. (Davut ile aralarında ikiden az kişi var.) Bu nedenle Davut ile aralarında tam olarak iki kişi olanlar doğruyu söylemektedir. Bu şekilde Davut'tan uzaklaşırken herkesin doğru söylediği anlaşılır. Sıradaki yalancı sayısının en çok 4 olduğu görülür.

Cevap: b

25.



$$A(ABC) = A(ABK) + A(AKC)$$
$$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 \cdot \sin\alpha = \frac{4 \cdot 10}{2} + \frac{6 \cdot 12}{2}$$
$$60 \sin\alpha = 20 + 36$$
$$\sin\alpha = \frac{56}{60} = \frac{14}{15}$$

$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{MKN}) = 180°$ olduğundan bu açıların sinüsleri eşittir.

$$\text{Alan}(MKN) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{14}{15} = \frac{56}{5}$$

Cevap: d

26. EBOB$(A, B) = d$, $A = dx$, $B = dy$, EKOK$(A, B) = dxy$

$$dx + dy + 21 \cdot d = dxy \text{ ise } x + y + 21 = xy \text{ ve } x = \frac{y+21}{y-1} = 1 + \frac{22}{y-1} \text{ olur.}$$

$$y - 1 = 1, 2, 11, 22$$
$$y = 2, 3, 12, 23$$
$$x = 23, 12, 3, 2$$

$$A = 23d, B = 2d \quad \text{olsun}$$
$$A + B = 25d \rightarrow d_{\max} = 4$$
$$(A + B)_{\max} = 100$$

Cevap: a

27. $2x^2 + (2b + 2a)x + 6a = 2x^2 + (2b - a)x - 3a$

$$3ax = -9a$$
$$x = -3 \quad \text{(ortak kök)}$$
$$2(-3)^2 + (2b - a) \cdot (-3) - 3a = 0$$
$$18 - 6b + 3a - 3a = 0 \text{ ise } b = 3 \text{ olur.}$$

Cevap: a

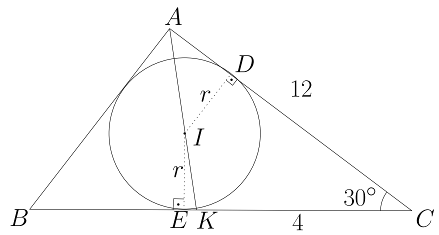
28. Tahtaya yazılan ardışık sayıların toplamı $x + (x+1) + \cdots + (x+29) = 30n + 435$ olur. Silinen sayı $x+n$ $(0 \leq n \leq 29)$ olsun.

$$30n + 435 - (x+n) = 1026$$
$$29(x+15) = 1026 + n$$

$29 \mid 1026 + n$ olması için $n = 18$ olmalıdır. Bu durumda $x + 15 = 36$, $x = 21$ ve silinen sayı $x + n = 21 + 18 = 39$ bulunur.

Cevap: e

29.



$$A(AKC) = A(AIC) + A(KIC)$$
$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot r}{2} + \frac{12 \cdot r}{2}$$
$$12 = 2r + 6r$$
$$r = \frac{3}{2}$$

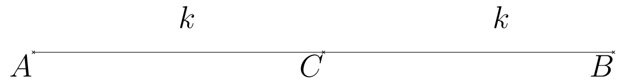
CEI üçgeni $15°, 75°, 90°$ üçgenidir. $|EI| = r = \frac{3}{2}$ ise $|EC| = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ve $|EK| = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1$ bulunur.

Cevap: a

30. $36 - x^2 \geq 0$ olmalı.
$36 - x^2 = 0$ olduğundan $x = \mp 6$ ve $y = 2022$ ise $(x,y) = (6, 2022), (-6, 2022)$
$36 - x^2$ çift olduğundan
$x^2 = 4$ ise $x = \mp 2$ ve $32 = 8(y - 2012)^2$ buradan $\begin{array}{l} y - 2022 = \mp 2 \\ y = 2024, 2020 \end{array}$
$(x,y) = (2, 2024), (2, 2020), (-2, 2024), (-2, 2020)$ 6 tane çözüm ikilisi var.

Cevap: c

31.



Sabit hızla geçen süre $\frac{2k}{100V} = \frac{12k}{600V}$

Diğer durum $\frac{k}{100\ V} + \frac{k}{120\ V} = \frac{11k}{600\ V}$

$\frac{1}{12} = \frac{x}{100} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$'tür.

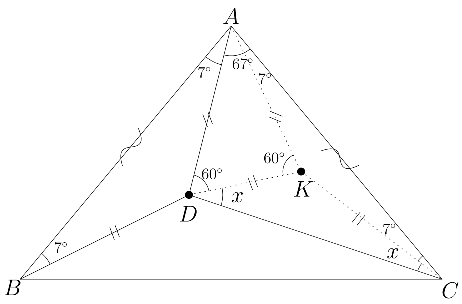
Cevap: b

32. Ali her renkten kutuda 4 tane bilye bırakır. Sonra 5 tane aynı renk bilye olması için bir bilye daha bırakır. $4 + 4 + 4 + 4 + 1 = 17$ bilye bırakır. $45 - 17 = 28$ bilye alır.

Cevap: d

Deneme 14

1.



$\overset{\triangle}{ADB} = \overset{\triangle}{AKC}$ ABC üçgeninin içine $\overset{\triangle}{ADB}=\overset{\triangle}{AKC}$ eş üçgenini çizelim. $m(\widehat{DAK}) = 60°$ ve ADK eşkenar üçgen olur. $DK = KC$ olduğundan $m(\widehat{KDC}) = m(\widehat{KDC}) = x$ dersek ADK üçgeninin iç açıları toplamından $67 + 60 + x + x + 7 = 180° \Rightarrow x = 23°$ ve $m(\widehat{ACD}) = 23° + 7° = 30°$ bulunur.

Cevap: d

2. $6^{2021} \cdot 337^{2022} + 1 \equiv 0 \pmod p$
$p \neq 2, p \neq 3, p = 5 \Rightarrow 1 \cdot 2^{2022} + 1 \equiv 0 \pmod 5$

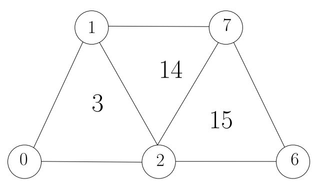
Cevap: c

3.

$$\frac{4x - 3 + x^2 + 7}{y^2 + y + 3 + y - 2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{y^2 + 2y + 1} = \frac{(x+2)^2}{(y+1)^2} = 4$$
$$\Rightarrow \frac{x+2}{y+1} = 2 \Rightarrow x + 2 = 2y + 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$$

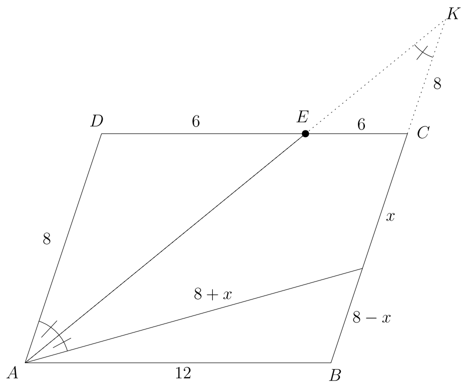
Cevap: e

4. 3 sayısı bir kaç farklı rakamın çarpımı şeklinde yazılamayacağı için $3 = 0 + 1 + 2$ şeklinde toplam yoluyla elde edilmiştir. O halde 14 üç rakamın toplamı şeklinde yazılamaz, çünkü $14 > 1 + 2 + 9$. Dolayısıyla $14 = 1 \times 2 \times 7$ şeklinde elde edilmiştir. Bu durumda 15 sayısı 7 ile 1 in yada 7 ile 2 nin katkısıyla elde edilmiştir. 15 sayısı 7 ye tam bölünmediği için 15 toplam olarak elde edilebilir. 7 ile 1 in katkısıyla olsaydı $15 - 1 - 7 = 7$ olduğundan 7 yi iki kez kullanmış olurduk buda çelişkidir. Dolayısıyla $15 = 2 + 7 + 6$ şeklinde elde edilmiştir. Dairelerin içinde yazılan sayıların toplamı $0 + 1 + 2 + 6 + 7 = 16$ bulunur.



Cevap: b

5.



$AE \cap BC = K$ olsun. $\overset{\triangle}{ADE} = \overset{\triangle}{KCE}$ olduğundan $|AD| = |KC| = 8$ olur. $|FC| = x$ olsun. $m(\widehat{DAK}) = m(\widehat{AKF})$, $|AF| = |FK| = 8 + x$ ve $|BF| = 8 - x$ olduğuna göre, Çevre$(ABF) = 12 + 8 + x + 8 - x = 28$ bulunur.

Cevap: c

6. $m^2 = (n-13)(n-14) \to (0,13), (0,14)$ olmak üzere iki çözüm var. $n - 13$ ile $n - 14$ ardışık iki sayı olduğundan çarpımları pozitif bir tam sayının karesi olamaz.

Cevap: c

7. Pistin çevresi x, Deniz'in hızı a, Ege'nin hızı b olsun.
$\frac{x}{a} + 35 = \frac{x}{b}$ ve $\frac{x}{a+b} = 6$
$\frac{6c+6b}{a} + 35 = \frac{6a+6b}{b}$ $\quad x = 6a + 6b$
$6 + 6\frac{b}{a} + 35 = 6\frac{a}{5} + 6$ $\quad \frac{a}{b} = y$ olsun $\frac{6}{y} + 35 = 6y$
$6y^2 - 35y - 6 = 0 \Rightarrow (6y+1)(y-6) = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow a = 6b$ olur. $\frac{x}{6b+b} = 6 \Rightarrow \frac{x}{7b} = 6 \Rightarrow \frac{x}{b} = 42$

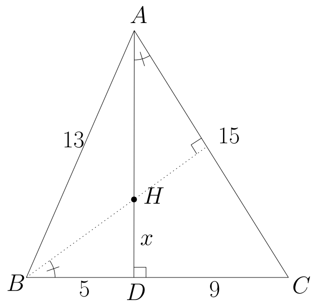
Cevap: d

8. Birinci bölmeye A bölmesi kademelere de A_1, A_2, A_3, A_4 diyelim. Benzer şekilde diğer bölmeler de B, C, D olarak adlandırılsın. Başlangıçta (A_0, B_0, C_0, D_0)'ı $A_1B_1B_2C_1C_2C_3D_1D_2D_3D_4$ gibi her bölüm kendi içinde sıralı olacak şekilde sıralamalıyız.

$$\frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 6 \cdot 2} = 12600$$

Cevap: d

9.



A'dan BC'ye inilen dikme ayağı D olsun. $|BD| = 5$, $|DC| = 9$ ve $|AD| = 12$ olur. $\overset{\triangle}{BDH} \sim \overset{\triangle}{ADC}$ (AA benzerliği).

$$\frac{x}{5} = \frac{9}{12}, \quad x = \frac{15}{4}$$

$$|AH| = 12 - \frac{15}{4} = \frac{33}{4}$$

Cevap: d

10. $2^{243} + 3^{25} + 5^8 \equiv ? \pmod{30}$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$
mod 2 $\Rightarrow 0 + 1 + 1 \equiv 0 \pmod 2$
mod 3 $\Rightarrow (-1)^{243} + 0 + (-1)^8 \equiv -1 + 1 \equiv 0 \pmod 3$
mod 5 $\Rightarrow 3 + 3 + 0 \equiv 1 \pmod 5$
Kalan: 6

Cevap: b

11.

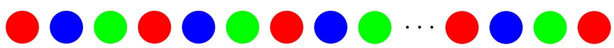
$$\frac{x^2 - y^2}{xy} = 6 \Rightarrow x^2 - y^2 = 6xy \Rightarrow x^4 + y^4 = 38x^2y^2$$

$$\frac{x^6 - y^6}{x^3y^3} = \frac{\left(x^2\right)^3 - \left(y^2\right)^3}{x^3y^3} = \frac{\left(x^2 - y^2\right) \cdot \left(x^4 + x^2y^2 + y^4\right)}{x^3y^3}$$

$$= \frac{6xy\left(38x^2y^2 + x^2y^2\right)}{x^3y^3} = \frac{6 \cdot 39x^3y^3}{x^3 \cdot y^3} = 234$$

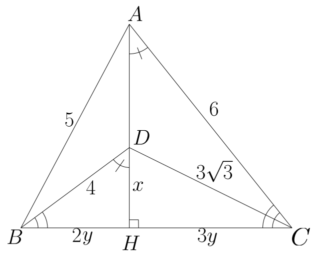
Cevap: b

12. Yan yan gelen 3 damadan hiçbirinin kırmızı olmadığını varsayalım. Ortadaki maviyse sağındaki dama kırmızıdır. Ortadaki yeşilse sağındaki dama kırmızıdır. Bu da baştaki kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla her 3 ardışık damadan en az biri kırmızı olmak zorundadır. En soldaki iki dama kırmızı olmasın. En soldaki yeşilse bunun sağında kırmızı dama olmalı, en soldaki maviyse bunun sağında kırmızı dama bulunmuyor, çelişki. Böylece en soldaki iki damadan en az biri kırmızı. Benzer şeklide en sağdaki iki damadan en az biri kırmızı. 127 damayı $2 + 3 \times 41 + 2$ şeklinde bölersen en az kırmız dama olduğu durumu elde ederiz. Örnek durum aşağıdaki gibidir.



Cevap: d

13.



$ABDC$ konkav dörtgeninde $AD \perp BC$ olduğundan

$$|AB|^2 + |DC|^2 = |BD|^2 + |AC|^2$$
$$5^2 + |DC|^2 = 4^2 + 6^2$$
$$|DC| = 3\sqrt{3} \quad \text{olur.}$$

$\overset{\triangle}{BHD} \sim \overset{\triangle}{CHA}$ olduğundan (AA benzerliği) $\frac{|BH|}{|HC|} = \frac{2}{3}$ olur. $\overset{\triangle}{BHD}$ ve $\overset{\triangle}{CHD}$'de Pisagor teoremi uygulanırsa $|DH| = x = \frac{6}{\sqrt{5}}$ bulunur.

Cevap: d

14. $n + 3m = a^3$, $n^2 + 3m^2 = b^3$
$(n + 3m)(n^2 + 3m^2) = (ab)^3$
$n^3 + 3n^2m + 3nm^2 + m^3 + 8m^3 = (ab)^3$
$(n + m)^3 + (2m)^3 = (ab)^3 \Rightarrow 0$
Fermat'ın büyük teoremi: $x^n + y^n = z^n$ $(n > 2, n \in \mathbb{Z})$ denkleminin pozitif tam sayılarda çözümü yoktur.

Cevap: a

15.

$$A = \frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{11} + (\sqrt{7} + 2)} - \frac{\sqrt{7} - 2}{\sqrt{11} - (\sqrt{7} + 2)}$$

$$A = \frac{(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{11} - \sqrt{7} - 2 - \sqrt{11} - \sqrt{7} - 2)}{11 - (\sqrt{7} + 2)^2}$$

$$A = \frac{(\sqrt{7} - 2)(-2\sqrt{7} - 4)}{11 - 11 - 4\sqrt{7}} = \frac{(\sqrt{7} - 2)[-2(\sqrt{7} + 2)]}{-4\sqrt{7}} = \frac{3}{2\sqrt{7}}$$

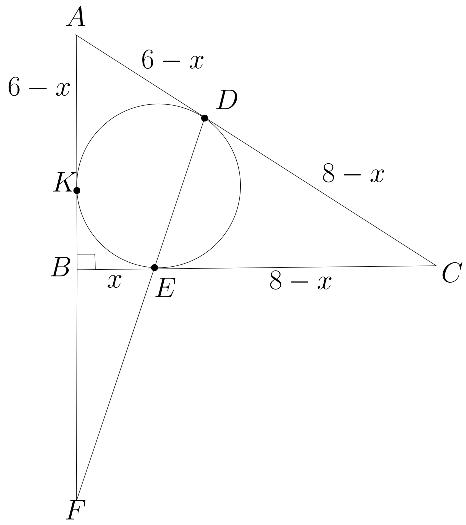
$m = 3, n = 2, r = 7 \Rightarrow m + n + r = 12$

Cevap: d

16. Farkların mutlak değeri d olsun. 1 ile $d + 1$ aynı grupta olmalı, 2 ile $d + 2$ aynı grupta olmalı,$\ldots$, d ile $2d$ aynı grupta olmalı. Dolayısıyla ilk $2d$ sayı ikili gruplara ayrılmış oldu. $2d + 1$ ile $3d + 1$ aynı grupta olmalı,$\ldots$, $3d$ ile $4d$ aynı grupta olmalı. Benzer şekilde devam ederek $\{1, 2, \ldots, 60\}$ kümesinin, her biri $2d$ tane sayıdan oluşan ve her bir d tane ikiliye bölünen alt kümelere parçalandığını görüyoruz. Dolayısıyla $2d \mid 60$, yani $d \mid 30$. 30 sayısının 8 pozitif tam sayı böleni var: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30. d'yi bunların her birine eşitlediğimizde bir çözüm gelir.

Cevap: b

17.



$BK = KE = x$ alınarak eşitlikler takip edilirse $6 - x + 8 - x = 10 \Rightarrow x = 2$ olur. F köşesinden başlayarak Menaleus teoremi uygulanırsa $\frac{BF}{BF+6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{2} = 1 \Rightarrow |BF| = 6$ bulunur.

Cevap: b

18. Çift elemanlı alt kümelerdeki elemanların çarpımlarının toplamı $Ç$, tek elemanlı alt kümelerdeki elemanların çarpımlarının toplamı T olsun.

$$\begin{aligned}(1+1)(1+2)(1+3)\cdots(1+10) - 1 &= 11! - 1 = Ç + T \\ (1-1)(1-2)(1-3)\cdots(1-10) - 1 &= \quad\;\; -1 = Ç - T\end{aligned}$$

$\Rightarrow 11! - 2 = 2Ç \Rightarrow$ Wilson teoreminden $12! \equiv -1 \pmod{13}$. Buradan $11! \equiv 1 \pmod{13}$.

$$\begin{aligned}1 - 2 &\equiv 2Ç \pmod{13} \\ 12 &\equiv 2Ç \pmod{13} \\ 6 &\equiv Ç \pmod{13}\end{aligned}$$

Cevap: a

19. Eray kendi sorularından x, rakibin sorularından y tanesini doğru cevaplasın. $x+y = 11$. $5x+7y = 63 \Rightarrow x = 7, y = 4$. Bu durumda Ege kendi sorularından 6, rakibinden 3 doğru cevap vererek $6 \cdot 5 + 3 \cdot 7 = 51$ puan alır.

Cevap: b

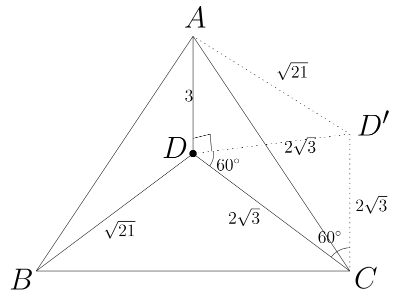
20. Koltukları numaralandırırsak evli çiftler tek ve çiftlik bakımından farklı koltuklarda oturmalıdır.

Örneğin E_1 için 6 yer varken K_1 için 3 yer kalır. E_2 için 4 yer varken K_2 için 2 yer kalır. Diğerleri de benzer şekilde sıralanabilir.

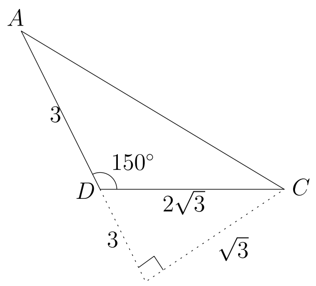
$$\frac{6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2!}{6!} = \frac{2}{5}$$

Cevap: b

21.



BDC üçgeni C köşesi etrafında negatif yönde $60°$ döndürüldüğünde ACD' üçgeni elde edilir. $m(\widehat{DCD'}) = 60°$ olduğundan DCD' üçgeni eşkenar üçgendir. ADD' üçgeni Pisagor teoremini sağladığından $m(\widehat{D}) = 90°$ olan dik üçgendir. $m(\widehat{ADC}) = 90° + 60° = 150°$ olur.



Kosinüs teoremi yapılarak veya $30°, 60°, 90°$ üçgeni ve Pisagor teoremi kullanılarak $|AC|^2 = 6^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow |AC| = \sqrt{39}$ bulunur.

Cevap: e

22. $12! \equiv -1 \pmod{13}$ (Wilson teoremi)
$12! \equiv 0 \pmod{11} \Rightarrow -1, 12, 25, 38, 51, 64, 77$
$12! \equiv 77 \pmod{143}$

Cevap: c

23. Deniz'in alacağı x vereceği y olsun. $x - y = 80 \cdot 3 = 240$. Burak'ın Can'a borcu $6y$ olur. Bu durumda Burak'ın alacağı $6y - 80$ olur. Demek ki Asya'nın borcu $6y - 80$ TL imiş. Asya'nın alacağı da y olduğuna göre $6y - 80 - y = 80 \Rightarrow 5y = 160 \Rightarrow y = 32$ olur. $x = 272$ TL Can'ın Deniz'e borcudur.

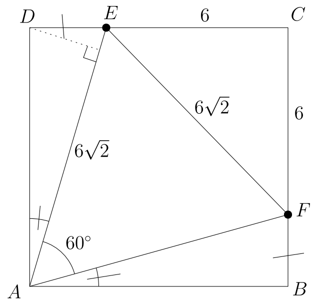
Cevap: d

24. Kentlere Ali'nin geçtiği sırayla numara verelim: $1, 2, 3, \ldots, n$. $n \geq 108$ olsun. 1 numaralı kentten sadece 2 numaralı kente yol var, dolayısıyla 108 numaralı kentten 1 ve 108 numaralı kentler dışında tüm kentlere yol var. O halde 2 numaralı kentten en az 3 kente yol var: 1, 3 ve 108. Çelişki! Demek ki $n \leq 107$.

$n = 107$ için örnek verelim: Kentlere $1, 2, \ldots, 110$ diye numara verelim. 1) Her $1 \leq i \leq 54$ için i den $i+1$'e yol var. 2) Her $56 \leq j \leq 107$ için j'den $110 - j$ ile 110 arasındaki (bunlar da dahil) tüm kentlere yol var. 3) 55 den 109 ve 110'a yol var. 4) Bunlardan başka yol yok. Bu durumda her $1 \leq k \leq 107$ kentinden tam k tane kente yol çıktığı kolayca kontrol edilir.

Cevap: e

25.



$\overset{\triangle}{ADE} = \overset{\triangle}{ABF}$ olduğundan $|EC| = |FC| = 6$ ve $|EF| = 6\sqrt{2}$ olur. $m(\widehat{DAE}) = m(\widehat{FAB}) = 15°$ olduğundan ADE üçgeni $15°, 75°, 90°$ üçgenidir. Bu üçgende hipotenüse ait yükseklik hipotenüsün 1/4'ü olduğu için

$$A(\overset{\triangle}{DAE}) = \frac{6\sqrt{2} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{4}}{2} = 9$$

bulunur.

Cevap: a

26. $a(b-a) = ab \Rightarrow 2310b - 2310a = ab \Rightarrow 2310b - ab = 2310a \Rightarrow b(2310-a) = 2310a$
$a(2310-a) + 2310(2310-a) = 2310^2 \Rightarrow \underbrace{(b+2310)}_{x}\underbrace{(a-2310)}_{y} = -2310^2 \quad (x > 0, y < 0)$

$2310 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \quad x + y = a + b$
$x = 2310 \cdot \frac{22}{21} = 110 \cdot 22 = 2420 \Rightarrow b = 2420 - 2310 = 110$
$-y = 2310 \cdot \frac{21}{22} = 21 \cdot 21 \cdot 5 = 2205 \Rightarrow a = 2310 - 2205 = 105$
$\Rightarrow b - a = 5$

Cevap: b

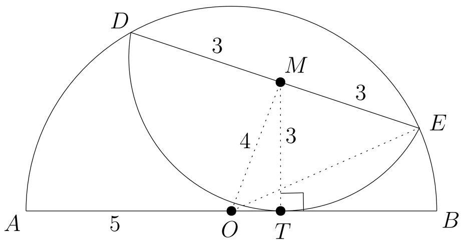
27. $\dfrac{36}{(x-y)^2 + (2x+3)^2 + 4}$ ifadesinin en büyük değeri için paydası en küçük olan değeri 4 olmalıdır. $\frac{36}{4} = 9$ ifadenin en büyük değeri olur.

Cevap: b

28. Kutuların kapasiteleri toplamı $3+4+5 = 12$ olduğundan 8 top dağıtıldığında 4 topluk boşluk kalıyor. Bu durumda bizde topları değil boşlukları kutulara dağıtalım. Bu soru ile $a+b+c = 4$ denklemini sağlayan kaç tane (a, b, c) doğal sayı üçlüsü vardır sorusu özdeştir. Bu dağılım $C(4+3-1, 3-1) = 15$ şekilde yapılabilir. Fakat ilk kutuya 4 boşluk düşen durum istenmeyen durum olduğunda cevap $15 - 1 = 14$ bulunur.

Cevap: c

29.



$OM \perp DE$ ve $MT \perp AB$'dir. OME ve OTM dik üçgenlerinde Pisagor teoremi uygulanırsa $|OM| = 4$ ve $|OT|^2 + 3^2 = 4^2 \Rightarrow |OT| = \sqrt{7}$ bulunur.

Cevap: c

30.

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 6xt - 6yt - 6zt \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2xt - 2yt - 2zt \pmod 4$$
$$(x-t)^2 + (y-t)^2 + (z-t)^2 \equiv 3t^2 \pmod 4$$

mod 4'te kare kalanlar 0, 1 olduğundan t, tek ya da çift olduğunda x, y, z daima çift olmalıdır. O zaman sıralı dörtlü sayısı $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 32$ bulunur.

Cevap: b

31.

$$d_1 : 2x - 3y + z = 12$$
$$d_2 : 3x + y - 2z = 21$$
$$d_3 : x - y + 3z = -5$$

d_1, d_2 ve d_3 denklemleri kullanılarak değişkenlerden z'den kurtulunur. Bunun için $2d_1 + d_2$ ve $-3d_1 + d_3$ yapıldığında

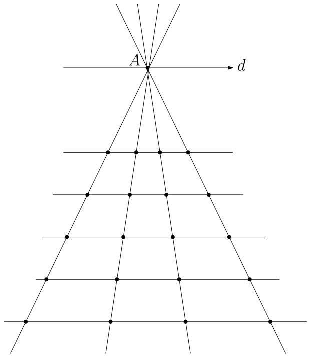
$$8/ \quad 7x - 5y = 45$$
$$5/ \quad -5x + 8y = -41$$

gelir. Buradan $31x = 155 \Rightarrow x = 5, y = -2, z = -4 \Rightarrow x \cdot y \cdot z = 40$

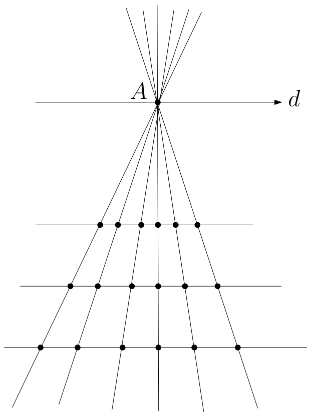
Cevap: a

32. Bir d doğrusu çizelim ve üzerinde bir A noktası alalım. Bundan sonra çizilecek her doğru ya A noktasından geçecektir ya da d doğrusuna paralel olacaktır. Bu durumda istenen koşulların sağlanması için d doğrusu dışında A noktasından geçen 4 doğru ya da 6 doğru çizilebilir. Örnek durumlar aşağıda verilmiştir.

1. durum:



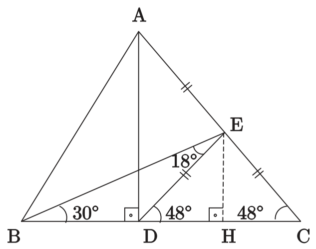
2. durum:



Cevap: b

Deneme 15

1.



E'den BC'ye inilen dikme ayağı H olsun. $EH \parallel AD$ ve $|EH| = \frac{|AD|}{2}$ olur.

BEH üçgeni $|EH| = \frac{|BE|}{2}$ olduğundan $30°, 60°, 90°$ üçgenidir.

$[ED]$ çizilirse $|ED| = |EC|$ ve $m(BED) = 18°$ bulunur.

Cevap: c

2. Sayımız $A = xy23$ olsun. O zaman $A - 23 = 100 \cdot (xy)$ sayısı da 23'ün katıdır. Bu da xy'nin 23'ün katı olması demektir. $(xy) = 23, 46, 69, 92$ olabilir.

Cevap: b

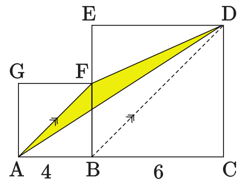
3. $x < x+4 < x+5 < x+13 < 5x \Rightarrow 13 < 4x$ olduğundan x en az 4 olabilir. $\Rightarrow 4+8+9+17 = 38$

Cevap: e

4. Dikkat edilirse sahte paranın bulunması istenmiyor. Sahte paranın ağr mı, hafif mi olduğunun belirlenmesi isteniyor. İlk tartımda paraları 1010, 1010 ve 1 ayıralım. 1010 para bulunan iki grubu tartalım. Eğer bu grupların ağırlıkları eşit gelirse ağırlıkça farklı olan para tartılmayan paradır. Tartılan paraların hepsi gerçek para olduğundan bu paralardan biriyle tartılmayan sahte parayı tartarak hafif mi, ağır mı olduğunu bulabiliriz. Eğer 1010 para bulunan grupların tartısı eşit gelirse hafif olan grubu 505, 505 diye iki gruba ayırıp tartarız. Eşit gelirse sahte para diğer grupta ve ağırdır. Eşit gelmezlerse sahte para bu grupta ve hafiftir.

Cevap: b

5.



BD çizilir. $AF \parallel BD$ olduğundan $A(AFD) = A(ABF)$ (tabanları ve yükseklikleri eşit üçenler) olur. İstenen alan $\frac{4 \cdot 4}{2} = 8$ bulunur.

Cevap: e

6. $\lfloor \frac{52}{5} \rfloor + \lfloor \frac{52}{5^2} \rfloor = 12$ olduğundan sayı 12 sıfırla biter. $\frac{52!}{10^{12}}$ sayısındaki 2 çarpanının sayısı 4'ten fazla olduğu için 16 ile tam bölüneceği kesindir. Bir sayının 16 ile bölünmesi ilk dört basamağını oluşturan sayının 4 ile bölünmesidir. Bu durumda $78x4$ sayısı 16'nın katı olacağından $x = 2$ bulunur.

Cevap: a

7. Yaşlar $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ şeklinde sıralansın. Kümenin 4 elemanlı olması iki kişinin aynı yaşta olduğunu gösterir. Kümedeki bir eleman 2 kez bulunmuş olmalı ve tam toplam 4 'ün katı (herkesin yaşı dört defa toplandı) olmalıdır. $61 + 64 + 67 + 69 = 261$'e ancak 67 eklendiğinde 4'e bölünebileceğinden 2 kez olması gereken sayı 67'dir.

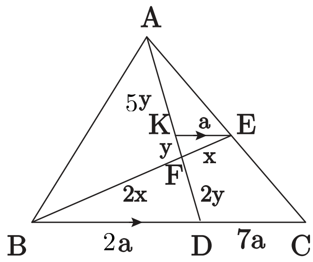
$$4\,(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) = 261 + 67$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 82$$
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 61, a_5 = 21$$
$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 69, a_1 = 13 \text{ olduğundan}$$
$$a_2 = 15 \quad a_3 = 15 \quad a_4 = 18 \text{ bulunur.}$$

Cevap: d

8. Zor soruların sayısı a, kolay soruların sayısı b ve diğer soruların (yanı tam olarak iki kişi tarafından çözülen soruların) sayısı da c olsun. O halde soru sayıları toplamı $a + b + c = 100$ ve toplam çözüm sayısı $a + 3b + 2c = 60 \cdot 3 = 180$ olur. Birinci denklemin 2 katından ikinci denklemi çıkarırsak $a - b = 20$ buluruz, yani zor soruların sayısı kolay soruların sayısından 20 fazladır.

Cevap: e

9.



$|BD| = 2a$, $|FE| = x$, $|BF| = 2x$, $|FD| = 2y$ ve $|AF| = 6y$ alalım. E'den BC'ye çizilen paralel AF'yi K'da kessin. $\overset{\triangle}{KEF} \sim \overset{\triangle}{DBF}$ olduğundan $|KE| = a$, $|KF| = y$ ve $|AK| = 5y$ olur. Temel orantı teoremi kullanılarak $|DC| = \frac{8a}{5}$ ve $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{5}{4}$ bulunur.

Cevap: b

10. $n > 1$ için $n = 2k + 1$ basamaklı $101010 \ldots 101$ sayısı

$$10^0 + 10^2 + 10^4 + \ldots + 10^{2k} = \frac{10^{2k+2}}{10^2 - 1}$$

olduğundan k sayısı çift ise $\frac{10^{k+1}-1}{9} \cdot \frac{10^{k+1}+1}{11}$, k tek ise $\frac{10^{k+1}-1}{10^2-1} \cdot \left(10^{k+1} + 1\right)$ şeklinde 1'den büyük iki sayısının çarpımı şeklinde gösterilebildiği için asal değildir. $k = 1$ için 101 sayısı asaldır.

Cevap: a

11.

$$\frac{19 + 5x}{20 + 10x} \geq \frac{60}{100} \Rightarrow 95 + 25x \quad 60 + 30x$$
$$\Rightarrow 35 \geq 5x \Rightarrow 7 \geq x$$

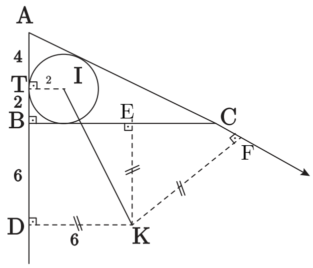
Bu durumda 7 kere 10 bilye konularak oran %60'a düşer. Sonraki 5 top kırmızı ve 3 top beyaz konulursa oran %60'ın üzerinde kalır ve 4. beyaz topta oran %60'ın altına düşer. Bu durumda cevap $7 \cdot 10 + 5 + 3 = 78$ olur.

Cevap: b

12. Ali'nin yediği şeker sayılarının ardışık tek sayılar olduğu görülüyor. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) \leq 101$ olmalı. Buradan $n = 10$ olur. Ali'nin son gün yediği şeker sayısının 1 olduğu görülür. Betül'ün yediği toplam şeker sayısı $2 + 4 + 6 + \cdots + 20 = 110$ bulunur.

Cevap: c

13.



D, E ve F noktaları dış teğet çemberin değme noktaları olsun. $|AD| = |AF| = \frac{\text{Çevre}(ABC)}{2} = \frac{24}{12}$ olur. $|BD| = |EK| = |DK| = 6$'dır. $IT \parallel KD$ olduğundan yamuktur. I'dan DK'ye dikme çizilerek elde edilen dikdörtgen ve dik üçgen kullanılarak $|IK| = 4\sqrt{5}$ bulunur.

Cevap: e

14. (a, b) sıralı ikilileri $(p, 2), (2, p), (1, 2p)$ ve $(2p, 1)$ olmak üzere $4 \cdot 25 = 100$ (100'den küçük 25 tane asal sayı var.) Fakat $(2, 2)$, iki kez sayıldığı için cevap 99 olur.

Cevap: d

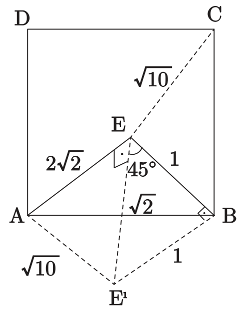
15. $(a + b)^2 + 2(a - 4) = (b + 4)^2$ eşitliğini düzenleyelim. $a^2 + 2ab + b^2 + 2a - 8 = b^2 + 8b + 16 \Rightarrow a^2 + 2ab + 2a - 8b - 24 = 0$ çarpanlarına ayıralım. $(a - 4) \cdot (a + 2b + 6) = 0$ ve $a + 2b + 6 > 0$ olacağından $(a - 4) = 0$ ve $a = 4$ olmalıdır. $b > 3a$ olduğundan $b > 12$ olur. $a + b$ en az $4 + 13 = 17$ olabilir.

Cevap: d

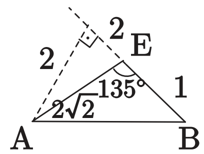
16. $n = 46$ için 464748 dizisi elde edilir. Bu dizide 6474 dizisinin elde edilebildiği görülüyor.

Cevap: d

17.



EBC üçgeni B köşesi etrafında pozitif yönde 90° döndürülerek $AE'B$ üçgeni elde edilir. $\overset{\triangle}{BEC}$ ve $\overset{\triangle}{BE'A}$ üçgenleri eş üçgenlerdir. $[EE']$ çizilirse EBE' üçgeninin ikizkenar dik üçgen ve AEE' üçgeninin dik üçgen olduğu görülür (Pisagor teoremi sağlıyor). $m(\widehat{AEB}) = 135°$ olur.



AEB üçgeninde EB kenarına ait yükseklik çizilerek pisagor teoremi uygulanırsa

$$|AB|^2 = 2^2 + 3^2$$
$$|AB| = \sqrt{13} \text{ bulunur.}$$

Cevap: b

18.

$$a^2b + ab^2 = a^2 + b^2$$
$$a^2(b-1) + b^2(a-1) = 0$$

elde edilir. a ve b pozitif tam sayı olduğundan

$$a^2(b-1) \geq 0 \text{ ve}$$
$$b^2(a-1) \geq 0 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla tek çözüm $(a,b) = (1,1)$ bulunur.

Cevap: b

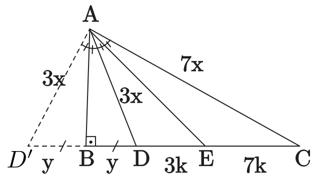
19. Uzun olanın boyu 90 br yanma hızı 15 br/sa, kısa olanın boyu 45 br yanma hızı 5 br/sa ise $90 - 15x = 45 - 5x \Rightarrow x = 4,5$ saat yani 270 dakika sonra boyları eşit olur.

Cevap: b

20. Herhangi 16 kişi alalım. $16 \times 6 = 96 < 100$ olduğundan bunlardan en az birinde en az 7 şeker bulunmalı. Bu öğrenciyi bir kenara koyalım, bunun yerine geriye kalan 9 öğrenciden birini alalım. Bunlardan da en az birinde en az 7 şeker bulunmalı, vs. Bu şekilde en az 9 öğrencide en az 7 şer şeker bulunduğunu gösterebiliriz. O halde 9 öğrencide en az 7 şer şeker, geriye kalan 16 öğrencide de toplam en az 100 şeker bulunmalı, dolayısıyla Ali arkadaşlarına vereceği şeker sayısı $7 \times 9 + 100 = 163$'ten az olamaz, yani Ali kendisine 37'den fazla seker alamaz. 163 örneği: Ali 12 kişiye 6 şer, 13 kişiye de 7 ser şeker versin. Bu durumda herhangi 16 ögrenci aldığımızda bunlardan en az 4 kişi 7 ser şeker alacak geriye kalan 12 si de en az 6 şeker alacak: $4 \times 7 + 12 \times 6 = 100$.

Cevap: c

21.



ABD üçgeninin AB kenarına göre simetriği alınır. $|D'B| = |BD| = y$ (ADD' üçgeni ikizkenar) ve $|DE| = 3k, |EC| = 7k$ (ADC üçgeninde AE açıortay) $D'AC$ üçgeninde AD'ye göre açıortay teoremi uygulanırsa

$$\frac{3x}{2y} = \frac{7x}{10k} \Rightarrow y = \frac{15k}{7} \text{ olur.}$$

$$\frac{|BD|}{|EC|} = \frac{\frac{15k}{7}}{7k} = \frac{15}{49} \text{ bulunur.}$$

Cevap: d

22. $a = 3b(a-2)$ olduğundan a tek sayı ise a ile $a-2$ aralarında asaldır. Dolayısıyla $3b = a \cdot k (k \in \mathbb{Z})$ olmalıdır. $a = k \cdot a \cdot (a-2) k = 1$ ve $a = 3$ bulunur. $(a, b) = (3, 1)$ ikilisi elde edilir. a çift sayı ise $a = 2c (c \in \mathbb{Z})$ olmalıdır. $2c = 3b(2c-2) \Rightarrow c = 3b(c-1)$ elde edilir. c ile $c-1$ aralarında asal olduğundan $c = 3b$ olmalıdır. Fakat $c - 2 = 1 \Rightarrow c = 2 = 3b$ olduğundan b tam sayı olmaz. Ayrıca $(a, b) = (0, 0)$ da denklemi sağlar.

Cevap: b

23.

$$\begin{array}{rl} & x + y = 5k \\ & y + z = 7k \\ + & x + z = 10k \\ \hline & 2x + 2y + 2z = 22k \\ & x + y + z = 11k \end{array}$$

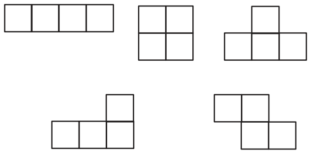
$x = 4k, y = k, z = 6k$ olur. Bulunan değerler $x \cdot y = 12k$ ifadesinde yerine yazılırsa

$4k^2 = 12k$, $k = 3$ olur. Buradan $x = 12, y = 3, z = 18$

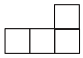
$y + z - x = 9$ bulunur.

Cevap: c

24. Toplam alan $30 \cdot 30 = 900$ olur. Alan 225 eşit parçaya ayrıldığına göre her bir parça $\frac{900}{225} = 4$ bulunur.

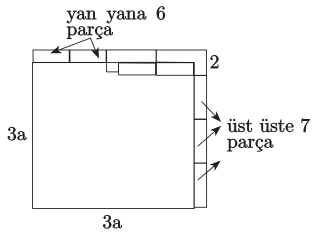


Bu parçalardan 4 tanesinin çevresi 10 olanlar kullanılmalıdır. Çevresi 10 olanlardan hangisinin kullanıldığı önemli olmadığı için 1×4 olanı kullanalım. Köşede kalan boşluğu tam olarak doldurabilmek için 2 tane



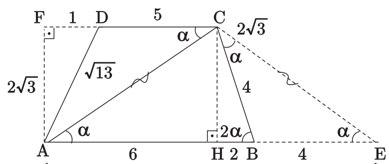
şeklinden kullanmalıyız.

Toplam uzunluğunun en büyük değeri : $\frac{225 \cdot 10 - 120}{2} = 1065$ bulunur. (120 karenin çevresi yani kesim yapılmadan elde edilen kısımdır.) Örnek kesim aşağıdaki gibidir.



Cevap: b

25.



A, B ve E noktaları doğrusal olacak şekilde $|BE| = 4$ çizilirse $|AC| = |CE|$ elde edilir.

C'den AB kenarına inilen dikme ayağı H olsun. $[CH]$ aynı zamanda ikizkenar üçgeninde yüksekliğidir. $|AH| = |HE| = 6$ ve $|HB| = 2$ olur.

CHB üçgeni $30°, 60° 90°$ üçgenidir. $|CH| = |AF| = 2\sqrt{3}$ ve $|FD| = 1$ olur. Pisagor Teoreminden $|AD| = \sqrt{13}$ bulunur.

Cevap: b

26. Bir sayının mod 9'daki değeri ile sayıyı oluşturan rakamların toplamının mod 9'daki değeri değişmez.

$$\begin{aligned} &7(1+2+3+\ldots+2022) \equiv 7 \cdot \frac{2022 \cdot 2023}{2} \equiv 7 \cdot 1011 \cdot 2023 \\ &\equiv 7 \cdot 3 \cdot 7 \equiv 3 \pmod 9 \end{aligned}$$

Cevap: c

27. Verilen eşitlikte her iki tarafın karesini alalım.

$$\left(\sqrt{(1-x)(1+y)}+\sqrt{(1+x)(1-y)}\right)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\begin{aligned} &(1-x)(1+y)+2\sqrt{(1-x)(1+y)} \cdot \sqrt{(1+x)(1-y)}+(1+x) \cdot (1-y)=2 \\ &2-2xy+2\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=2 \end{aligned}$$

$\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = xy$ eşitliğinde her iki tarafın tekrar karesini alalım

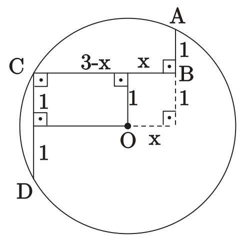
$$\begin{aligned} &\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)=x^2y^2 \\ &1-x^2-y^2+x^2y^2=x^2y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1 \\ &\sqrt{x^2+y^2}=1 \end{aligned}$$

Cevap: b

28. Sorumuz 6 özdeş şeker 4 çocuğa kaç farklı şekilde dağıtılabilir sorusuyla özdeştir. Ayraç yöntemi kullanılarak cevap $9!/6! \cdot 3! = 84$ bulunur.

Cevap: d

29.



$$\begin{aligned} &|OC|=|AO|=r \\ &2^2+x^2=1^2+(3-x)^2 \\ &x=1 \end{aligned}$$

ve pisagor teoreminden $|AO| = r = \sqrt{5}$ bulunur.

Cevap: b

30. $n^4+4=n^4+4+4n^2-4n^2=\left(n^2+2\right)^2-(2n)^2$
$n^4+4=\left(n^2+2n+2\right)\left(n^2-2n+2\right)=\left[(n+1)^2+1\right]\left[(n-1)^2+1\right]$
$n=\pm1 \Rightarrow n^4+4=1+4=5$ asal sayısı elde edilir. $n=0 \Rightarrow n^4+4=4$ asal sayı elde edilemez. $n>1$ ya da $n<-1$ ise $(n+1)^2+1>1$ ve $(n-1)^2+1>1$ olduğundan n^4+4 ün çarpanları 1'den büyük ve asal sayı olamaz. Dolayısıyla $n=1$ ve $n=-1$ olmak üzere 2 tam sayı vardır.

Cevap: a

31. $r^2+2r\in\mathbb{Z}$ ise $r^2+2r+1\in\mathbb{Z}$ dir.
$(r+1)^2\in\mathbb{Z}$ ise $r=a\sqrt{b}-1$ formunda ve $a,b\in\mathbb{Z}$ şeklindedir.
$r^3+3r^2-5r+1=(r+1)^3-8r \Rightarrow (a\sqrt{b})^3-8(a\sqrt{b}-1)$
$a^3b\sqrt{b}=8a\cdot\sqrt{b} \Rightarrow a^2b=8 \Rightarrow a=\pm1$ ve $b=8$ veya $a=2$ ve $b=2$ bulunur. Her durumda $r=\pm2\sqrt{2}-1$ olur.

$$|3\sqrt{2}\cdot(\pm2\sqrt{2}-1+1)|=|\pm12|=12$$

Cevap: c

32. Tahtanın hanelerini satranç tahtası şeklinde beyaz ve siyah renge boyayalım. Her hamlede siyah hanedeki bir dama siyah haneye, beyaz hanedeki bir dama da beyaz haneye geçer. Çift n'ler için sol alt köşede 4 siyah, 5 beyaz hane; sağ alt köşede de 5 siyah, 4 beyaz hane var. Dolayısıyla bu işlemlerle tüm damalar sağ alt köşeye getirilemez. $n=7$ için alt satırın solundaki damalar alt satırın sağına şöyle getirilir: $a1\to e1; b1\to d1; c1\to h1; d1\to g1$. Benzer şekilde diğer iki satırdaki damalar üzerinde işlem yapılır. Ayrıca benzer şekilde $n=9$ durumunda da işlem yapılır. Böylece tam olarak $n=7$ ve $n=9$ durumunda yapılabilir.

Cevap: c